Phys
o. h
77

Lehrbuch

der

Elasticität und Festigkeit

mit

212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren
und einem ausführlichen Formelnverzeichnis

nebst einer

Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben.

Zum

**Gebrauch an niederen und höheren Schulen, sowie zum Selbststudium
und Nachschlagen für Bau- und Maschinentechniker**

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Richard Klimpert.

Stuttgart.
Verlag von Julius Maier.
1889.

Buchdruckerei von Carl Hammer in Stuttgart.

Vorwort.

Mit dem vorliegenden Lehrbuch der Elasticität und Festigkeit soll nicht allein dem angehenden Bau- und Maschinentechniker ein Mittel dargeboten werden, welches ihm ermöglicht, sich ohne Kenntnis der höheren Mathematik mit den wichtigsten und für den gewöhnlichen Bedarf notwendigsten Gesetzen der Elasticitäts- und Festigkeitslehre bekannt zu machen, es soll dasselbe auch, als dem Wissenszweige der allgemeinen Physik angehörig, gewissermassen eine Fortsetzung des bereits erschienenen Lehrbuchs der Statik fester Körper bilden. Dort wurden die Bedingungen ermittelt, unter denen äussere, auf einen Körper (resp. materiellen Punkt) einwirkende Kräfte einander das Gleichgewicht halten, während hier die Lehre vom Gleichgewicht der inneren, zwischen den Teilen fester Körper untereinander wirkenden Molekular- oder Kohäsionskräfte erledigt ist.

Gleich bei Beginn der vorliegenden Arbeit zeigte es sich, dass, um den vorerwähnten doppelten Zweck zu erreichen, mancherlei Schwierigkeiten zu überwinden seien, und es erwachten mancherlei Zweifel, ob nicht dieser oder jener der vorliegenden Abschnitte ausführlicher oder weniger ausführlich behandelt werden müsse, als es eben geschehen ist. Es soll auch keineswegs behauptet werden, dass, trotz aller Bemühungen, zwischen den Anforderungen an ein physikalisches und zugleich technisches Lehrbuch den besten Mittelweg zu finden, überall die rechte Grenze eingehalten ist, und es ist immerhin möglich, dass, vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet, das Buch manchem vielleicht zu ausführlich erscheint, während es der Techniker in einigen seiner Teile (wie z. B. in der Abscherungsfestigkeit oder in der zusammengesetzten Festigkeit) vielleicht ausführlicher wünscht.

Dem gegenüber ist aber zu bedenken, dass bei Vermeidung aller Differentiationen und Integrationen es gar nicht möglich ist, die gesamten Theorien und Gesetze der Elasticitäts- und Festigkeitslehre zu entwickeln. Es wird dem aufmerksamen Leser nicht entgehen, dass an einigen Stellen der Versuch gemacht ist, auch die in andern Lehrbüchern nur mit Hilfe der höheren Mathematik entwickelten Formeln hier mit elementaren Mitteln zu erreichen, wie z. B. die Entwickelung des Gesetzes über die Krümmungshalbmesser der elastischen Linie

(Seite 107), oder die Gleichung der elastischen Linie (Seite 111) u. dergl. m. Wer aber mit dem Gebrauch der Hilfsmittel betraut ist, welche die höhere Mathematik an die Hand gibt, dem bieten sich genug gelehrte und umfassende Werke dar, die, speziell für Maschinen- resp. Bautechniker geschrieben, einen ganz anderen Zweck haben als die vorliegende Arbeit, welche nur die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Untersuchungen behandelt. Immerhin dürften die sorgfältig ausgewählten, mannigfaltigen und in ansehnlicher Zahl dargebotenen gelösten Aufgaben den gewöhnlichen Ansprüchen vollkommen genügen und den Studierenden befähigen, die Lösung ähnlicher Aufgaben selbständig zu finden. Um letzteren Zweck zu erreichen, sind eine Reihe ungelöster Aufgaben nebst ihren Schlussresultaten beigefügt, mit deren Hilfe sich die selbstgefundenen Lösungen auf ihre Richtigkeit leicht prüfen lassen.

Bremen.

Richard Klimpert.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Allgemeines über Elasticität und Festigkeit 1

II. Die absolute Elasticität und Festigkeit, oder die Elasticität und Festigkeit beim Zug . 6

a. Die Elasticität des Zuges . 6

b. Die absolute Festigkeit oder Zugfestigkeit ohne Berücksichtigung des Eigengewichts der Körper . 26

c. Die absolute oder Zugfestigkeit prismatischer Körper mit Rücksicht auf deren Eigengewicht . 33

d. Bestimmung der Arbeits- oder Wirkungsgrösse, welche zur Ausdehnung eines Stabes nötig ist . 36

e. Gelöste Aufgaben . 41

f. Ungelöste Aufgaben . 58

III. Die rückwirkende Elasticität und Festigkeit, oder die Elasticität und Festigkeit beim Druck . 60

a. Die Gesetze der rückwirkenden Elasticität und Festigkeit 60

b. Gelöste Aufgaben . 64

c. Ungelöste Aufgaben . 67

IV. Die Schub- oder Abscherungsfestigkeit 68

a. Gesetze der Schub- oder Abscherungsfestigkeit 68

b. Gelöste Aufgaben . 69

c. Ungelöste Aufgaben . 72

V. Die relative oder Biegungselasticität und -Festigkeit 72

a. Theorie der relativen Elasticität und Festigkeit 72

b. Bestimmung der Trägheits- und Widerstandsmomente der wichtigsten Querschnittsformen . 79

α). Trägheitsmoment des Rechtecks, auf eine Seite als Achse bezogen . 81

β). Trägheitsmoment des Rechtecks, bezogen auf die neutrale Achse . 82

γ). Trägheitsmoment des Dreiecks 91

δ). Trägheits- und Widerstandsmoment regulärer Polygone 92

ε). Polares Trägheitsmoment 97

ζ). Trägheits- und Widerstandsmoment von Kreis, Kreisring und Ellipse 98

η). Trägheits- und Widerstandsmomente von Querschnittsflächen, die aus Kreisen und Rechtecken zusammengesetzt sind 105

c. Bestimmung der Krümmung und Senkung der elastischen Linie oder der gebogenen Mittelachse . 107

d. Berechnung der Widerstandsmomente, der Tragkräfte und der grössten Durchbiegungen prismatischer Körper für die in der Praxis am meisten vorkommenden Lagerungen . 117

α). Der Stab ist mit einem Ende horizontal eingeklemmt oder eingemauert und am andern freien Ende wirkt normal zur Schwerpunktsachse eine Last P . 117

Seite

β). Der Stab ist mit einem Ende horizontal eingemauert und die Belastung ist gleichmässig über die freie Länge des prismatischen Körpers verteilt 118
γ). Der Stab ist in zwei Punkten gestützt, und an einem dritten Punkt zwischen jenen wirkt senkrecht zum Stab eine daselbst konzentrierte Last 122
δ). Der Stab ist in zwei Punkten gestützt und die Last gleichmässig über die Stablänge verteilt 126
ε). Der Balken sei an beiden Enden fest eingemauert 128
e. Bestimmung der Körperformen von gleicher relativer Festigkeit 133
α). Aus der gegebenen, nicht prismatischen Form eines geometrischen Körpers ist seine Tragfähigkeit zu berechnen 133
β). Aus der gegebenen Belastung sind Form und Dimensionen eines Körpers zu berechnen, der in allen Querschnitten dieselbe Festigkeit besitzt . 135
f. Bestimmung der vorteilhaftesten Querschnittsdimensionen eines Tragbalkens bei rechteckigem Querschnitt 146
g. Träger von Schmiedeeisen und Gusseisen 148
h. Bestimmung des Elasticitätsmodulus, resp. der Grösse S durch Biegung von Stäben . 151
i. Bestimmung der mechanischen Arbeits- oder Wirkungsgrösse, die zur Biegung nötig ist . 157
k. Besonders wichtige Anwendungen der Biegungselasticität stählerner Federn 160
Die Uhrfedern . 160
Die Cylinderhemmung 162
Die Ankerhemmung 163
Die Chronometerhemmung 166
Die dynamometrischen Apparate 168
l. Gelöste Aufgaben über die Biegungselasticität und -Festigkeit 170
m. Ungelöste Aufgaben über die Biegungselasticität und -Festigkeit 205

VI. Die Torsionselasticität und -Festigkeit 212
a. Die Gesetze der Torsionselasticität 212
b. Bestimmung des Torsionsmoments, der Torsionskraft und des grössten Torsionswinkels eines beliebigen Querschnitts 222
c. Berechnung von Transmissions- und Radwellen 229
d. Der an einem Ende festgehaltene Stab ist in seiner ganzen Länge gleichmässig mit dem Drehungsmoment M = PR beansprucht 234
e. Bestimmung der Körperformen von gleicher Torsionsfestigkeit 236
f. Bestimmung der Arbeits- oder Wirkungsgrösse, welche zur Verdrehung eines Stabes um den Bogen ω nötig ist 238
g. Gelöste Aufgaben . 239
h. Ungelöste Aufgaben . 252

VII. Die Zerknickungsfestigkeit 255
a. Tragkraft der auf diese Weise in Anspruch genommenen Körperformen . 255
b. Vergleichung der Zerknickungsfestigkeit mit der einfachen rückwirkenden oder Druckfestigkeit . 264
c. Gelöste Aufgaben . 268
d. Ungelöste Aufgaben . 275

Zusammenstellung der in diesem Buch vorkommenden Formeln 277

Resultate zu den ungelösten Aufgaben 294

Elasticitäts- und Festigkeitslehre

oder die

Lehre vom Gleichgewicht der Teile fester Körper untereinander.

I. Allgemeines über Elasticität und Festigkeit.

Frage 1. Was versteht man unter der Elasticität eines Körpers?

Antwort. Unter der Elasticität[1]) eines Körpers versteht man diejenige Eigenschaft desselben, vermöge deren der Körper, nachdem er der Einwirkung einer äusseren Kraft ausgesetzt war, durch welche seine Teilchen nur wenig aus ihrer ursprünglichen Lage verdrängt wurden und so eine geringe Formänderung erzeugten, nach Aufhören der Krafteinwirkung wieder seine ursprüngliche Gestalt annimmt, indem die Teilchen wieder in ihren früheren Gleichgewichtszustand zurückkehren. Unter Elasticität im engeren Sinn des Wortes versteht man den Widerstand, mit welchem ein Körper der Formänderung entgegenwirkt.

[1]). Siehe Erkl. 1.

Erkl. 1. Elasticität (vom latein. *elasticus* = antreiben, in Bewegung setzen) heisst zu deutsch Federkraft, Springkraft, Schnellkraft. Eine ausführliche Betrachtung dieser Eigenschaft in Bezug auf feste, flüssige und gasförmige Körper befindet sich in demjenigen Lehrbuch dieser Encyklopädie, welches von den allgemeinen Eigenschaften der Körper handelt.

Frage 2. Welche Körper sind im allgemeinen elastisch und welche Körper besitzen diese Eigenschaft nicht?

Antwort. Ein gewisses Mass von Elasticität kommt allen Körpern zu; andererseits gibt es aber auch keinen vollkommen elastischen Körper, d. h. keinen Körper, bei welchem jede Formänderung, nach Beseitigung der äusseren Einwirkung sogleich wieder verschwindet; vielmehr lehrt die Erfahrung, dass bei allen uns bekannten Körpern eine gewisse Grenze, die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werden darf, wenn der Körper seine ursprüngliche Gestalt wieder vollständig annehmen soll.

Erkl. 2. Obgleich, wie in nebenstehender Antwort bemerkt ist, ein gewisses Mass von Elasticität allen Körpern zukommt, so nimmt man doch in manchen Fällen an, dass die von äusseren Kräften angegriffenen Körper unter allen Umständen den auf sie einwirkenden Kräften zu widerstehen vermögen, so dass sie weder in ihrer inneren Struktur (siehe Erkl. 3) noch in ihrer Form durch die äusseren Kräfte irgend welche Veränderungen erleiden, d. h. man setzt absolut feste oder starre Körper voraus, welche einer Formveränderung durchaus unfähig sind (siehe *R. Klimpert*, Lehrb. d. Statik, Erkl. 7). In Wirklichkeit giebt es solche Körper nicht, denn unter der Einwirkung genügend starker äusserer Kräfte wird jeder Körper mehr oder weniger ausgedehnt oder zusammengedrückt, gedreht u. dergl. m., wobei stets eine Lagenänderung der inneren

Körperteile stattfindet, die allerdings meist so gering ist, dass sie sich der Beobachtung entzieht und deshalb bei manchen physikalischen Erscheinungen der Körper unberücksichtigt bleiben kann. Sobald aber ein Körper bei technischen Einrichtungen Verwendung finden soll und findet, darf er nie als starr angesehen werden, sondern als das, was er wirklich ist, nämlich ein elastisches System materieller Punkte, verbunden durch Elasticitätskräfte, welche zwar jeder Formänderung entgegenwirken, aber nicht im stande sind, jede Formänderung zu verhüten.

Erkl. 3. Die Struktur (lat. structūra, von struĕre, aufschichten, zusammenfügen, bauen) bezeichnet die Fügung oder das Gefüge, den Aufbau, die Zusammensetzung, Anordnung, Verbindungsweise der Teile, besonders bei Holz-, Stein- und Gebirgsarten.

Frage 3. Welche Körper bezeichnet man im gewöhnlichen Leben vorzugsweise als elastische Körper?

Erkl. 4. Da zu jeder auch der geringsten Formveränderung eines Körpers eine von aussen wirkende Kraft nötig ist, so muss auch im Innern des Körpers eine Kraft oder eine Summe von Kräften vorhanden sein, welche den ursprünglichen Zustand in der Anordnung der Teile aufrecht zu erhalten strebt, und wenn eine Veränderung mit der ursprünglichen Lage der materiellen Teile vorgehen soll, notwendigerweise überwunden werden muss. Diese zwischen den einzelnen Teilen der festen Körper wirkenden Molekularkräfte (welche in dem Lehrb. der „Allgem. Eigenschaften der Körper“ ausführlicher behandelt werden), deren Gesamtwirkung man mit dem Namen Kohäsion bezeichnet, sind somit im stabilen Gleichgewicht (siehe *R. Klimpert*, Lehrb. der Statik, Seite 228).

Antwort. Als elastische Körper werden im gewöhnlichen Leben vorzugsweise solche bezeichnet, die einen grossen elastischen Spielraum haben, d. h. die durch eine geringe Kraft schon eine grosse Formveränderung erfahren, wie z. B. Kautschuk, Fischbein, Elfenbein, Stahlstreifen, Metall- und Darmsaiten, Haare, die meisten Holzarten in dünnen Plättchen und Streifen, Kork u. dergl. mehr. Dabei unterscheidet man weiche elastische von harten elastischen Körpern. Bei weich elastischen Körpern wie Leder, Gummielastikum etc. genügen schwache Kräfte, um grosse Veränderungen der Gestalt hervorzubringen, während in hart elastischen Körpern, wie Glas und Stahl, eine bedeutende Kraft sich einer schon geringen Formänderung widersetzt.

Frage 4. Wie nennt man die im Innern eines Körpers auftretenden Kräfte, welche sich jeder Einwirkung von äusseren Kräften entgegensetzen?

Erkl. 5. Wirken die der Formänderung eines Körpers widerstrebenden Kräfte einer Verlängerung des Körpers entgegen, so nennt man sie Zugspannungen und bezeichnet sie mit (+) positiv; wirken sie aber einer Verkürzung oder Zusammendrückung des Körpers entgegen, so nennt man sie Druckspannungen und bezeichnet sie mit (—) negativ.

Antwort. Die im Innern eines Körpers auftretenden Kräfte, welche sich jeder Einwirkung von äusseren Kräften entgegensetzen, nennt man Spannungen. Dieselben können ihrem Sinn nach positive oder negative Spannungen sein[1]).

[1]) Siehe Erkl. 5.

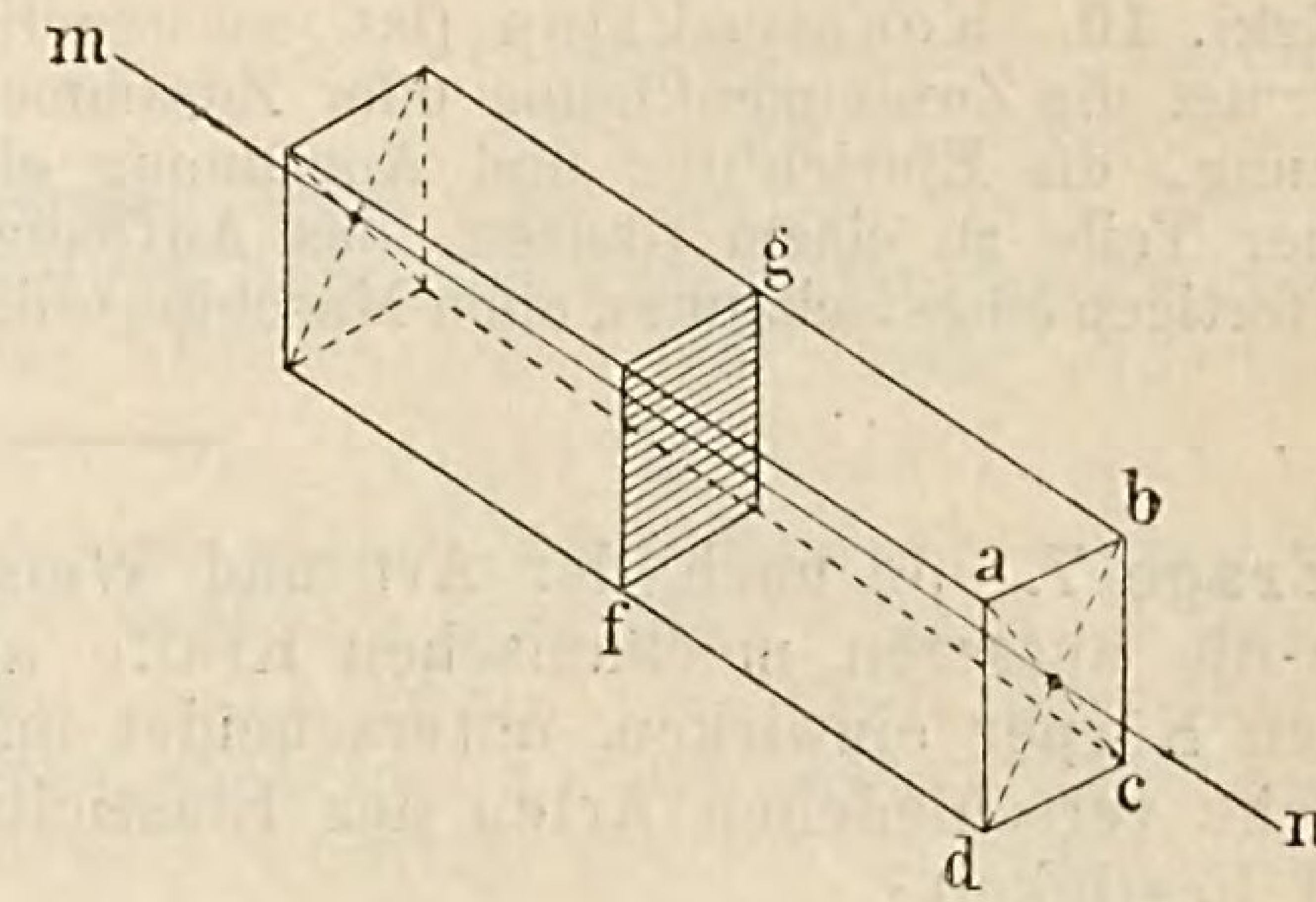
Frage 5. Was versteht man unter der Festigkeit eines Körpers, und welche Grösse bildet das Mass der Festigkeit eines Körpers?

Antwort. Unter der Festigkeit eines Körpers versteht man den Widerstand, den derselbe vermöge seiner Kohäsion der Tren-

Erkl. 6. Die Formänderung sowie die schliesslich eintretende Zerstörung eines Körpers durch Einwirkung äusserer Kräfte hängt nicht allein von der Form des Körpers, als auch von der Art und Weise ab, wie die äusseren Kräfte auf den Körper einwirken. In Bezug auf das erstere beziehen sich die nachfolgenden Betrachtungen der Einfacheit wegen nur auf gerade stabförmige Körper, das sind solche, welche wir uns durch die Bewegung einer ebenen Fläche von bestimmter Form (z. B. $\overline{abcd}$ in Fig. 1) längs einer geraden Linie ($\overline{mn}$) in der Weise entstanden denken können, dass die Fläche von der Linie in jeder Lage rechtwinklig in ihrem Schwerpunkt geschnitten wird. Diese gerade Linie ($\overline{mn}$) ist die Mittellinie oder Achse des Körpers, und jeder normale oder senkrechte Schnitt zur Mittellinie wird ein Querschnitt des Körpers genannt (siehe Fig. 1. $\overline{fg}$).

nung seiner Teile durch irgend eine äussere Kraft entgegensetzt. Diejenige Kraft oder dasjenige Gewicht in Kilogramm, welches, um den kleinsten Teil vermehrt, bei einem Stab von der Querschnittseinheit (einem Quadratcentimeter resp. Quadratmillimeter) eine Trennung der Teile bewirkt, also gleichsam mit der Festigkeit des Körpers im Gleichgewicht steht, giebt das Mass für die Festigkeit desselben an und heisst Festigkeitskoeffizient, Festigkeitsmodulus, Bruchkoeffizient oder Bruchmodulus.

Figur 1.



Frage 6. Was versteht man unter der Elasticitäts- und Festigkeitslehre?

Antwort. Unter der Elasticitäts- und Festigkeitslehre versteht man denjenigen Teil der Mechanik, welcher die sämtlichen Regeln, Formeln und Beispiele enthält, die sich auf die Berechnung der Dimensionen von festen Körpern aus den auf sie einwirkenden Kräften beziehen. Soweit die auf einen Körper einwirkenden Kräfte die Elasticitätsgrenze[1]) nicht überschreiten, kann man die Lehre von den Beziehungen zwischen den Kräften einerseits, den Dimensionen, dem Material und der Formänderung anderseits Elasticitätslehre nennen, während in den Fällen, wo die Elasticitätsgrenze überschritten wird und Brüche zu fürchten sind, der Name Festigkeitslehre richtiger ist. Eine scharfe Trennung beider Gebiete findet indes für gewöhnlich nicht statt, indem die Elasticität oder der Widerstand gegen eine Formänderung bei sich steigernder Kraft allmählich in einen Widerstand gegen die Trennung der Körperteilchen übergeht und alsdann richtiger Festigkeit genannt wird. Man fasst deshalb die Lehre von der Elasticität

Erkl. 7. Unter der Elasticitätsgrenze versteht man im allgemeinen die grösste äussere Kraft oder Belastung, welche ein Körper auszuhalten vermag, ohne dass nach Beseitigung derselben eine bleibende Formveränderung hervorgerufen wird. Bei den meisten Körpern ist diese Grenze sehr eng gezogen, und wenn man einem Körper durch Biegen, Hämmern, Prägen, Walzen oder Schmieden eine andere Gestalt giebt, so ist derselbe stets über seine Elasticitätsgrenze hinaus in Anspruch genommen worden.

Erkl. 8. Die Elasticitäts- und Festigkeitslehre ist für Bau- und Maschinenwesen, überhaupt für die praktische Technik (siehe Erkl. 9) von grösster Wichtigkeit, indem sie genau Form und Ausdehnung kennen lehrt, welche ein Körper erhalten muss, wenn er Kräften, die in einer gegebenen Weise auf ihn einwirken, auf die Dauer widerstehen soll. Zu diesem Zweck werden in der Elasticitäts- und Festigkeitslehre zunächst die Veränderungen beobachtet, welche mechanische Kräfte unter gewissen Umständen an einem bestimmten festen Körper hervorbringen, die Beobachtungsresultate werden zusammengestellt, in übersichtliche Formeln und Regeln gebracht und deren Anwendung an Beispielen aus dem praktischen Leben gezeigt.

[1]). Siehe Erkl. 7.

Erkl. 9. Die Technik (vom griech. technikē, von téchnē, Kunst) bezeichnet sowohl die Lehre, wie eine Kunst oder ein Handwerk regelrecht ausgeübt werden soll, als auch den Inbegriff aller gewerblichen Anstalten, der darin erlangten Fertigkeiten u. angewandten Hilfsmittel.

Praktisch (vom griech. praktikós, ausübend, thätig), heisst anwendbar, zweckdienlich, ausübend, ausführbar, im Gegensatz zu theoretisch (griech. theōrētikós), d. h. beschauend, betrachtend, erkennend, der geistigen Betrachtung oder Erkenntnis nach.

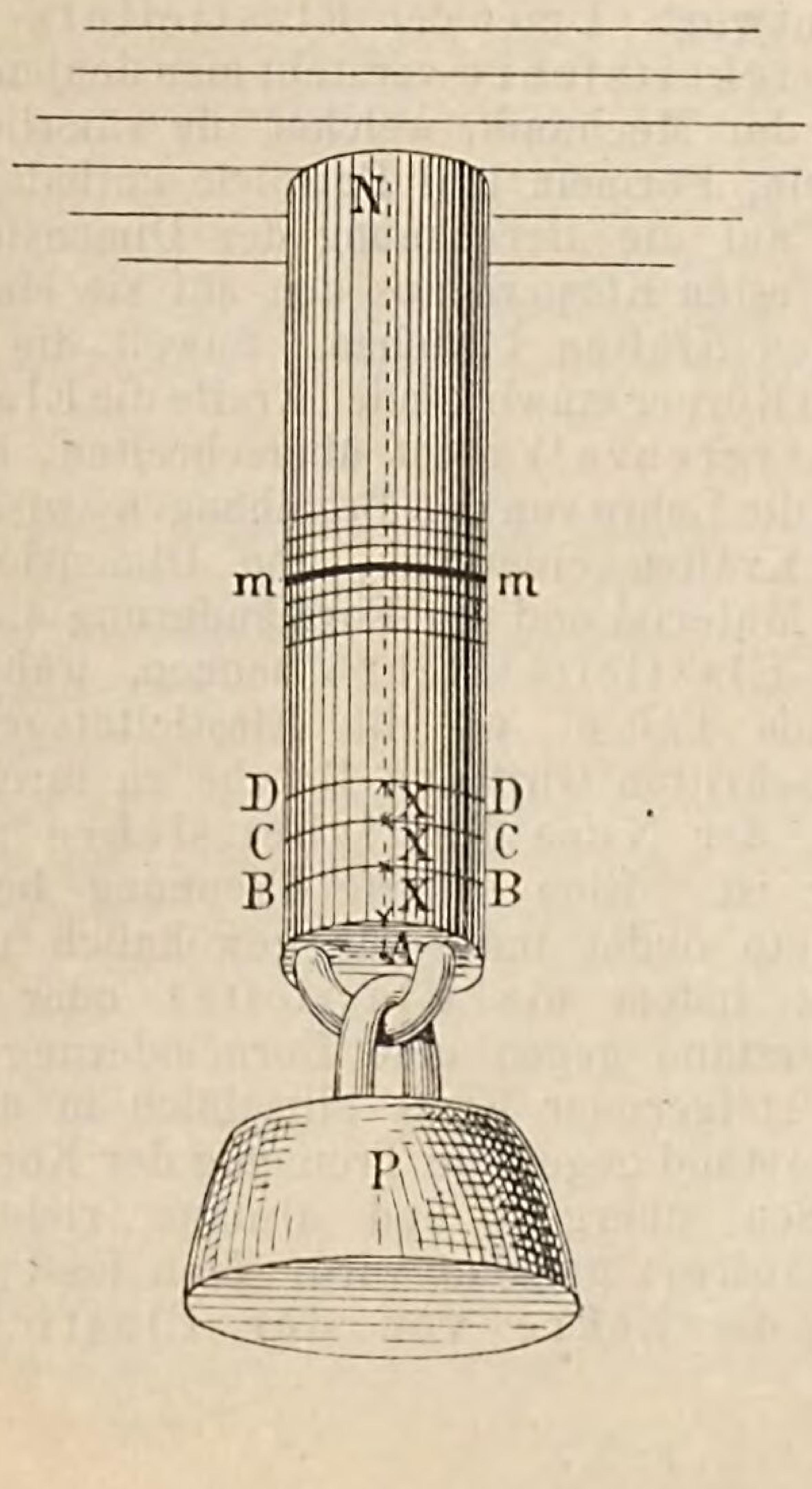
Praktische Technik bezeichnet somit die sich auf das thätige Leben beziehenden, zur wirklichen Ausübung kommenden Bau- und Maschinenkonstruktionen (siehe Erkl. 10).

Erkl. 10. Konstruktion (lat. constructio) bedeutet die Zusammenfügung oder Zusammensetzung, die Einrichtung und Anordnung einzelner Teile zu einem Ganzen, das Aufbauen, Verfertigen eines Gebäudes, einer Maschine u. dgl.

und Festigkeit als etwas Zusammengehöriges auf, und nennt dieselbe auch „Lehre von dem Gleichgewicht der Teile fester Körper untereinander."

Frage 7. Je nach der Art und Weise, wie die äusseren mechanischen Kräfte auf einen Körper einwirken, unterscheidet man welche verschiedenen Arten der Elasticität und Festigkeit?

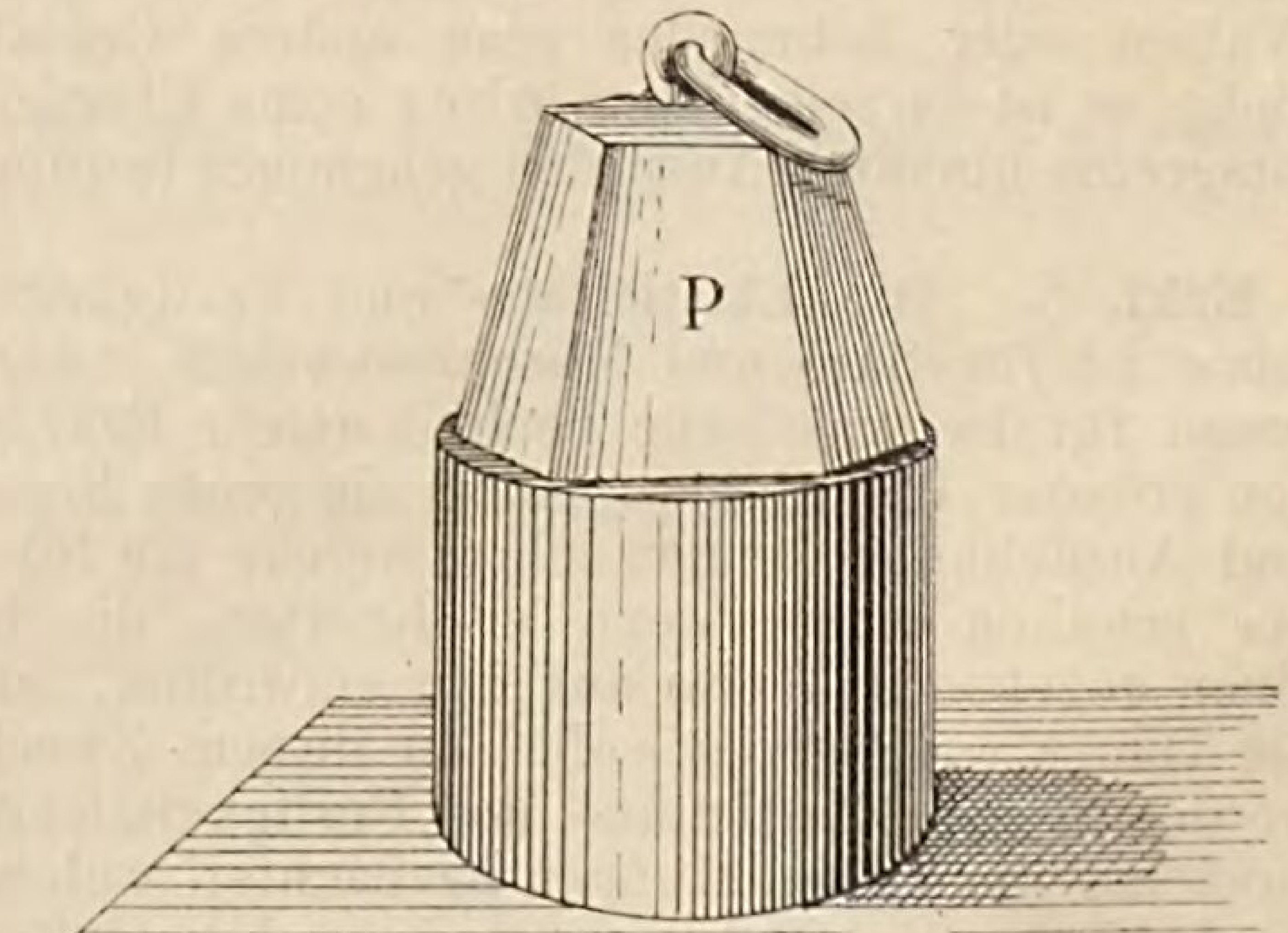
Figur 2.



Antwort. Je nach der Art und Weise, wie die äusseren mechanischen Kräfte auf einen Körper einwirken, unterscheidet man folgende Arten der Elasticität und Festigkeit:

1). Die absolute Elasticität und Festigkeit, Zugelasticität und -Festigkeit, oder die Festigkeit gegen das Zerreissen, — wenn die äussere Kraft nach der Längenrichtung auf den Körper einwirkt und ihn zu verlängern, oder wenn sie stark genug ist, zu zerreissen sucht (siehe Fig. 2).

Figur 3.

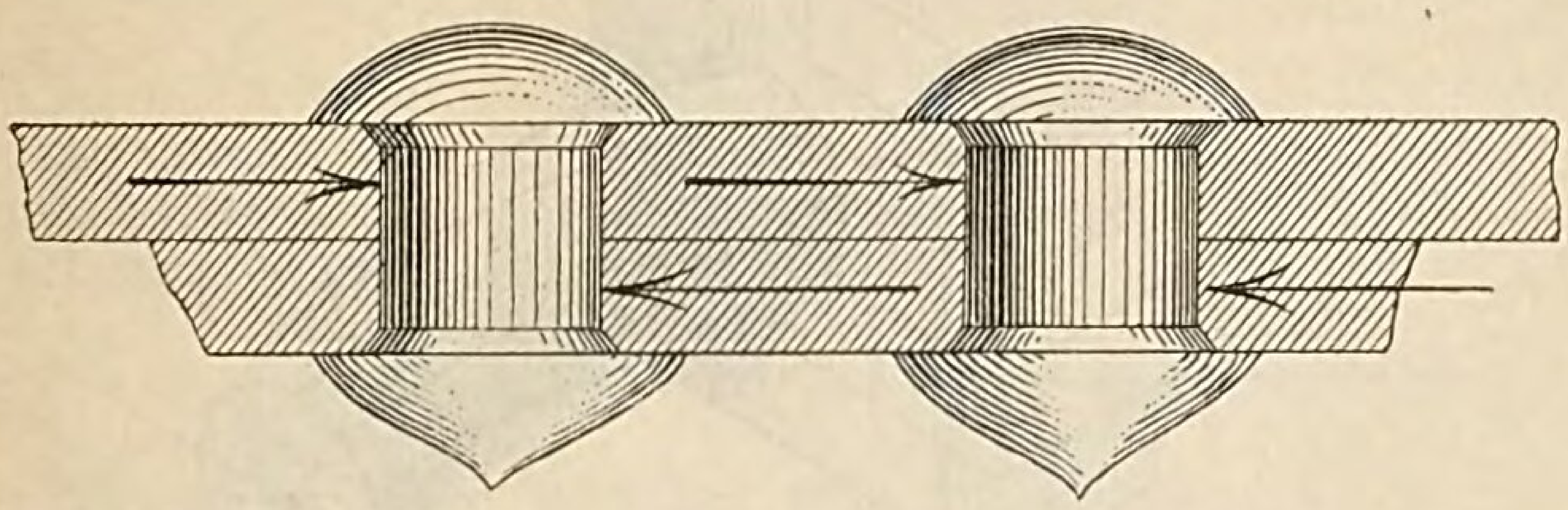


2). Die rückwirkende Elasticität und Festigkeit, Druckelasticität und -Festigkeit, oder die Festigkeit

gegen das Zerdrücken, — wenn die äussere Kraft ebenfalls nach der Längenrichtung auf den Körper einwirkt und ihn zu verkürzen, oder wenn sie stark genug ist, zu zerdrücken sucht (siehe Fig. 3).

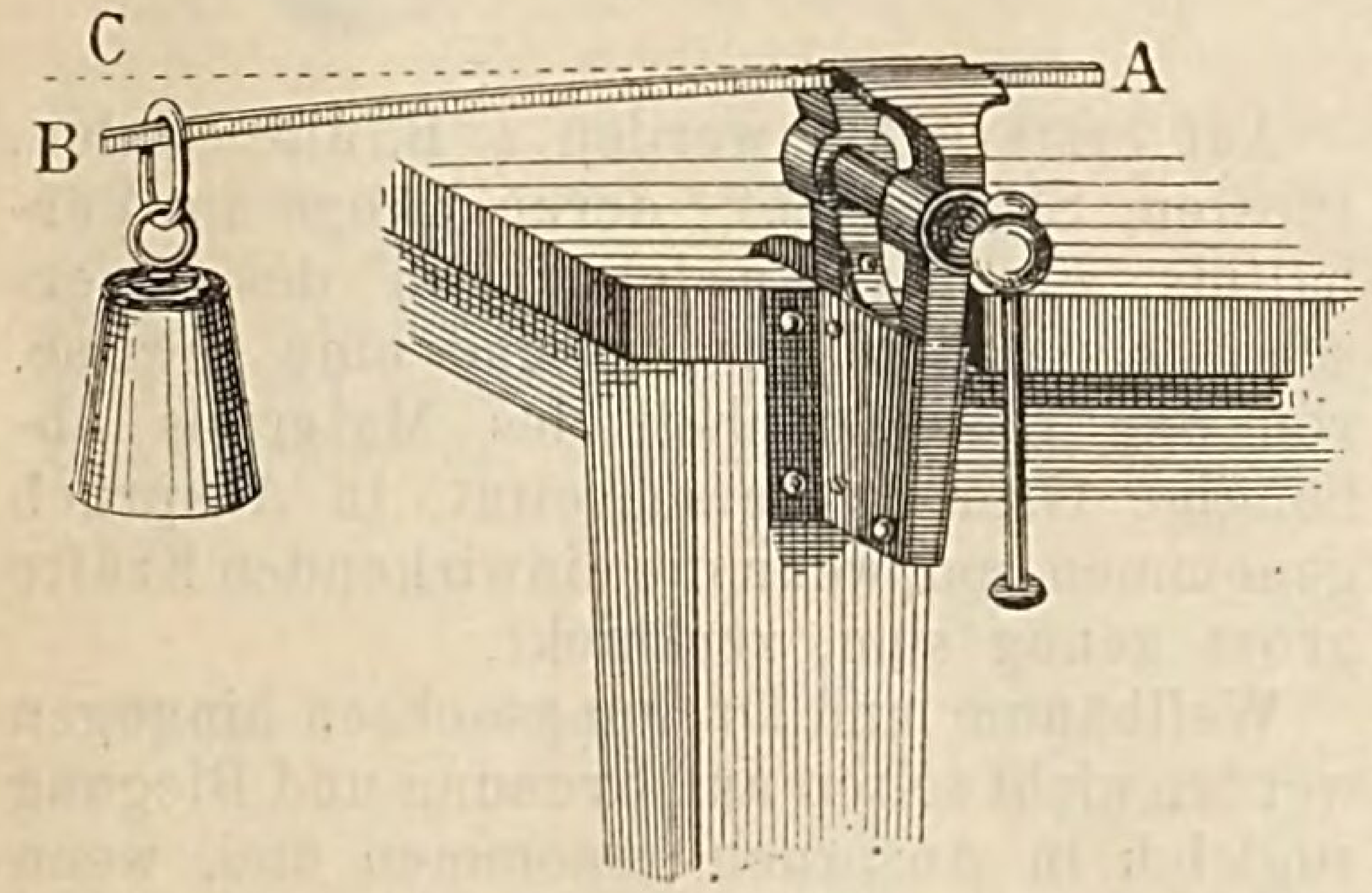
3). Die Schubelasticität und -Festigkeit, Verschiebungs- oder Abscherungselasticität und -Festigkeit, oder die Festigkeit gegen das Verschieben oder Abscheren, — wenn ein Körper in einem Querschnitt durch äussere Kräfte, die in der Ebene dieses Querschnitts liegen und nach entgegengesetzter Richtung wirken, so in Anspruch genommen wird, dass sie den einen Teil des Körpers über den andern hinwegzuschieben oder abzuscheren suchen (siehe Fig. 4).

Figur 4.



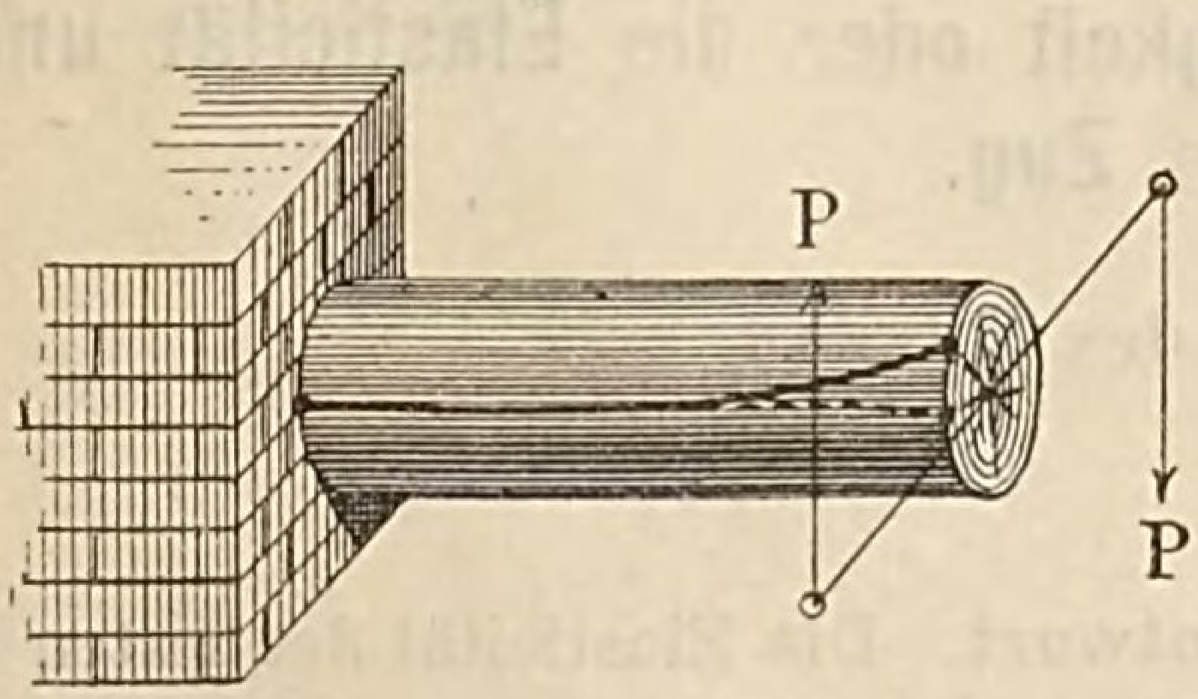
4). Die relative Elasticität und Festigkeit, Biegungselasticität und -Festigkeit, oder die Festigkeit gegen das Verbiegen, — wenn die äussere Kraft senkrecht auf die Längenrichtung des Körpers einwirkt und ihn zu biegen, oder wenn sie stark genug ist, abzubrechen sucht (siehe Fig. 5).

Figur 5.



5). Die Torsionselasticität und -Festigkeit, Verdrehungs- oder Verwindungselasticität und -Festigkeit, oder die Festigkeit gegen das Verdrehen oder Verwinden, — wenn die äussere Kraft ebenfalls quer zur Längenrichtung angebracht ist, aber nicht durch die Achse geht, sondern an einem Hebelarm senkrecht zur Achse wirkt, und den Körper zu verdrehen oder zu verwinden sucht (siehe Fig. 6).

Figur 6.

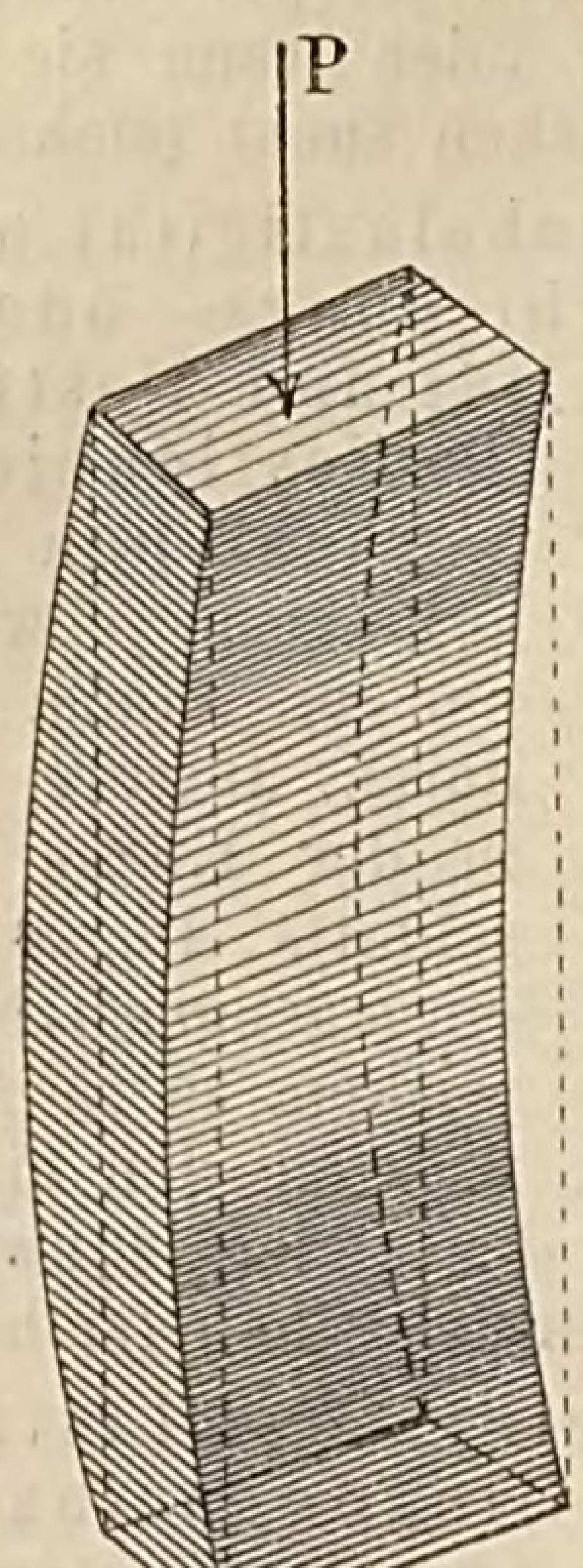


6). Die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit, — wenn mehrere äussere Kräfte einen Körper gleichzeitig auf verschiedene Art in Anspruch nehmen, so z. B. gleichzeitig auf Druck und Biegung, oder auf Drehung und Biegung etc.

Wird der Körper gleichzeitig auf Druck und Biegung, also auf rückwirkende und relative Festigkeit in Anspruch genommen, so nennt man diese Art der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit insbesondere die Zerknickungselasticität und -Festigkeit (siehe Fig. 7).

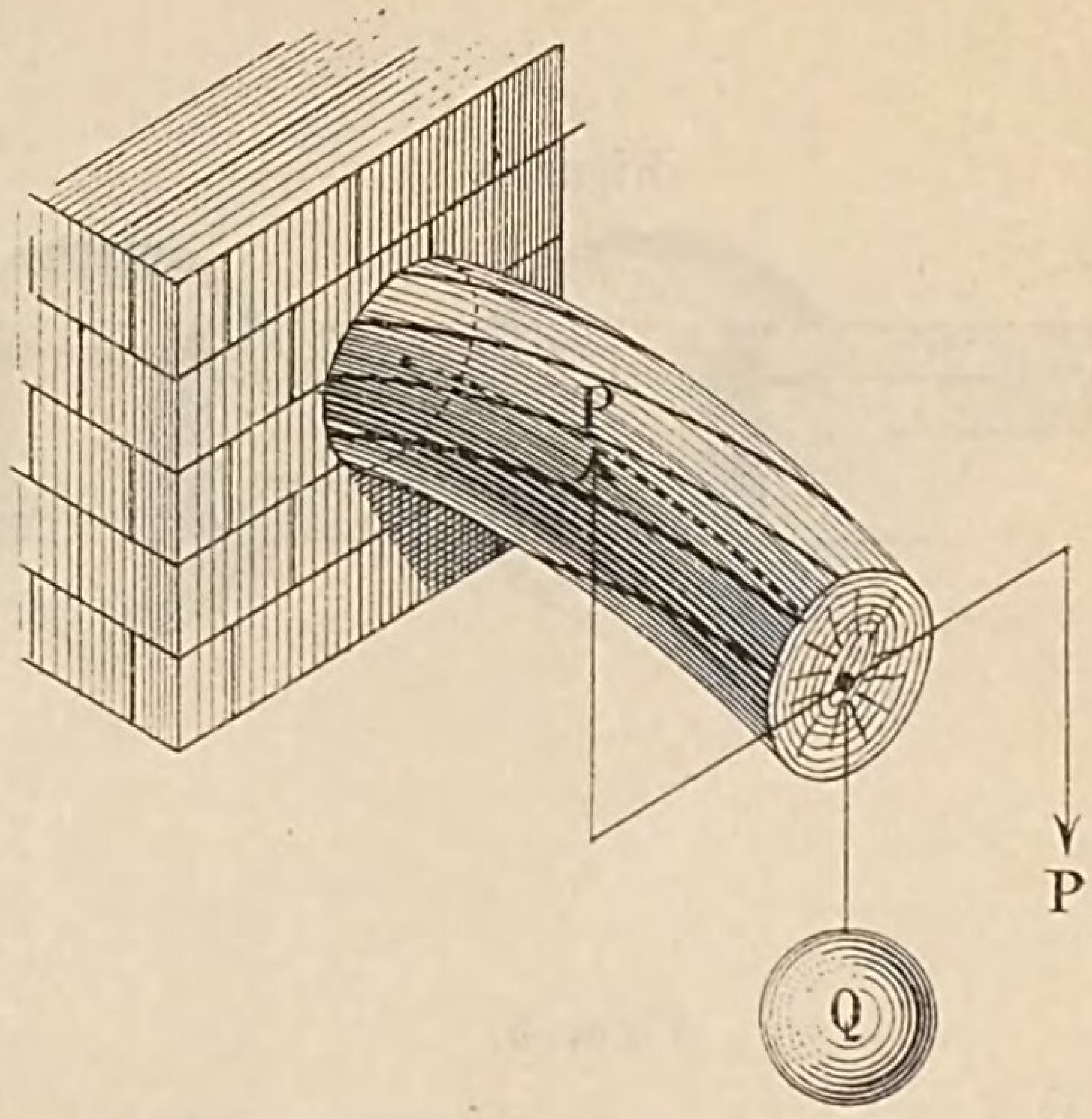
Wird der Körper dagegen gleichzeitig auf Drehung und Biegung, also auf Torsions- und Biegungselasticität und -Festigkeit beansprucht, so kann diese Art der zusammen-

Figur 7.



gesetzten Elasticität und Festigkeit füglich Abwürgungselasticität und -Festigkeit genannt werden (siehe Fig. 8).

Figur 8.



Auf erstere Art werden z. B. alle Säulen, Pfosten, Stützen etc., deren Länge im Verhältnis zu den Ausdehnungen des Querschnitts ziemlich gross ist und eine gewisse, von der Beschaffenheit des Materials abhängige Grenze überschreitet, in Anspruch genommen und, wenn die einwirkenden Kräfte gross genug sind, zerknickt.

Wellbäume und Drehungsachsen hingegen werden nicht selten auf Drehung und Biegung zugleich in Anspruch genommen und, wenn die äusseren einwirkenden Kräfte stark genug sind, abgewürgt.

II. Die absolute Elasticität und Festigkeit oder die Elasticität und Festigkeit beim Zug.

a). Die Elasticität des Zuges.

Frage 8. Wenn zeigt sich die Elasticität fester Körper am ersten und welchen Zweck hatten zunächst die hierüber vielfach angestellten Versuche?

Antwort. Die Elasticität der festen Körper zeigt sich zuerst, wenn man dieselben nach ihrer Länge ausdehnt. Die hierüber angestellten vielfachen Versuche hatten zunächst entweder den Zweck, die absolute Festigkeit der verschiedenen Körper, also das Maximum oder höchste desjenigen Gewichts zu bestimmen, welches sie zu tragen vermögen, ohne zu zerreissen, oder man hat

Erkl. 11. Giebt man dem zu untersuchenden Körper eine senkrechte Lage, so können die spannenden Gewichte unmittelbar an diesen Körper angehangen werden, und sie geben dann unmittelbar die Grösse der Zugkraft des Körpers an. Um aber nicht mit zu grossen Gewichten experimentieren zu müssen, zieht man

es vor, die Gewichte mittels ungleicharmiger Hebel auf den Körper wirken zu lassen, wobei dieselben immer an dem langen Arm (a) wirken, während das eine Ende des zu untersuchenden Körpers vom kürzeren Arm (b) ergriffen wird. Durch Multiplikation des Gewichts G mit dem Armverhältnis $\frac{a}{b}$ ergiebt sich dann leicht die entsprechende Zugkraft

$$P = \frac{a}{b} G$$

Auch wendet man mit Vorteil, namentlich zur Erzeugung bedeutender Zugkräfte, anstatt der Gewichte sog. hydraulische Pressen an.

gesucht, in Bezug auf die Elasticität diejenige Last aufzufinden, durch welche sie nicht weiter ausgedehnt werden, als dass sie sich bei nachlassender Dehnung wieder zu ihrem ursprünglichen Volumen zusammenziehen.

Frage 9. Wie verfährt man im allgemeinen, um durch Experiment die Grösse der Ausdehnung eines Stabes beobachten zu können?

Erkl. 12. Da bei stärkeren Spannungen die Ausdehnung nicht sofort oder momentan, sondern erst nach Verlauf einer längeren Zeit einen gewissen Wert annimmt, so ist es erwünscht, bei dem in der nebenstehenden Antwort angegebenen Verfahren erst mehrere Minuten oder nach Befinden einige Stunden Zeit vor Abnahme der Gewichte vergehen zu lassen.

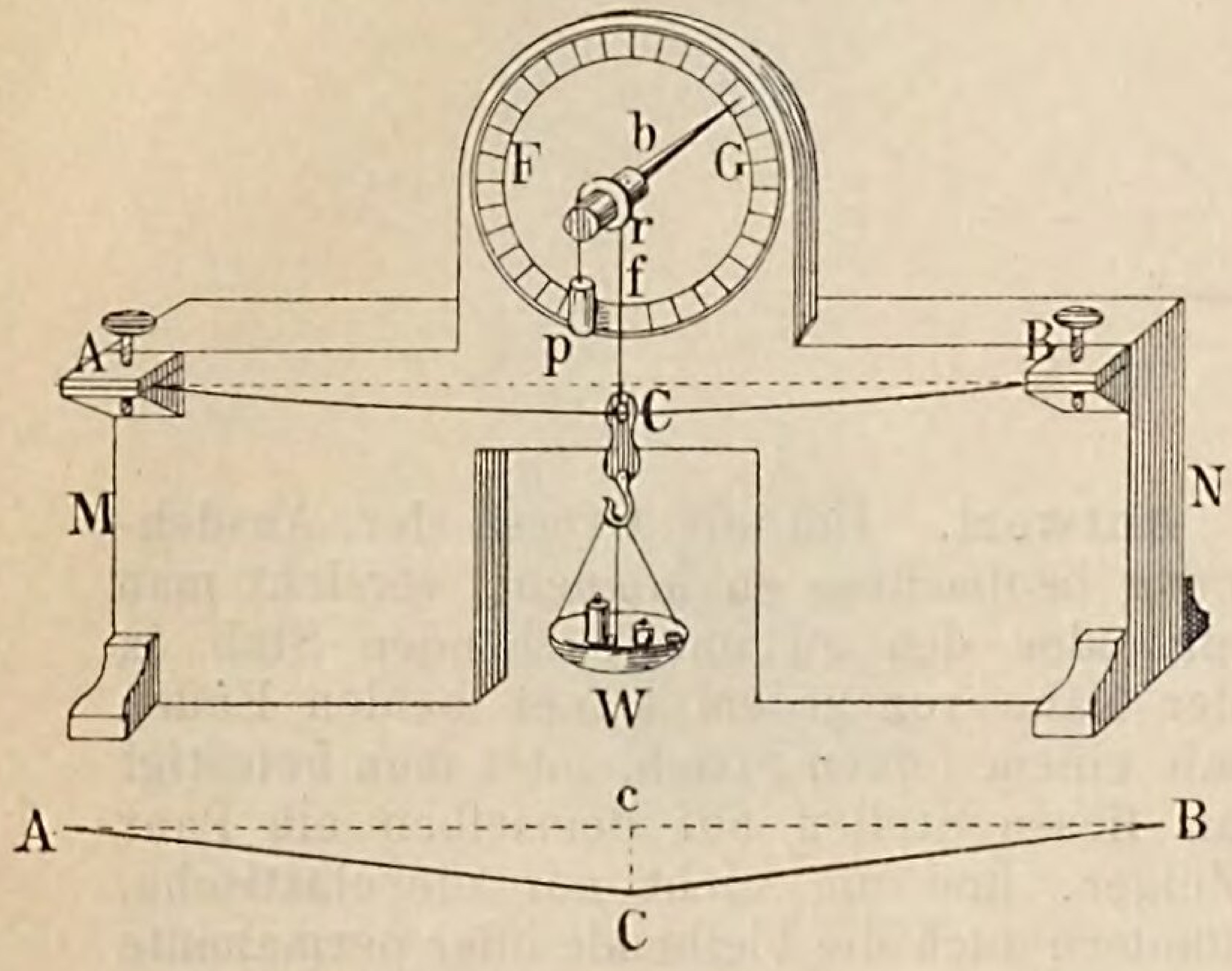
Antwort. Um die Grösse der Ausdehnung beobachten zu können, versieht man entweder den zu untersuchenden Stab in der Nähe von jedem seiner beiden Enden mit einem feinen Strich, oder man befestigt an diesen Stellen auf demselben ein Paar Zeiger, und um nicht nur die elastische, sondern auch die bleibende oder permanente Ausdehnung zu ermitteln, misst man die Entfernung dieser Striche oder Zeiger von einander nicht allein vor dem Auflegen und während des Aufliegens eines Gewichts, sondern auch nach erfolgter Abnahme desselben. Die Ausmessung dieser Entfernung erfolgt entweder durch einen Stangenzirkel oder mittels einer unmittelbar am Stab hinlaufenden Einteilung. (Siehe die nachfolgend beschriebenen Methoden.)

Frage 10. Welches sind die vorzüglichsten Untersuchungen über die Gesetze der Elasticität bei der Spannung der Körper nach ihrer Länge?

Antwort. Von den eigentlichen Untersuchungen über die Gesetze der Zugelasticität sind die vorzüglichsten die von *s'Gravesandé* mit Metallsaiten und die von *Wertheim* mit Metallstäben angestellten Ausdehnungsversuche, bei denen die belastenden Gewichte unmittelbar an dem zu untersuchenden Körper befestigt wurden, sowie diejenigen Experimente, welche *Gerstner* und später *Brix* und *Lagerhjelm* zur Ermittelung der Ausdehnung und Elasticität des Eisendrahts ausführte und bei denen die Gewichte nicht unmittelbar, sondern durch Hebelvorrichtungen auf den zu untersuchenden Körper wirkten. Dasselbe gilt von dem Apparat, mit welchem *Fairbairn* seine Festigkeitsversuche angestellt hat.

Frage 11. Um die Verlängerung zu messen, welche Drähte erfahren, wenn sie durch Gewichte innerhalb ihrer Elasticitätsgrenze gespannt werden, welche also weder zerreissen, noch eine merkliche bleibende Verlängerung erfahren, wandte *s'Gravesandé* (und später andere Physiker) welche Methode an?

Figur 9.



Erkl. 13. Ausser aus der Reibung der Rolle geht bei dem in nebenstehender Antwort beschriebenen Verfahren eine Ungenauigkeit daraus hervor, dass der Draht in der Mitte keinen scharfen Winkel, sondern eine Krümmung bildet, was auf die Bestimmung von h und L_1 nicht ohne Einfluss ist. Deshalb ist *Wertheim*, dem man die zahlreichsten neueren Bestimmungen zu danken hat, wieder zu dem einfachsten und direktesten Verfahren zurückgekehrt, welches in der Antw. auf Frage 12 beschrieben ist.

Erkl. 14. Aus den Versuchen von *s'Gravesandé* über Saiten, welche an beiden Enden befestigt sind, alsdann angezogen werden und pendelartig schwingen, folgt, dass die Schwingungen isochronisch, d. h. in gleichen Zeiten erfolgen, wie gross auch der durchlaufene Bogen sein mag. Sind die Saiten ähnlich und gleich gespannt, aber von ungleicher Länge, so verhalten sich die Schwingungszeiten wie die Längen; sind sie übrigens gleich, aber von ungleicher Dicke, so verhalten sich die Zeiten wie die Durchmesser.

Nennt man daher allgemein bei zwei gleichartigen Saiten P und p die spannenden Kräfte, L und l die Längen, D und d die Durchmesser, T und t die Schwingungszeiten, so ist:

$$\frac{L^2 D^2}{T^2 P} = \frac{l^2 d^2}{t^2 p}$$

Indem ferner bei Saiten ihre Massen und somit auch ihre Gewichte sich verhalten wie die Produkte ihrer Längen in die Quadrate ihrer Durchmesser, also, wenn ihre Gewichte G und g heissen:

Antwort. *s'Gravesandé* prüfte die elastische Verlängerung der Drähte, indem er den Draht oder die Metallsaite zwischen zwei Klemmen vermittelst der Schrauben A und B (siehe Fig. 9) horizontal so stark spannte, dass der Draht eine gerade Linie bildete. Wird eine solche Saite AB dann in der Mitte mit einem Gewicht belastet, so verlängert sie sich und nimmt die Gestalt ACB an, und diese Verlängerung kann gemessen werden, wenn man die Sehne Cc kennt. Zu diesem Ende schob s'Gravesandé auf die Mitte der Saite ein kleines Kupferblech, durch dessen oberes Löchelchen die Saite gezogen war, am unteren Ende hing aber mittels eines Häkchens die kleine Wagschale W, welche mit verschiedenen Gewichten beschwert die Saite tiefer herabdrückte. Um das kleine Blech nebst der Wagschale W zu balancieren, war am oberen Ende des ersteren ein feiner Faden f angebracht, über die Rolle r geschlungen, und durch das Gegengewicht p balanciert. An der Rolle war zugleich der in seinem Schwerpunkt genau balancierte Zeiger b befestigt, welcher mit seiner Spitze die Grade auf dem geteilten Kreis FG durchlief, und dadurch anzeigte, wie tief die Wagschale mit verschiedenen Gewichten beschwert herabgesunken war, welches die Grösse cC angab. Damit diese Messung genau wird, zieht man nach Wegnahme der Saite AB die Wagschale W soweit herab, dass sie den Boden genau berührt, beobachtet den Stand des Zeigers, legt unter die aufgehobene Wagschale einen Körper von genau gemessener Dicke, bringt sie mit diesem wieder in Berührung, und zählt die vom Zeiger durchlaufenen Grade.

Hat man auf diese Weise die Senkung $cC = h$ ermittelt, welche unter der Belastung Q entstand, indem die ursprüngliche Länge $AB = L$ zu $ACB = L_1$ wurde, so folgt aus der Fig. 9 nach dem pythagor. Lehrsatz:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{Ac}^2 + \overline{Cc}^2}$$

oder:

$$\frac{1}{2} L_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} L\right)^2 + h^2}$$

oder:

$$L_1 = 2 . \sqrt{\frac{1}{4} L^2 + h^2}$$

oder:

$$G : g = L D^2 : l d^2$$

so ist auch:

$$\frac{L G}{T^2 P} = \frac{l g}{t^2 p}$$

oder:

$$T^2 : t^2 = \frac{L G}{P} : \frac{l g}{p}$$

d. h. die Quadrate der Schwingungszeiten verhalten sich wie die Produkte der Längen in die Gewichte und umgekehrt wie die spannenden Kräfte

Bei elastischen Blechen und Streifen finden die nämlichen Gesetze statt, weil man sie als vereinigte Saiten ansehen kann.

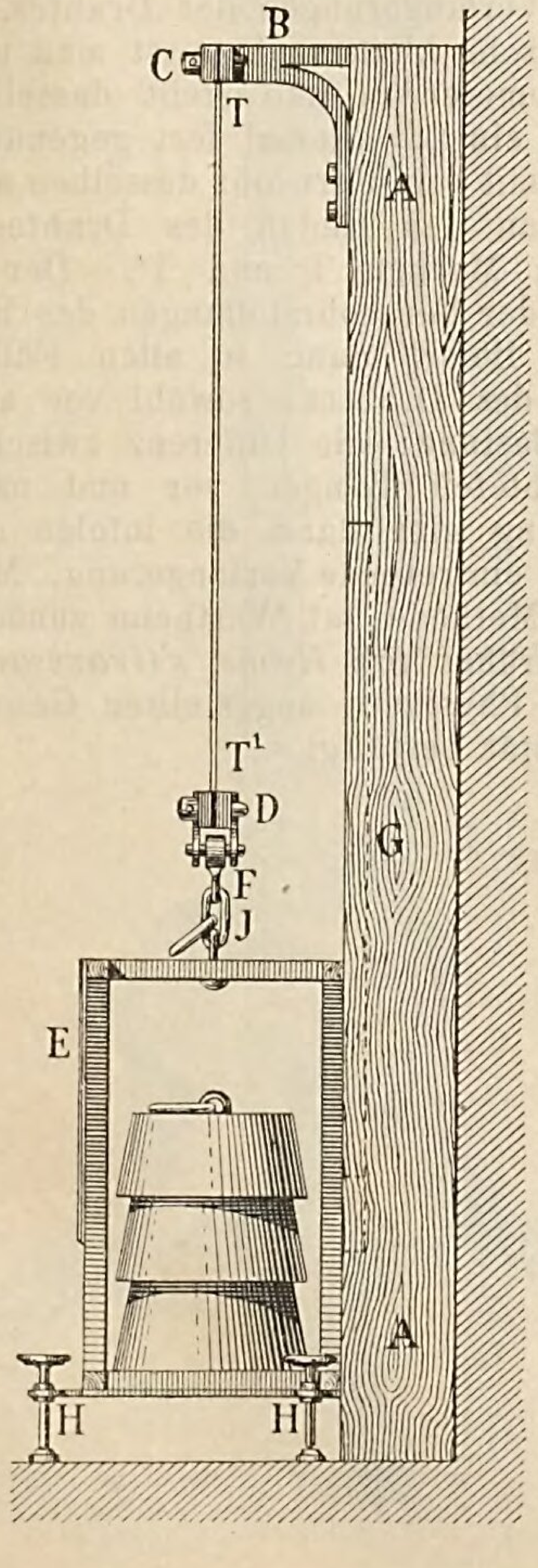
$$L_l = \sqrt{L^2 + 4h^2}$$

und hieraus ergibt sich die Verlängerung:

$$\lambda = L_l - L$$

Frage 12. Da die von *s'Gravesandé* angewandte Methode für dickere Drähte und für Stäbe nicht mehr möglich ist und auch aus dem in Erkl. 3 angegebenen Grund wandte *Wertheim* welches Verfahren an, um die Verlängerung der Stäbe zu messen?

Figur 10.



Antwort. *Wertheim* fand es am zweckmässigsten, die Verlängerung direkt zu messen und zwar auf folgende Weise:

Er befestigte an einer festen Mauer ein Kniestück von sehr starkem Eisen B (Fig. 10), welches in einer ebenen senkrechten Fläche von gehärtetem Stahl, gestreift wie eine Feile endete, gegen welche eine Platte, ebenfalls von Stahl und an der einen Seite ebenso gestreift, passt und mittels Schrauben C angedrückt werden kann. Diese beiden Stücke dienen als Backen eines starken Schraubstocks, und zwischen ihnen wird der Draht, dessen Elasticität man untersuchen will, durch einen sehr starken Druck befestigt.

An dem unteren Ende des Drahtes wird mittels einer gleichen schraubstockartigen Vorrichtung ein Haken befestigt und an diesen eine Wagschale E angehängt, welche die ziehenden Gewichte aufnimmt. Sind die Gewichte hinreichend schwer, so dehnt sich der Draht merklich aus, verkürzt sich aber wieder zu seiner früheren Länge, wenn man die Gewichte fortnimmt. Zur Messung der Verlängerung bedarf es gewisser Vorsichtsmassregeln.

Wenn man die Gewichte in die Wagschale sehr rasch einsetzt, so erteilt man dem Apparat Stösse, durch welche man den Draht zerreissen kann. Um diese zu vermeiden, ist die Wagschale mit drei langen Fussstellschrauben HH versehen, welche man vor Beginn des Versuches so weit hinabschraubt,. dass sie den Boden berühren und somit die Wagschale tragen; dann wird die Schale belastet, und dann erst hebt man die Schrauben sehr langsam, um allmählich das

Erkl. 15. Die wichtigsten Resultate der Versuche *Wertheim's* sind in folgender Tabelle für Drähte von 1 Quadratmillimeter Querschnitt zusammengestellt:

	angelassen					gezogen
	D	ε	E			E
			15°	100°	200°	
Blei	11,232	0,00057904	1727	1630	—	1803
Gold	18,035	0,00017905	5585	5408	5482	8131
Silber	10,304	0,00014004	7141	7274	6374	7357
Zink	7,060	—	—	—	—	8734
Palladium	11,225	0,00010216	9789	—	—	11759
Kupfer	8,936	0,00009507	10519	9827	7862	12449
Platin	21,083	0,00006444	15518	14178	12964	17044
Stahldraht (engl.)	7,622	0,00005788	17278	21292	19278	18809
Gussstahl	7,919	0,00005112	19561	19014	17926	19549
Eisen (Berry)	7,757	0,00004809	20794	21877	17700	20869

Dieselbe enthält 1). unter D die Dichte oder das spez. Gew. des Metalls bei 15° C.; 2). unter ε den Koeffizient der elast. Ausdehnung (Elasticitätskoeffizient); 3). unter E den Elasticitätsmodulus $= \frac{1}{\varepsilon}$ für 15°, 100° und 200° auf Kilogramm bezogen, und zwar im angelassenen, d. h. möglichst homogenen Zustand; 4). die Werte von E für frisch gezogenen Draht, der durch den Drahtzug eine oberflächliche Verdichtung erhielt.

Die stärkste Elasticität haben Eisen und Stahl, eine gegen 11 mal grössere als das Blei. Bei allen Metallen wächst sie durch den Drahtzug, doch nur sehr wenig beim Eisen und Stahl; beim Kupfer dagegen um $^1/_5$, beim Gold sogar um $^2/_5$. Erwärmung vermindert in der Regel die Elasticität; bei Eisen, Stahl und Silber indes zeigt sich anfangs eine Vermehrung und erst bei 200° (bei Stahldraht auch da nicht) eine deutliche Verminderung. Uebrigens ändert sich der Koeffizient durch jede mechanische oder chemische Veränderung des Metalls.

Von Metalllegierungen verdienen folgende erwähnt zu werden:

		D	E
Messing	($Zc\,Cu_2$)	8,606	8543
Tombak	($Zc\,Cu_5$)	8,655	9277
Neusilber	($Zc_4\,Cu_{18}\,Ni_5$)	8,541	10788
Packfong	($Zc_5\,Cu_6\,Ni_3$)	8,436	11500

Der Koeffizient der Legierungen war nahe das aus den Koeffizienten der Bestandteile berechnete Mittel, mochte die Verbindung von einer Kontraktion oder Dilatation (Vermehrung oder Verminderung des spezifischen Gewichts) begleitet sein.

Erkl. 16. Ein Kathetometer ist ein von *Dulong* und *Petit* erfundener Apparat zu Messungen geringer Höhenunterschiede zweier Punkte (wie z. B. der Oberflächen zweier kommunizierender Quecksilbersäulen) aus der Ferne, bestehend aus einem Fernrohr, welches an einem genau senkrecht aufgestellten Massstab auf- und abgeschoben, sowie in einer horizontalen Ebene gedreht werden kann. Man stellt das Fernrohr auf die

Gewicht seine ziehende Wirkung ausüben zu lassen. Dabei hat man keine Stösse zu befürchten. Bei der Beobachtung hat man sich dann noch vor einem leicht zu begehenden Irrtum zu schützen. Wählt man nämlich feine Drähte, so sind diese stets an vielen Stellen gebogen und gekrümmt. Ein Anhängen der Gewichte bewirkt nun zunächst ein Geradestrecken und dadurch scheinbar ein Verlängern des Drahtes. Um diese Täuschungen zu vermeiden, ist es notwendig, anfänglich ein kleines Gewicht in die Schale zu legen, welches hinreicht, den Draht gerade zu machen und dann erst allmählich die Schale stärker zu belasten. Von da an zählt man dann auch erst die Gewichte.

Die Verlängerungen des Drahtes, welche immer sehr klein sind, misst man mit dem Kathetometer[1]); man stellt dasselbe dem Drahte ein für allemal fest gegenüber und visiert mit dem Fernrohr desselben auf zwei feine, an den Enden des Drahtes angebrachte Marken T und T'. Der Unterschied der Fernrohrstellungen des Kathetometers liefert dann in allen Fällen die Länge des Drahtes, sowohl vor als nach der Belastung; die Differenz zwischen den beobachteten Längen vor und nach der Belastung gibt dann die infolge der Belastung eintretende Verlängerung. Mit Hilfe dieser Methode hat Wertheim zunächst die schon früher von *Hooke*, *s'Gravesandé* und andern Physikern angestellten Gesetze der Elasticität bestätigt.

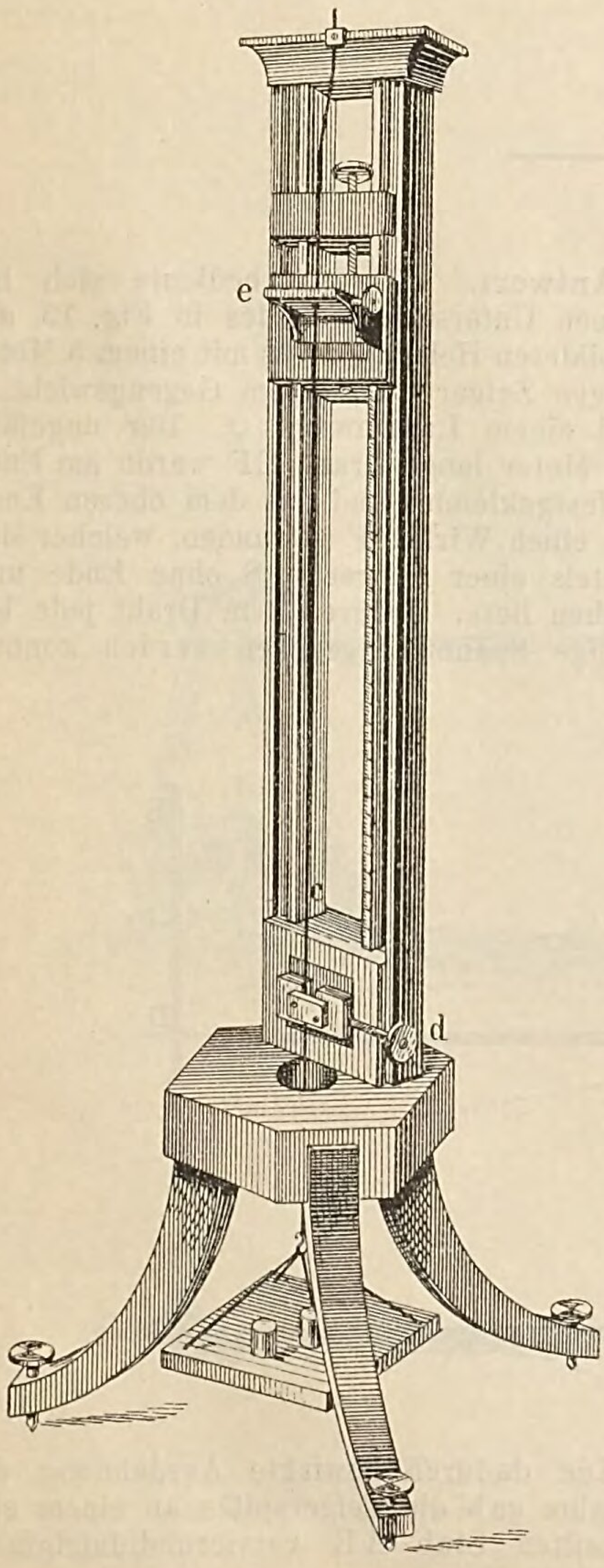
[1]). Siehe Erkl. 16.

beiden Punkte ein und liest mittels eines kleinen Hilfsmassstabes (Nonius) und einer Lupe an dem Massstab die entsprechenden Höhen ab, aus welchen sich der gesuche Höhenunterschied ergiebt. (Siehe Lehrb. der Allgemeinen Eigenschaften der Körper.)

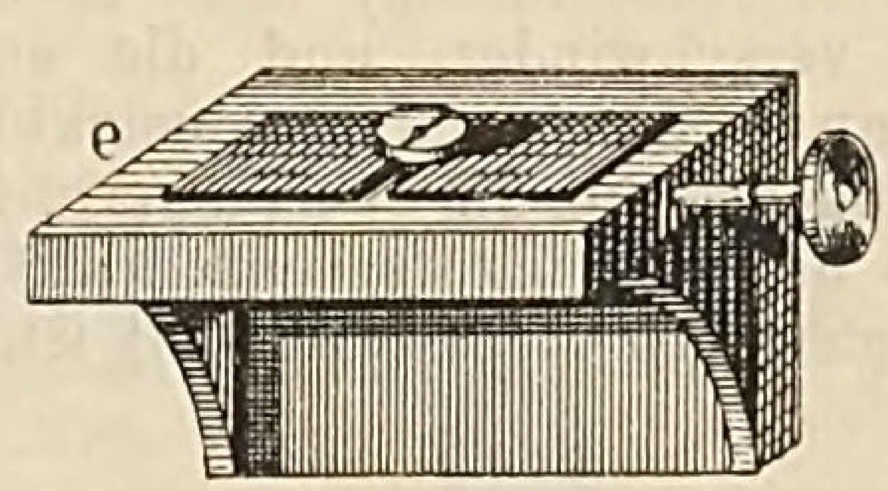
Frage 13. Wie verfährt man bei der vorstehend beschriebenen Methode, um einen Stab von bestimmter Länge auf sein Verhalten zu prüfen, wenn diese Länge nicht ohne weiteres zwischen den Klemmschrauben abzugrenzen ist?

Antwort. Um eine bestimmte Stablänge auf ihr Verhalten zu prüfen, ist es nicht notwendig, gerade diese Länge zwischen den Klemmschrauben abzugrenzen, was in vielen Fällen umständlich werden könnte, es genügt vielmehr zu diesem Zweck, den gewählten Abstand auf dem vielleicht viel längeren Draht oder Stab durch zwei feine Farbenstriche oder sonst wie genau zu bezeichnen. (Der Grund der Richtigkeit dieses Verfahrens ergiebt sich aus dem folgenden ersten Gesetz sowie aus Erkl. 17).

Figur 11.



Figur 12.



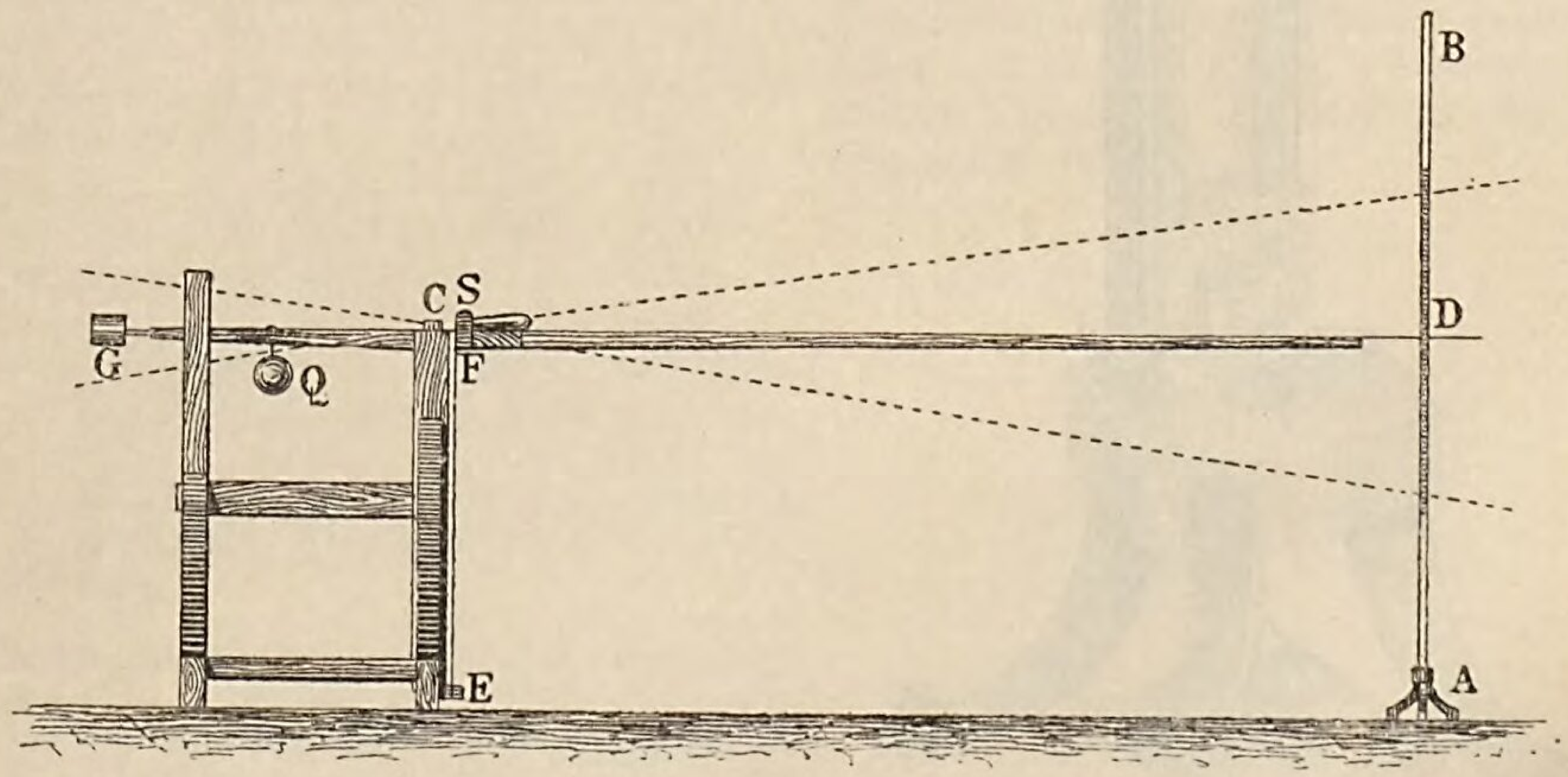
Erkl. 17. Ein vorzüglich geeigneter Apparat, um die Dehnbarkeit dünner Drähte zu untersuchen, ist *W. Weber's* sogenanntes Monochord (vom griech. monos = einzig und chordē = die Saite, also ein Instrument mit einer einzigen Saite), dessen Einrichtung und Gebrauch nach dem Vorausgegangenen wohl keiner näheren Beschreibung mehr bedarf. Nur sei hier noch bemerkt, dass die untere verrückbare Klemme (siehe Fig. 11) vor Beginn eines jeden Versuchs oder bei Unterbrechung desselben in ihrer Führung mittels der Schraube *d* festgestellt werden kann, wodurch die Leitung der Versuche ungemein erleichtert und unabsichtliches Zerreissen der Drähte verhütet wird. Die obere verschiebbare Klemme *e* ist zum besseren Verständnis ihrer Einrichtung in Fig. 12 besonders und in grösserem Massstab gezeichnet. Man erkennt leicht, dass der zu spannende Draht ohne Quetschung darin aufgenommen und festgehalten werden kann.

Frage 14. Welches Verfahren wandte *Gerstner* bei seinen gründlichen Untersuchungen über die Ausdehnung und Elasticität des Eisendrahts an?

Erkl. 18. Durch seine Versuche wies *Gerstner* nach, dass jede Ausdehnung die Summe von zwei Ausdehnungen ist, wovon die eine (die elastische Ausdehnung) nach Abnahme des Gewichts verschwindet, und die andere (die permanente Ausdehnung) zurückbleibt, und dass infolgedessen die Verlängerung λ sogar innerhalb der Elasticitätsgrenze nicht genau der spannenden Kraft P proportional ist.

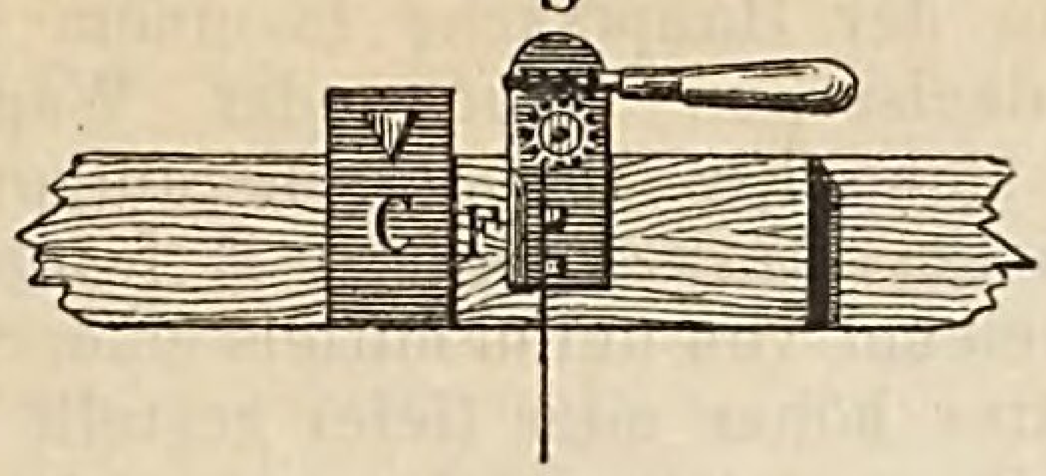
Antwort. *Gerstner* bediente sich bei seinen Untersuchungen des in Fig. 13 abgebildeten Hebelapparats mit einem 5 Meter langen Zeiger CD, einem Gegengewicht G und einem Laufgewicht Q. Der ungefähr 1,3 Meter lange Draht EF wurde am Ende E festgeklemmt und mit dem oberen Ende um einen Wirbel F gewunden, welcher sich mittels einer Schraube S ohne Ende umdrehen liess, wodurch dem Draht jede beliebige Spannung gegeben werden konnte.

Figur 13.



Die dadurch bewirkte Ausdehnung des Drahts gab die Zeigerspitze an einem eingeteilten Stab AB vervierundfünfzigfacht

Figur 14.

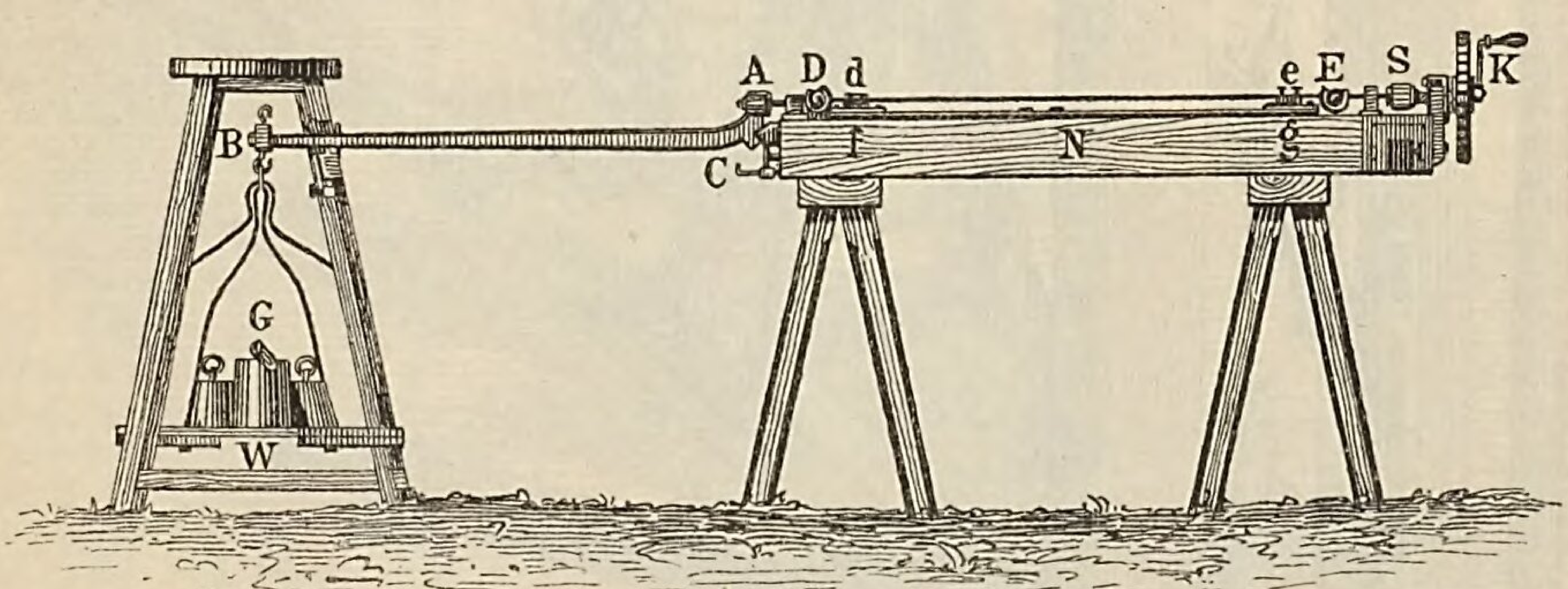


an. Die schneidige Achse C des Hebels sowie der Wirbel F, um welche das obere Ende des Drahts gewunden war, und die Schraube ohne Ende S zum Umdrehen des Wirbels sind in Fig. 14 in grösserem Massstabe besonders abgebildet.

Frage 15. Welches Verfahren brachten *Lagerhjelm* und *Brix* bei ihren ausgedehnten Versuchen über die Elasticität nnd Festigkeit des Schmiedeeisens und Eisendrahts zur Ausführung?

Antwort. Beide Experimentatoren wendeten zu ihren Versuchen einen Winkelhebel ACB (siehe Fig. 15) an, dessen längerer Arm CB von dem auf eine Wagschale W aufgelegten Gewicht G abwärts gezogen wurde, wodurch der am kürzeren Arm CA angeschlossene Eisenstab oder Draht DE beliebig gespannt werden konnte. Bei dem Apparate von *Brix* betrug das Hebelarmverhältnis $\frac{CA}{CB} = \frac{1}{20}$, und es war hier das eine Drahtende D mittels Kluppe, Haken und Bolzen an den Arm CA und das andere Ende E auf gleiche Weise an eine Schraube S befestigt, welche durch eine Kurbel K und mittels eines Räderwerks in Umdrehung gesetzt werden konnte.

Figur 15.

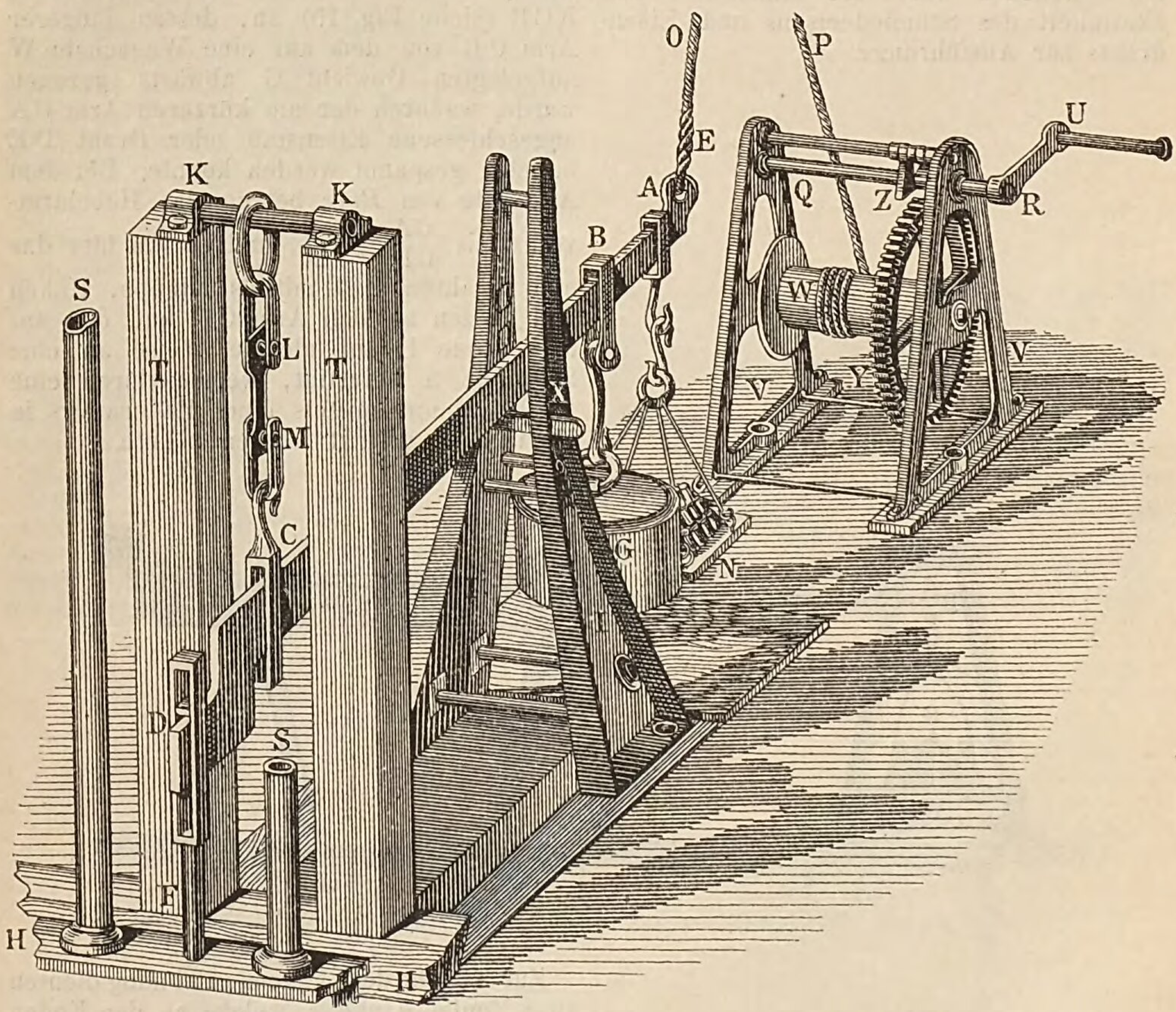


Zur Angabe der Längenausdehnung dienten zwei Nonien *d* und *e*, welche an den Enden auf den Draht aufgeschraubt wurden und über zwei in Viertellinien eingeteilte Skalen *fg* hinliefen. Nachdem man den Draht in den Kluppen eingeklemmt hatte, wurde die Wagschale nach und nach mit grösseren Gewichten beladen, und bei jedem einzelnen Versuche durch Drehung der Kurbel K des Räderwerks der Draht so gespannt, dass sich der Hebel von seiner Unterstützung erhob, und sich so die Spannung des Drahts mit dem Gewicht G ins Gleichgewicht setzte.

Frage 16. Wie ist der Apparat eingerichtet, mit welchem *Fairbairn* seine Festigkeitsversuche angestellt hat?

Antwort. Der Apparat, womit *Fairbairn* seine Festigkeitsversuche angestellt hat, besteht in der Hauptsache in einem starken schmiedeeisernen Hebel oder Wagbalken ACD, siehe Fig. 16, dessen Stützpunkt D von einem starken Bolzen F festgehalten wird, welcher von unten mittels einer Schraubenmutter höher oder tiefer gestellt werden kann. Zwei eiserne Säulen geben dem Fussstück HH, durch welches F hindurchging, den nötigen Widerstand.

Figur 16.



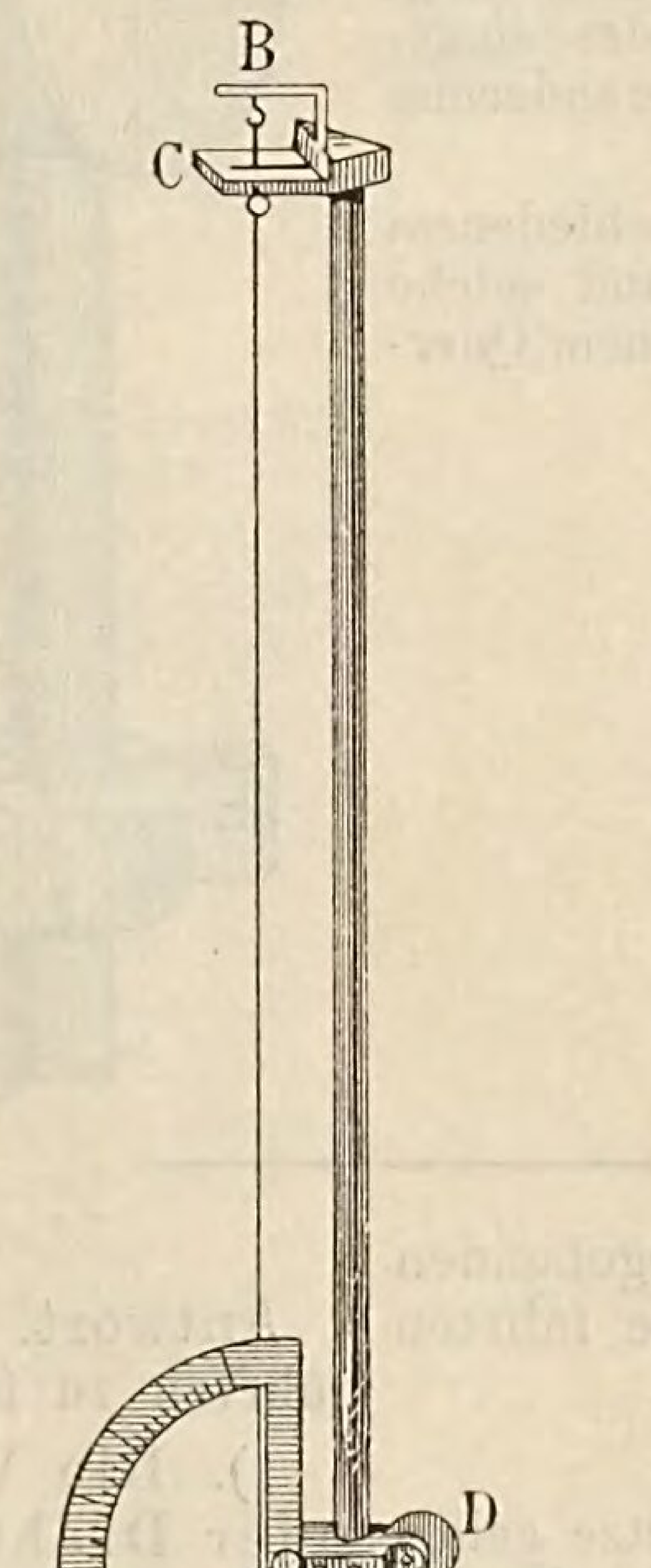
Das zu untersuchende Eisenstück LM war mittels einer Kette an dem auf den Säulen TT ruhenden Träger KK aufgehangen und durch Bolzen und Ringe mit der Scheere C des Wagebalkens ACD verbunden. An dem langen Arm des letzteren hing nicht bloss ein grösseres konstantes Gewicht G, sondern auch eine Wagschale N zur Aufnahme kleinerer Gewichte; zur Unterstützung des Hebels von unten diente der Bolzen X, und zum Aufheben desselben ein Seil OP, welches oben

über eine Leitrolle lief und sich unten auf die Welle W einer Winde U Y Z wickeln liess. Nach dem Auflegen der Gewichte liess man durch langsames Umdrehen der Kurbel U das Hebelende E allmählich herab, bis endlich das zu prüfende Eisenstück durch G und die Gewichte N allein gespannt wurde.

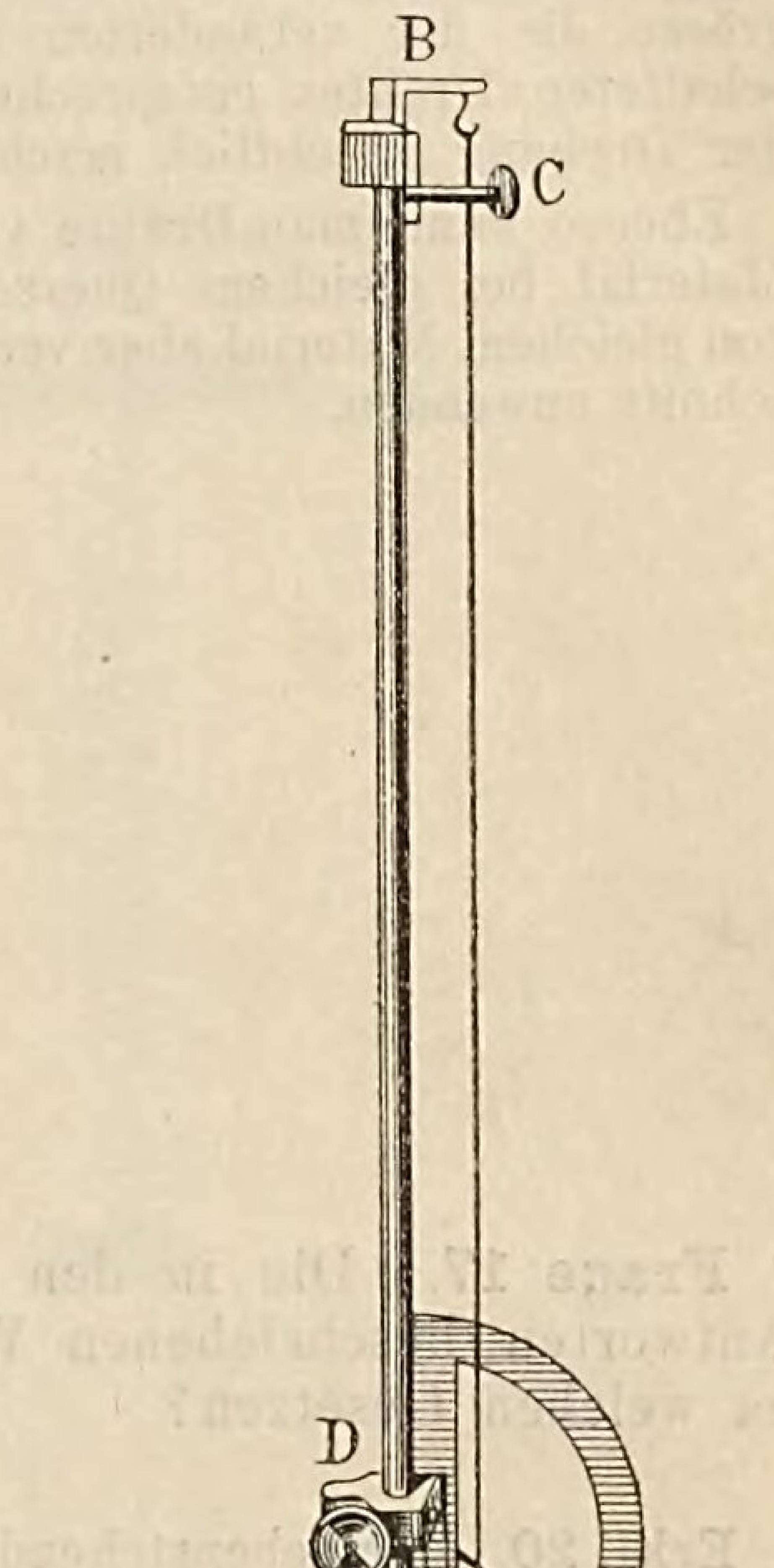
Erkl. 19. Um aber die Gesetze der Zugelasticität im Schulzimmer zu demonstrieren oder zu beweisen und die sich in den einzelnen Fällen ergebenden Verlängerungen auf grössere Entfernungen hin sichtbar zu machen, dürfte der von *V. Pierre* konstruierte Apparat am geeignetsten erscheinen, welcher durch die nebenstehenden Figuren 17, 18 u. 19 veranschaulicht und von *V. Pierre* wie folgt beschrieben wird:

Auf einem dreifüssigen Gestell erhebt sich die vertikale Säule AB, welche bei B eine Klemmvorrichtung C trägt, um das obere Ende eines in das Häkchen bei B eingehängten Drahtes zu fixieren (oder festzuhalten). An der Säule lässt sich ein in gleiche Teile geteilter halbkreisförmiger Bogen verschieben und mittels der Klemmschraube D in jeder beliebigen Höhe feststellen. Weiter ist in derselben Weise der einarmige Hebel $F F_1$ an der Säule verschiebbar und durch die Klemmschraube E festzustellen. Das untere Ende des Drahtes wird in ein an dem Ende des kürzeren Hebelarms befindliches Häkchen *a* eingehängt, während das auf dem längeren Arm verschiebbare Laufgewicht von $^1/_2$ kg die Spannung des Drahtes bewirkt. Durch Senken der Klemmvorrichtung E kann man es immer dahin bringen, dass der Hebelarm bei jeder Belastung horizontal gerichtet ist. Um eine bestimmte Drahtlänge einzuspannen, wird, wie in Fig. 19 dargestellt ist, eine Klemme G angewendet, an welcher eine feine Schnur befestigt, über die Rolle β geführt und durch das Gewicht γ gespannt ist. An der Achse dieser Rolle ist ein Zeiger aufgesteckt, aber nicht festgemacht, damit man ihn später auf jedem beliebigen Teilstrich des vorerwähnten Kreisbogens einstellen kann. Hat man nun eine Drahtlänge von 1 m zwischen C und G unter einem bei *a* wirkenden Zug von 1 kg eingespannt (vorausgesetzt, dass der Auf-

Figur 17.



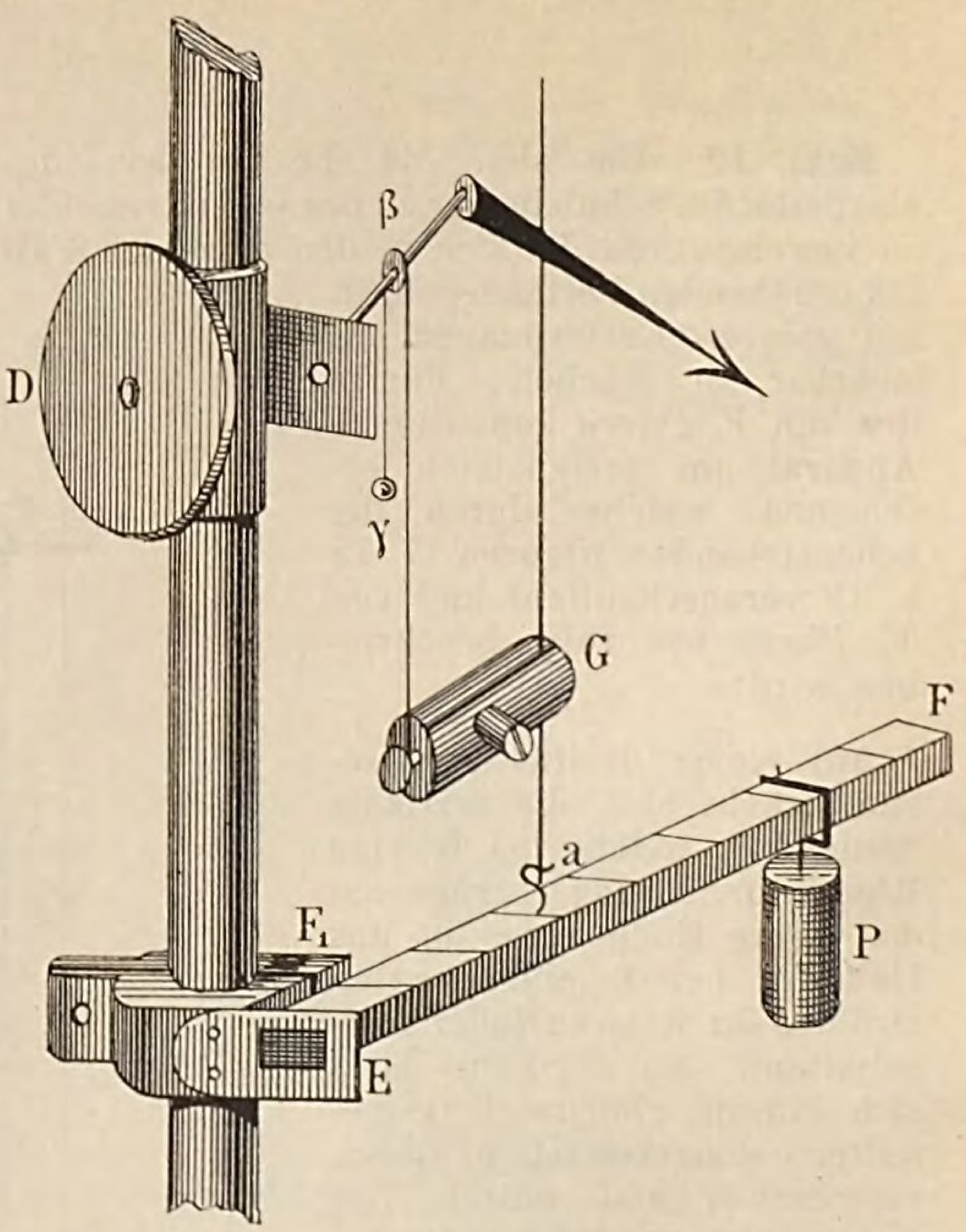
Figur 18.



hängepunkt a sich genau in der Mitte zwischen dem Befestigungspunkt F_1 des Hebels und dem Angriffspunkt der Last P befindet) und dabei den Zeiger auf den Nullpunkt der Bogenteilung eingestellt, so lassen sich die Verlängerungen bei jeder Zugvermehrung an der betreffenden Zeigerbewegung auch in grösserer Entfernung leicht verfolgen. Durch Oeffnen der Klemmen D und G und Höherstellen derselben, wodurch z. B. nur die halbe Länge des Drahtes eingeschaltet ist, kann man bei unveränderter Zuggrösse die der veränderten Länge des eingeschalteten Drahtes entsprechende Veränderung der Drehung ersichtlich machen.

Ebenso kann man Drähte von verschiedenem Material bei gleichem Querschnitt und solche von gleichem Material aber verschiedenem Querschnitt anwenden.

Figur 19.



Frage 17. Die in den vorhergehenden Antworten beschriebenen Versuche führten zu welchen Gesetzen?

Antwort. Die vorerwähnten Versuche führten zu folgenden vier Gesetzen:

1). Die Verlängerung eines Stabes oder Drahtes ist den spannenden Gewichten proportional und die Stange nimmt bei Wegnahme der Belastung ihre ursprüngliche Länge wieder an, d. h. ein 2-, 3-, nmal so grosses Gewicht erzeugt eine 2-, 3-, nmal so grosse Verlängerung.

2). Die durch ein und dasselbe Gewicht hervorgebrachte Verlängerung verschieden langer Stäbe oder Drähte ist proportional ihrer ursprünglichen Länge, d. h. eine 3-, 4- oder nmal so lange Stange wird 3-, 4- oder nmal so stark verlängert als eine im übrigen gleiche Stange von einfacher Länge.

3). Die durch dasselbe Gewicht bewirkte Verlängerung gleich langer aber verschieden dicker Drähte oder Stäbe aus demselben Material ist umgekehrt proportional dem Querschnitt derselben, d. h. eine Stange von 3-, 4- oder nfachem Querschnitt erleidet ein $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{n}$ der Verlängerung, welche eine Stange von einfachem Querschnitt erfährt.

Erkl. 20. Die nebenstehenden Gesetze gelten nur für den Fall, dass die Querschnitte des gezogenen Stabes untereinander kongruent sind, dass das Material durchgehends gleiche Dichte und Festigkeit hat, dass die Richtung der geometrischen Achse ununterbrochen dieselbe ist und mit der einwirkenden Kraft parallel läuft und endlich, dass die Elasticiätsgrenze nicht überschritten wird. Da Spannungen, d. h. Belastungen, welche die Elasticitätsgrenze überschreiten, in praktisch ausgeführten Bau- oder Maschinenkonstruktionen nicht vorkommen dürfen, so ist es zulässig, bei der Berechnung solcher Konstruktionen das nebenstehende erste Gesetz der Proportionalität zwischen Spannungen und Verlängerungen (Elasticitätsgesetz) als allgemein giltig anzunehmen.

Siehe dasjenige Lehrbuch dieser Encyklopädie, welches die „Allgem. Eigenschaften der Körper“ behandelt.

Erkl. 21. Zu dem nebenstehenden zweiten Gesetz sei bemerkt, dass sich die durch die Belastung hervorgerufene Spannung, und infolgedessen auch die Verlängerung, gleichförmig über die ganze Länge der Stange verteilt. Die Verlängerungen der einzelnen Teile verhalten sich wie ihre ursprünglichen Längen. Das Verlängerungsverhältnis oder der Quotient

$$\frac{\text{Verlängerung}}{\text{Ursprüngliche Länge}} \text{ oder } \frac{\lambda}{L}$$

hat daher für jeden einzelnen Teil dieselbe Grösse wie für die ganze Länge und ist unabhängig von der Länge der Stange.

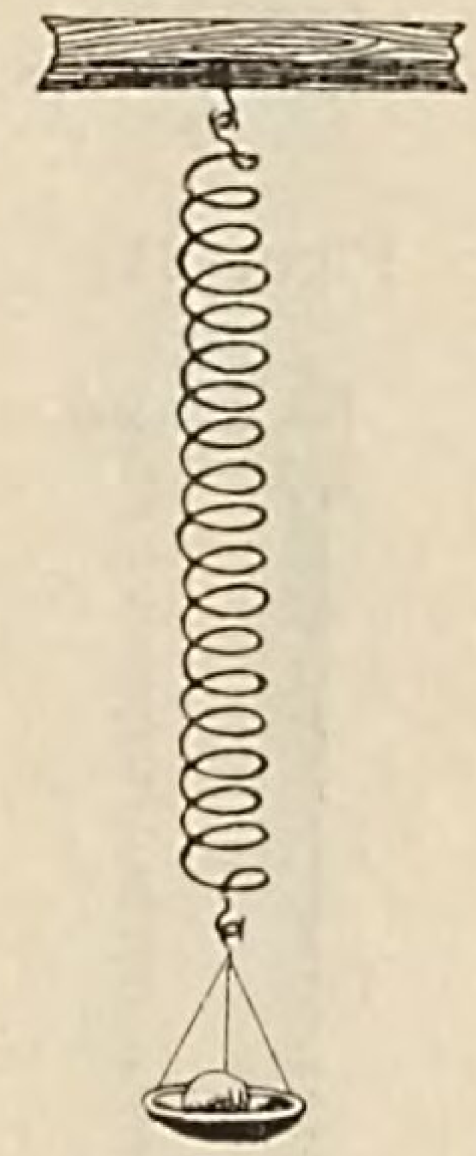
Erkl. 22. Zur Erläuterung des nebenstehenden dritten Gesetzes sei bemerkt, dass man eine Stange von z. B. dreifachem Querschnitt offenbar ansehen kann als ein Bündel von drei einzelnen Stangen, deren jede den einfachen Querschnitt hat und deren jede den dritten Teil des angehängten Gewichts trägt, folglich auch nur den dritten Teil derjenigen Verlängerung erleidet, welche das ganze Gewicht an der einfachen Stange hervorbringen würde.

Erkl. 23. Die nebenstehenden Gesetze können näherungsweise durch elementare Versuche bewiesen werden, indem man Kautschukröhren oder schraubenförmig gewundene Drähte (siehe Fig. 20) anwendet, welche an ihrem oberen Ende befestigt sind und am unteren Ende eine Schale tragen, welche man allmählich mit kleinen Gewichtsstücken belastet. Um während des Versuchs stets die Länge des so gestreckten Körpers ablesen zu können, stelle man hinter demselben einen Massstab so auf, dass sein Nullpunkt gerade hinter den Befestigungspunkt fällt. Die für jedes Gewicht beobachtete Verlängerung kann man aufschreiben und einzeln als Bruchteil der ursprünglichen Länge ausdrücken, um zu erfahren, wie die durch gleiche Gewichtszunahme stufenweise bewirkten Verlängerungen sich verhalten.

Ganz ähnliche Versuche kann man mit langen Menschen- oder Pferdehaaren, mit Coconfäden oder dünnen Metalldrähten anstellen, doch nehmen dieselben viel Zeit in Anspruch.

4). Die Verlängerung hängt ausserdem noch ab von der Art des Materials, aus welchem die Stange besteht. Gleichgeformten Stangen verschiedenen Materials werden durch gleiche Belastungen ungleiche Verlängerungen erteilt. Um dieses ungleiche Verhalten der verschiedenen Arten von festen Körpern durch Zahlenwerte zu charakterisieren, hat man den Beriff des Elasticitätsmodulus eingeführt.

Figur 20.



Frage 18. Bei welchen Vorrichtungen genügt schon eine verhältnismässig kleine Kraft, um die Proportionalität zwischen der Verlängerung und dem spannenden Gewicht nachzuweisen?

Antwort. Bei spiralförmig gewundenen Metalldrähten oder sog. Spiralfedern genügt schon eine verhältnismässig kleine Kraft, um die Proportionalität zwischen der Verlängerung und dem spannenden Gewicht nachzuweisen, wie sich dies z. B. an *Jolly's* Federwage vorzüglich zeigen lässt.

Frage 19. Wie ist *Jolly's* Federwage eingerichtet und wie experimentiert man mit derselben?

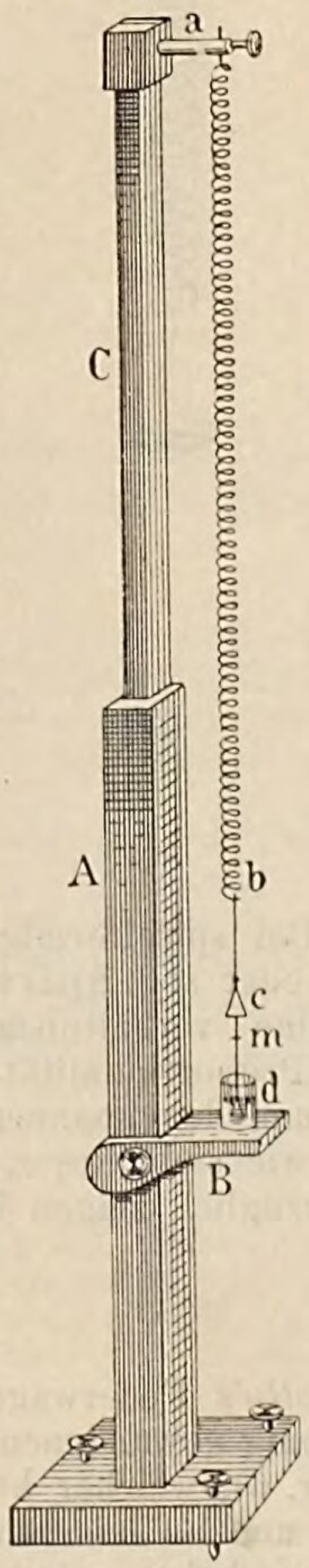
Erkl. 24. Die Wagschale *d*, welche sich an der in nebenstehender Antwort beschriebenen Federwage befindet, ermöglicht eine Benutzung dieses Apparats zur Bestimmung des spezifischen Gewichts kleiner fester Körper. Wird durch die Belastung von 1 g eine Verlängerung von

Antwort. *Jolly's* Federwage besteht aus einem spiralförmig gewundenen Draht (etwa Klaviersaite Nr. 6), welcher bei *a*, Fig. 21, aufgehängt ist und an seinem unteren Ende zwei kleine Wagschalen *c* und *d* trägt, von denen die letztere stets in Wasser eingetaucht ist. Das Glas, welches das Wasser enthält, steht auf einem Träger B, der am

372 Teilstrichen hervorgebracht, so wiegt z. B. ein Körper, welcher auf die Wagschale c gelegt, eine Verlängerung von nur 211 Teilstrichen bewirkt $\frac{211}{372} = 0{,}567$ g. Wird dann derselbe Körper auf die in Wasser eingetauchte Schale c gelegt, und dadurch der Draht auf 180 Teilstriche verlängert, so wiegt der Körper im Wasser $\frac{180}{372} = 0{,}484$ g, hat also einen Gewichtsverlust von $0{,}567 - 0{,}484 = 0{,}083$ g erlitten, und da man das spez. Gewicht eines Körpers im allgemeinen ermittelt, wenn man sein absolutes Gewicht dividiert durch den im Wasser erfahrenen Gewichtsverlust, so ergibt sich in diesem Fall für das spezifische Gewicht des betreffenden Körpers:

$$s = \frac{567}{83} = 6{,}827$$

Figur 21.



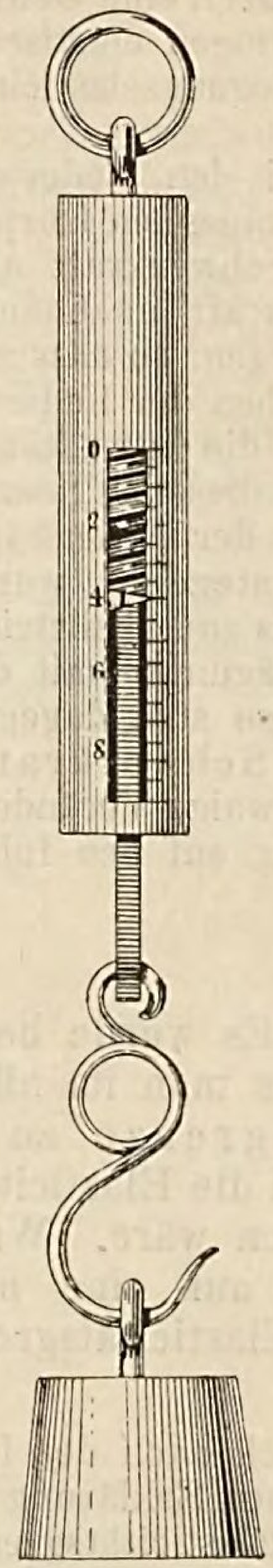
Erkl. 25. Auf demselben Prinzip, welches *Jolly*'s Federwage zu Grunde liegt, beruht auch die Konstruktion der für den alltäglichen Ge-

Stativ A auf- und niedergeschoben werden kann und welcher stets so zu stellen ist, dass d frei im Wasser schwebt. Um die Stellung der Marke m bequem und sicher absehen zu können, ist die am Stativ A angebrachte Teilung auf einen Spiegelstreifen aufgetragen. Um richtig abzulesen, mit welchem Teilstrich der Skala sich m in gleicher Höhe befindet, hat man das Auge in eine solche Stellung zu bringen, dass die Marke m mit ihrem Spiegelbild zusammenfällt.

Bei einer Spirale von 36 Windungen der oben bezeichneten Drahtsorte stellte sich z. B. die Marke m beim Teilstrich 64 ein, als die Wage unbelastet war. Ein Gewicht von 1 Gramm auf die Schale c gelegt machte ein Abwärtsschieben der Platte B nötig, um die Wagschale d im Wasser frei schwebend zu erhalten und zugleich stellte sich die Marke m auf den Teilstrich 436 ein. Die Spirale hatte also durch die Last von 1 Gramm eine Verlängerung von $436 - 64 = 372$ Teilstrichen erfahren. Durch ein Gewicht von $^1/_2$ oder $^1/_{10}$ Gramm erleidet sie eine Verlängerung von 186 resp. 37,2 Teilstrichen und $^1/_{1000}$ g = 1 mg verlängert die Spirale um 0,372 Teilstriche.

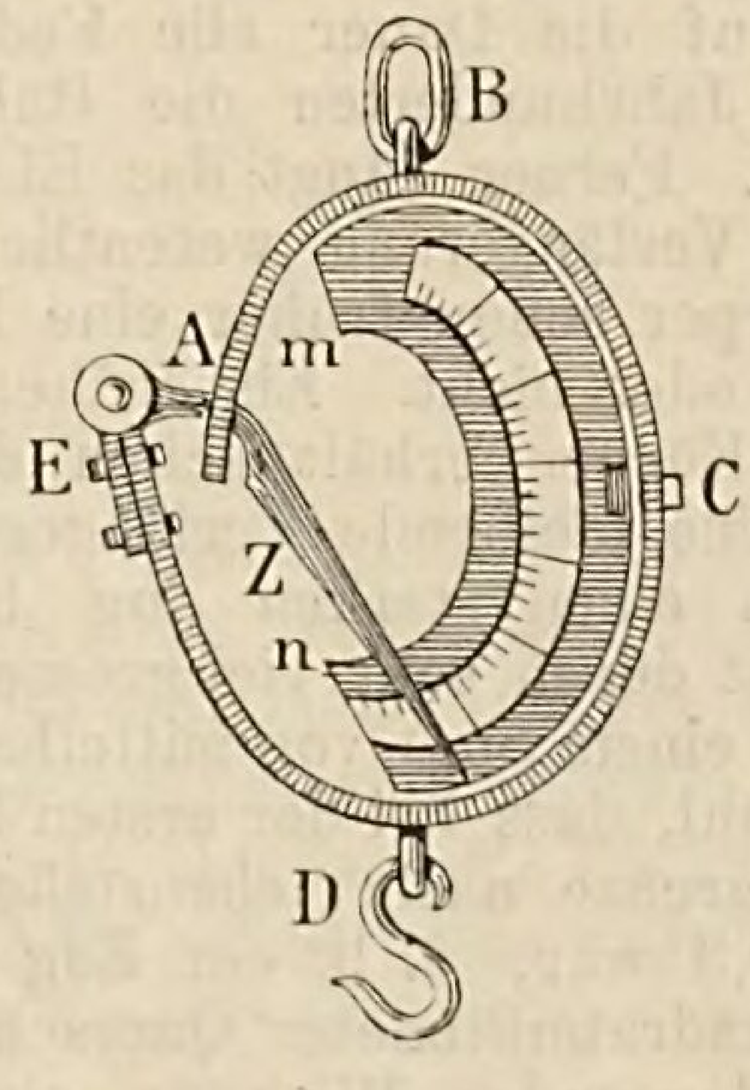
brauch aus stärkerem Stahldraht angefertigten Federwagen, die zwar sehr bequem sind, aber grosse Genauigkeit nicht gewähren können, weil überall die wachsende Elasticität der Federn der auf sie wirkenden Last nach keinem bestimmten Gesetz proportional zunimmt und an sich einer Veränderung durch den Einfluss der Temperatur unterliegt. Federwagen pflegen daher gewöhnlich nur da gebraucht zu werden, wo es auf grosse Genauigkeit nicht ankommt, wobei sie wegen ihrer Kleinheit als sehr bequeme Apparate dienen. Die gebräuchlichste Art der Federwagen besteht aus einem hohlen Cylinder (siehe Fig. 22), welcher oben mit einem Ring versehen ist, um die Wage an einem Finger zu halten, unten mit einem Haken, woran die zu wägende Last gehängt wird. Im Cylinder ist eine schraubenförmig gewundene Feder angebracht, welche durch die Last ausgedehnt wird. An dem unteren Ende dieser Feder ist eine vierkantige Stange angebracht, welche sich bei der Ausdehnung derselben durch den Boden des Cylinders zieht und somit einen an ihr befestigten Zeiger abwärts bewegt. Um die Veränderungen in der Stellung des Zeigers beobachten zu können, ist die Vorderseite des Cylinders aufgeschlitzt und trägt eine Skala, auf der diejenigen Gewichte bezeichnet sind, die der erzeugten Verlängerung der Feder entsprechen, so dass man das Gewicht der gehobenen Last unmittelbar abliest. Umgekehrt kann die Federwage auch so eingerichtet sein, dass die senkrechte Stange aus dem Deckel des Cylinders hervorragt und am oberen Ende einen Teller zur Aufnahme der Last trägt Es wird alsdann die Feder im Innern des Cylinders gegen den Boden gestemmt und zusammengedrückt.

Figur 22.



Nach einer andern, gleichfalls sehr gewöhnlichen Konstruktion bestehen die zu gleichen Zwecken dienenden Federwagen aus einem Stahlbügel (siehe Fig. 23), welcher oben mit einem Oehr B versehen ist, durch welchen der zum Halten dienende Ring geht, unten aber mit einem zweiten Oehr D versehen ist, in welchem der zum Aufhängen der Lasten bestimmte Haken hängt. Das eine Ende E des stählernen Bügels hält in einem Scharnier das Ende eines Zeigers Z, welcher durch eine Oeffnung A im andern Ende des Bügels gesteckt ist, und dessen Spitze beim Auseinanderziehen des Bügels auf einem geteilten Bogen diejenigen Gewichte P angibt, welche an den Haken gehängt, die stärkere Ausdehnung des Bügels bewirken. Diese Skala befindet sich auf einer Messingplatte von geeigneter Form, welche in C am Bügel befestigt ist.

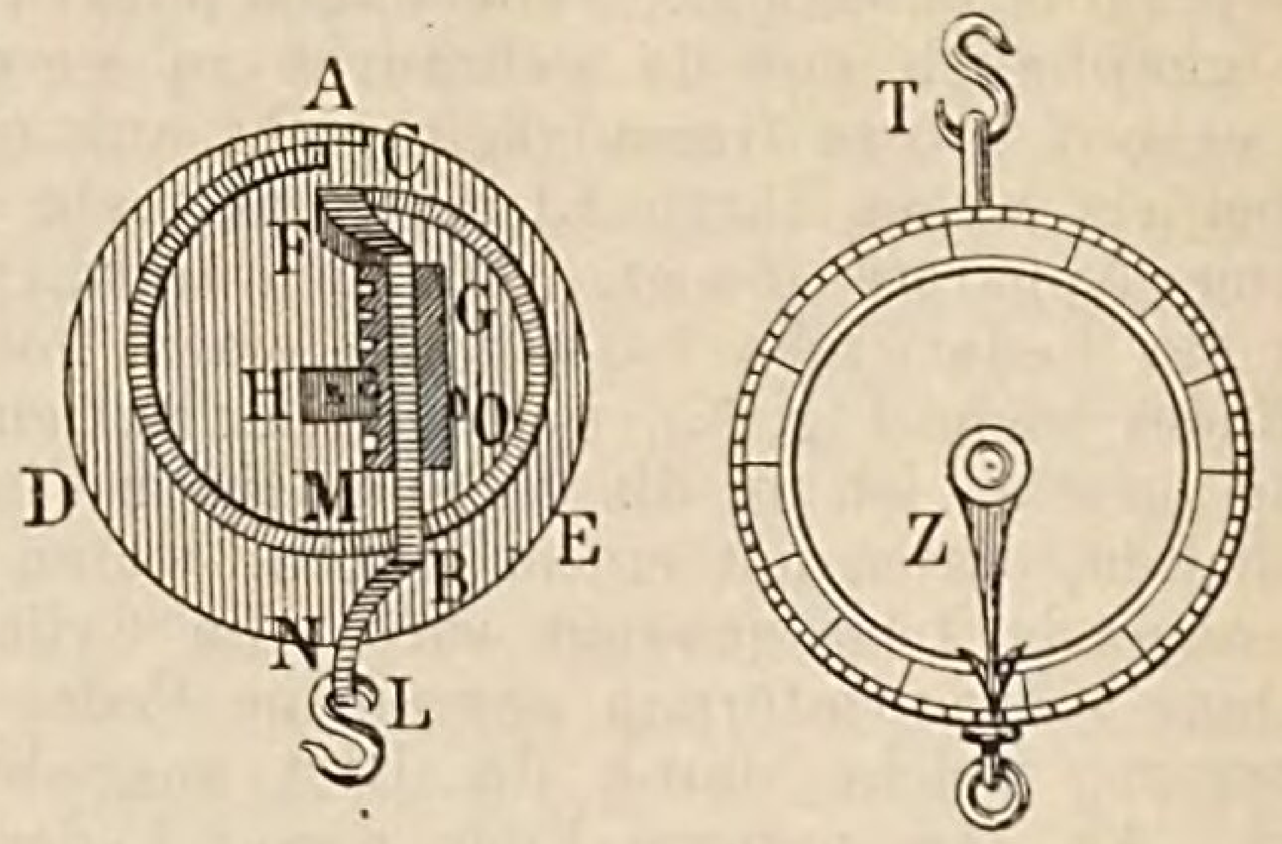
Figur 23.



Eine Federwage von sehr hübscher Form und Einrichtung ist *Mariott's* Patentwage (siehe Fig. 24). In einer runden, uhrförmigen Büchse ADE ist in A eine Stahlfeder ABC befestigt. Das andere Ende C der Feder ist in F an die Stange FL genietet. An dieser Stange ist auch eine gezahnte Platte GM befestigt, deren Zähne in ein Getriebe H greifen, dessen Achse einen

Zeiger trägt, der auf einem Zifferblatt das Gewicht der in L aufgehängten Last angiebt. Die Stange FL wird mit der gezahnten Stange GM durch einen Stift O in ihrer senkrechten Lage erhalten, bewegt sich frei bei B über die Feder und geht bei N durch eine Oeffnung der Büchse. (Weitere Anwendungen elastischer Körper siehe unt. d. Abschn. „Biegungselasticität u. -Festigkeit).

Figur 24.



Erkl. 26. Bei den Federwagen wirkt das Gewicht des zu wägenden Körpers, welches von der Grösse der Schwerkraft abhängig ist, der von der Schwerkraft unabhängigen Elasticität der Körper entgegen, so dass also für denselben Körper die Angaben der Federwage verschieden ausfallen, sobald die Intensität der Schwerkraft sich ändert, und dieselbe Last, welche auf der Erde den Zeiger der Federwage z. B. bis zum Teilstrich 6 herunterzieht, würde denselben auf dem Mond nur bis zum Teilstrich 1 herabziehen können. Die Wägungen mit der gewöhnlichen zweiarmigen Wage sind dagegen von der Intensität der Schwerkraft ganz unabhängig, weil etwaige Veränderungen derselben ganz gleichmässig auf den Inhalt beider Wagschalen wirken.

Frage 20. Es wurde bereits in Erkl. 7 angegeben, was man im allgemeinen unter Elasticitätsgrenze zu verstehen hat, ohne dass dabei die Elasticitätsgrenze näher bestimmt worden wäre. Was versteht man nun in Bezug auf eine bestimmte Belastung unter Elasticitätsgrenze?

Erkl. 27. Auch nach der in nebenstehender Antwort gegebenen Erklärung bietet die genaue Bestimmung der Elasticitätsgrenze grosse Schwierigkeiten. Zunächst ist die Zeitdauer, während welcher äussere Kräfte auf bleibende Veränderung der Körper hinwirken, von Einfluss, und selbst verhältnismässig kleine Belastungen können, wenn sie Jahre lang andauern, bleibende Veränderungen hervorbringen. Aus dem Grund erlahmen auf die Dauer alle Federn, biegen sich nach Jahrhunderten die Balken in den Decken etc. Ferner hängt das Eintreten einer bleibenden Verlängerung wesentlich davon ab, ob der Körper schon früher eine Dehnung erfahren hat oder nicht. Ein früher noch nicht gedehnter Körper erhält schon durch kleine Gewichte eine bleibende Verlängerung, ein bereits durch einen starken Zug bleibend gedehnter erst durch sehr viel grössere. So fand *Thalén* bei einem Stab von mittelhartem schwedischem Stahl, dass bei der ersten Dehnung die Elasticitätsgrenze nach nebenstehender Erklärung = 19,3 war, d. h. ein Zug von 19,3 kg auf den Quadratmillimeter Querschnitt brachte bei kurz dauernder Wirkung eine bleibende Verlängerung von 0,00005 der ursprünglichen Länge hervor. Derselbe Stab wurde dann nach

Antwort. Als Elasticitätsgrenze bezeichnet man bei der Dehnung eines Stabes dasjenige Gewicht in Kilogramm, welches einen Stab von 1 qmm resp. qcm Querschnitt um 0,00005 oder $\frac{1}{20000}$ seiner ursprünglichen Länge dauernd verlängert, welches also einen 1 m langen Draht bleibend um 0,00005 m oder 0,05 mm = $\frac{1}{20}$ mm verlängert.

Die folgende Tabelle gibt in dem eben angedeuteten Sinn die Elasticitätsgrenze für Drähte von 1 qmm Querschnitt in Kilogr.

	Elasticitätsgrenze	Verlängerung bei der Elasticitätsgrenze	Verlängerungsmaxima
Blei, ausgezogen	0,25	0,00014	0,243
„ angelassen	0,20	0,00012	0,614
Silber, ausgezogen	11	0,00149	0,0045
„ angelassen	3	0,00036	0,168
Kupfer, ausgezogen	12	0,00093	0,003
„ angelassen	3	0,00027	0,220
Platin, ausgezogen	26	0,00142	—
„ angelassen	14	0,00081	0,0023
Eisen, ausgezogen	32	0,00150	0,026
„ angelassen	5	0,00022	0,109
Stahldraht, ausgez.	43	0,00200	—
„ angelassen	15	0,00056	0,0044

und nach einem Zug bis zu 40 Kilogr. auf den Quadratmillimeter ausgesetzt, wodurch seine bleibende Verlängerung bis auf 0,005 der ursprünglichen Länge zunahm. Der so verlängerte Stab wurde neuen Dehnungsversuchen unterworfen, und es ergab sich, dass eine neue bleibende Verlängerung jetzt nicht eintrat, wenn auch die früher bestimmte Elasticitätsgrenze erheblich überschritten wurde. Erst ein Zug von 33,8 Kilogramm auf den Quadratmillimeter brachte eine neue Verlängerung von 0,00005 der ursprünglichen Länge hervor. Bei dieser Versuchsreihe wurde der Zug bis auf 44,5 Kilogramm auf den Quadratmillimeter gesteigert und der Stab um 0,00855 seiner ursprüglichen Länge bleibend verlängert. Nachfolgende Dehnungen des Stabes ergaben dann, dass bei dem so verlängerten Stabe die Elasticitätsgrenze erst bei 38,6 Kilogramm erreicht war.

Es ergibt sich somit, dass durch vorhergehende Streckungen die Elasticitätsgrenze sehr erheblich erweitert wird, dass man deshalb die gleiche Elasticitätsgrenze bei demselben Material nur dann findet, wenn dasselbe vorher durch den gleichen Zug gedehnt worden ist. Man erhält deshalb für hart gezogene Drähte eines Metalls ziemlich übereinstimmende Werte der Elasticitätsgrenze. In dieser Weise sind auch die in der nebenstehenden Tabelle angegebenen von *Wertheim* erhaltenen Zahlen für hart gezogene Drähte zu verstehen.

Die Beobachtungen *Thalén*'s erklären auch den grossen Unterschied, welcher, wie ebenfalls die nebenstehende Tabelle zeigt, *Wertheim* für die Elasticitätsgrenze hart gezogener und geglühter und dann langsam abgekühlter Drähte fand. Durch das Erhitzen gehen die Metalle wieder in den molekularen Zustand über, den sie vor der Streckung besassen, und deshalb tritt schon bei viel geringerem Zug eine dauernde Verlängerung ein. Wie *Thalén* fand, tritt diese Senkung der Elasticitätsgrenze schon bei einer Erwärmung auf 200° C. ein. Das Gleiche wird durch eine Reihe von Erfahrungen in der Technik bestätigt, wir erwähnen nur die leichtere Schmiedbarkeit der Metalle, wenn sie glühend sind; die Notwendigkeit beim Auswalzen der Bleche, wenn sie durch mehrere Walzen gegangen sind, dieselben erst neu zu erwärmen u. m. a.

Ferner finden wir in dieser Tabelle angegeben, um den wievielten Teil seiner Länge ein Draht von 1 qmm Querschnitt höchstens ausgezogen werden darf, wenn keine merkliche Verlängerung zurückbleiben soll; in der **letzten Kolumne** endlich findet man angegeben, um den wievielten Teil ihrer Länge Drähte noch ausgezogen werden können, ehe der Bruch erfolgt.

So sehen wir z. B., dass man an einen ausgezogenen Kupferdraht von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt bis zu 12 kg anhängen darf, ohne dass er eine merkliche (über 0,05 mm gehende) bleibende Verlängerung erfährt; dass der fragliche Draht durch 12 kg um 0,00093 m oder 0,93 mm elastisch verlängert wird, und dass er im ganzen um 0,003 m oder 3 mm ausgezogen werden kann, ehe der Bruch erfolgt.

Frage 21. Was versteht man unter dem Elasticitätsmodulus eines Materials?

Erk. 28. Ein Silberdraht von 1 Quadratmillimeter Querschnitt, belastet mit einem Gewicht von 1 Kilogr., verlängert sich bei 152° um $\frac{1}{7141} = 0{,}00014004$ seiner ursprüngl. Länge, und daher würde eine Kraft von 7141 kg im stande sein, einen Silberdraht von 1 qmm Querschnitt um seine eigene Länge auszudehnen. Ebenso würde engl. Stahldraht von demselben

Antwort. Unter dem Elasticitätsmodulus eines Materials versteht man diejenige (ideale) Belastung in Kilogramm, welche erforderlich sein würde, um einen Stab von dem Querschnitt Eins (Quadratmillimeter oder -Centimeter) auf seine doppelte Länge auszuziehen oder um seine eigene Länge zu vergrössern, falls eine solche Formänderung überhaupt innerhalb der Elasticitätsgrenze möglich wäre.

Querschnitt durch ein Gewicht von 1 kg um $\frac{1}{17278} = 0{,}0005788$ seiner ursprünglichen Länge, oder bei einer Belastung von 17278 kg um seine eigene Länge verlängert werden. Deshalb sagt man, der Elasticitätsmodulus von Silber ist (bei 15° C.):

$$E = 7141$$

von engl. Silberdraht:

$$E = 17278$$

(siehe die in Erkl. 15 gegebene Tabelle)

dagegen ist der Dehnungsquotient von Silber:

$$\varepsilon = \frac{1}{7141} = 0{,}00014004$$

von engl. Silberdraht:

$$\varepsilon = \frac{1}{17278} = 0{,}0005788$$

Natürlich richtet sich der Zahlenwert des Elasticitätsmodulus nach den Flächen- und Gewichtseinheiten, welche man dabei zu Grunde legt; die Elasticitätsmoduli werden daher 100-mal so gross ausfallen, wenn man einen Quadratcentimeter als Querschnitt zu Grunde legt, als wenn man von einem Quadratmillimeter-Querschnitt ausgeht. Wenn man also eine Tafel der Elasticitätsmoduli benutzt, so muss man immer erst nachsehen, für welche Masse die Zahlen zu verstehen sind.

Erkl. 29. Um die Stärke der Elasticität, hauptsächlich in Hinsicht auf den Widerstand, welchen die Körper vermöge dieser ihrer Eigenschaft einer ihre Form verändernden Gewalt entgegensetzen, auf einen allgemeinen Ausdruck zurück zu bringen, hat *Thomas Young* den Ausdruck „Modulus" der Elasticität eingeführt (Model oder Modul [vom lat. modŭlus, Verkleinerung von modus, das Mass] ein Mass, Massstab, besonders bei den Säulenordnungen), welcher nachher in den Werken der Engländer über Mechanik beibehalten ist. Dieser stützt sich auf das oben erwähnte, durch die Erfahrung aufgefundene Gesetz, dass die Veränderung, welche ein elastischer Körper durch eine gewisse Kraft erleidet, dieser letzteren so lange direkt proportional ist, als die Teile des Körpers keine Veränderung ihrer Lage erleiden.

Hiernach kann also die Elasticität der Körper durch den Modulus ausgedrückt werden. Nennt man letzteren $= E$, das Gewicht, welches einen Stab von der Länge L um eine Grösse λ verlängert $= P$, so ist:

$$E : P = L : \lambda$$

Wird z. B. ein Stab von 100 cm Länge durch ein Gewicht von 162,6 kg um 2 cm verlängert, so ist der Modulus der Elasticität für diesen Körper:

$$E = \frac{162{,}6 \cdot 100}{2} \quad \text{oder} \quad E = 8130$$

Da der Stab durch 162,6 kg um $\frac{1}{50}$ seiner ursprünglichen Länge vergrössert wird, so wird er bei nur 1 kg Belastung auch nur um $\frac{1}{50 \cdot 162{,}6}$

Der soeben eingeführte Elasticitätsmodulus einer Substanz ist der reciproke Wert[1]) der Verlängerung ε, welche die Längeneinheit (1 m) eines Stabes der betreffenden Substanz durch die auf die Querschnittseinheit (1 qmm) beim Zug wirkende Gewichtseinheit (1 kg) erfährt. Diese Verlängerung ε nennt man den Dehnungsquotienten, das Verlängerungsverhältnis oder wohl auch den Elasticitätskoeffizienten und es ist:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \quad \text{und} \quad E = \frac{1}{\varepsilon}$$

Der Elasticitätsmodulus wird somit bestimmt, indem man die Zahl Eins durch den Dehnungsquotient ε dividiert und da die meisten Materialien zerreissen, ehe sie auf das doppelte ihrer ursprünglichen Länge ausgedehnt sind, so kann der Elasticitätsmodulus nicht durch den direkten Versuch, sondern nur durch Rechnung ermittelt werden.

Man kann auch den Elasticitätsmodulus E gleichsetzen dem Gewicht eines Prismas, welches mit dem Körper, auf den E wirkt, aus einerlei Material besteht, und denselben Querschnitt Eins hat. Ist a die Länge dieses Körpers und γ die Dichtigkeit oder das Gewicht von 1 Kubikmillimeter des Materials, so hat man

$$E = a\gamma \text{ und daher umgekehrt } a = \frac{E}{\gamma}$$

Ist z. B. für Stahl

$$E = 22500 \text{ kg}$$
$$\text{und} \quad \gamma = 0{,}0000075 \text{ kg}$$

so hat man:

$$a = \frac{22500}{0{,}0000075} = 3000000000 \text{ mm}$$
$$= 3000000 \text{ m}$$

d. h. eine Stahlstange von 3000000 Meter Länge würde einen Stahlstab von demselben Querschnitt um seine eigene Länge ausdehnen, wenn solches überhaupt möglich wäre, ohne die Elasticitätsgrenze zu überschreiten.

[1]) Siehe Erkl. 28.

seiner ursprünglichen Länge vergrössert werden, mithin ist der Dehnungsquotient des betreffenden Körpers:

$$\varepsilon = \frac{1}{50\,.\,162{,}6} \quad \text{oder} \quad \varepsilon = 0{,}00012325$$

Frage 22. Wie lassen sich die oben erwähnten Gesetze der Zugelasticität in eine einfache Formel zusammenfassen?

Antwort. Nennen wir die Länge eines Stabes = L, seine durch die Belastung P erzeugte Verlängerung = λ, seine Querschnittsfläche = F, und den von seiner Substanz abhängigen Dehnungsquotient = ε, so ist nach obigen Gesetzen seine Verlängerung um so grösser, je grösser L und P, aber um so kleiner, je grösser F und je widerstandsfähiger das Material ist. Auf Grund dieser Erfahrungssätze lässt sich ohne weiteres die Formel aufstellen:

$$\lambda = \varepsilon \frac{PL}{F} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{PL}{FE}$$

$$\left(\text{da } \varepsilon = \frac{1}{E} \text{ ist.}\right)$$

Nach dieser Gleichung lässt sich für eine beliebig gegebene Stange von F Quadratmillimeter Querschnitt und L Millimeter Länge die Verlängerung λ berechnen, welche durch eine beliebig gegebene Belastung von P Kilogramm hervorgebracht wird, sobald man nur noch den Elasticitätsmodulus E oder den Dehnungsquotienten ε des in Frage kommenden Materials kennt.

Erkl. 30. *Wertheim* und *Chevandier* fanden durch akustische Versuche als die einfache Verlängerung für Hölzer, mit 20 % Feuchtigkeit genommen und nach den drei Hauptrichtungen des Stammes geschnitten, folgende Werte von E:

	D	long.	radial	tangent.
Pappel	0,477	517,2	73,3	38,9
Fichte (P. sylv.)	0,559	564,1	97,7	28,6
Eiche (Q. robur)	0,872	921,3	188,7	129,8
Buche	0,823	980,4	269,7	159,3
Birke	0,812	997,2	81,1	155,2
Ahorn	0,674	1021,4	157,1	72,7
Erle	0,601	1108,1	98,3	59,4
Tanne	0,493	1113,2	94,5	34,1
Esche	0,697	1121,4	111,3	102,0
Ulme	0,723	1165,3	122,6	63,4
Acacia	0,717	1261,9	—	—

Die elastische Kraft in der Richtung der Fasern übertrifft oft 10 mal diejenige senkrecht zu denselben; am kleinsten wird sie nach der tangentialen Richtung.

Einen sehr grossen Einfluss übt die Feuchtigkeit des Holzes aus. Ihre Entfernung bewirkt eine Zusammenziehung der Quere nach, eine Vermehrung der Dichtigkeit und der elastischen Kraft. Für 1 % Feuchtigkeit wächst letztere um $^1/_{200}$ bis $^1/_{100}$.

Frage 23. Wenn man einen grösseren Streifen Kautschuk oder noch besser einen Gummischlauch an seinen beiden Enden mit beiden Händen anfasst und ihn durch Zug verlängert, so lässt sich bei aufmerksamer Beobachtung ausser der Verlängerung des Stabes noch welche andere Formveränderung wahrnehmen?

Antwort. Wenn man die Länge eines Kautschukstreifens oder Gummischlauchs durch Zug vergrössert, so kann man beobachten, dass auch der Querschnitt eines solchen Körpers eine Veränderung erleidet, und zwar wird derselbe um so kleiner oder der Körper um so dünner, je mehr derselbe in die Länge gezogen wird.

Erkl. 31. Die Dichtigkeit stabförmiger Körper wird durch die Dehnung nach der Längenrichtung vermindert, wiewohl nicht in dem Grad, als man aus dem Verhältnis der Verlängerung erwarten könnte. Die Erklärung findet sich darin, dass während der Zunahme der Länge der Flächeninhalt des Querschnitts nicht verhältnismässig kleiner wird. Doch ist zu erkennen, dass die einseitige Spannung nach der Längenrichtung ein Zusammendrücken rechtwinklig gegen die Länge zur Folge hat. In der That lässt sich nicht erwarten, dass die Teilchen einer Längenfaser, soweit diese mit gleichartigen Fasern in Berührung steht, ihre

Wirksamkeit während der Dehnung ausschliesslich nur nach der Längenrichtung erstrecken sollten. Jedes Teilchen wird vielmehr auf seine ganze Umgebung, bis zur Grenze des messbaren Abstandes, einen Einfluss äussern. So entstehen molekulare Einwirkungen nach allen denkbaren Richtungen, die sich indessen an jedem Punkt zu zweien Kräften, nach der Längenrichtung und senkrecht gegen diese sammeln lassen. Die Resultante der senkrechten Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt im Innern des gespannten Stabs wird zwar in der Regel gleich oder fast gleich Null sein, weil von dem betreffenden Punkt ausgehend, nach jeder Richtung hin entgegengesetzt gleiche Kräfte sich wechselseitig aufheben. Aber das Gleichgewicht der äusseren Fasern muss notwendig eine Störung erfahren, indem alle gegen ihre Teilchen gerichteten Anziehungen nur vom Innern der Stabmasse ausgehen. So entwickelt sich auf jeden Punkt der Aussenfläche eines gedehnten Stabs eine Zugkraft gegen das Innere, und in Betracht der geringen Wirkungssphäre der Molekularkräfte, normal auf die Tangente des Punktes. Z. B. der ganze Umfang eines homogenen cylindrischen Stabs erfährt eine zentrale, in allen Punkten gleich starke Pressung im Sinne einer Verdichtung seiner Masse, die sich natürlich wie jeder andere von aussen einwirkende Druck in das Innere fortpflanzt und eine Verminderung des Durchmessers zur Folge hat.

Frage 24. Mit welchen Namen bezeichnet man in der Physik die vorerwähnte Erscheinung?

Erkl. 32. Kontrahieren (lat. contrahĕre, von trahĕre = ziehen) heisst zusammenziehen. Die Kontraktion (lat. contractio) heisst das Zusammenziehen, die Zusammenziehung.

Antwort. Diese vorerwähnte Erscheinung, wonach ein ausgedehnter Stab im Querschnitt kleiner wird, bezeichnet man mit dem Namen „Seitenkontraktion“ oder „Querkontraktion“, d. h. soviel wie seitliche Zusammenziehung.

Frage 25. Welche Werte hat man für die Querkontraktion berechnet und durch welche Experimente hat man die Richtigtigkeit dieser Werte nachzuweisen gesucht?

Erkl. 33. D. h. wenn ein Kautschukstab oder -Streifen von beispielsweise 200 mm Länge durch Ziehen auf 240 mm Länge gebracht wird, so ist in diesem Fall das Verhältnis der ursprünglichen Länge zur vergrösserten Länge 200 : 240 oder $1 : 1 + \frac{1}{5}$, folglich wird der Durchmesser im Verhältnis von $1 : 1 - \frac{1}{4.5}$ oder $1 : \frac{1}{20}$ verkleinert, und wenn also der Stab z. B. 20 mm Durchmesser hatte, so wird derselbe bei der oben erwähnten Verlängerung nur noch 19 mm Durchmesser zeigen. Wird aber derselbe Stab auf seine doppelte Länge ausgedehnt, so ist das Verhältnis seiner Durchmesser $1 : 1 - \frac{1}{4}$ d. h. der Durchmesser von 20 mm zieht sich auf 15 mm zusammen.

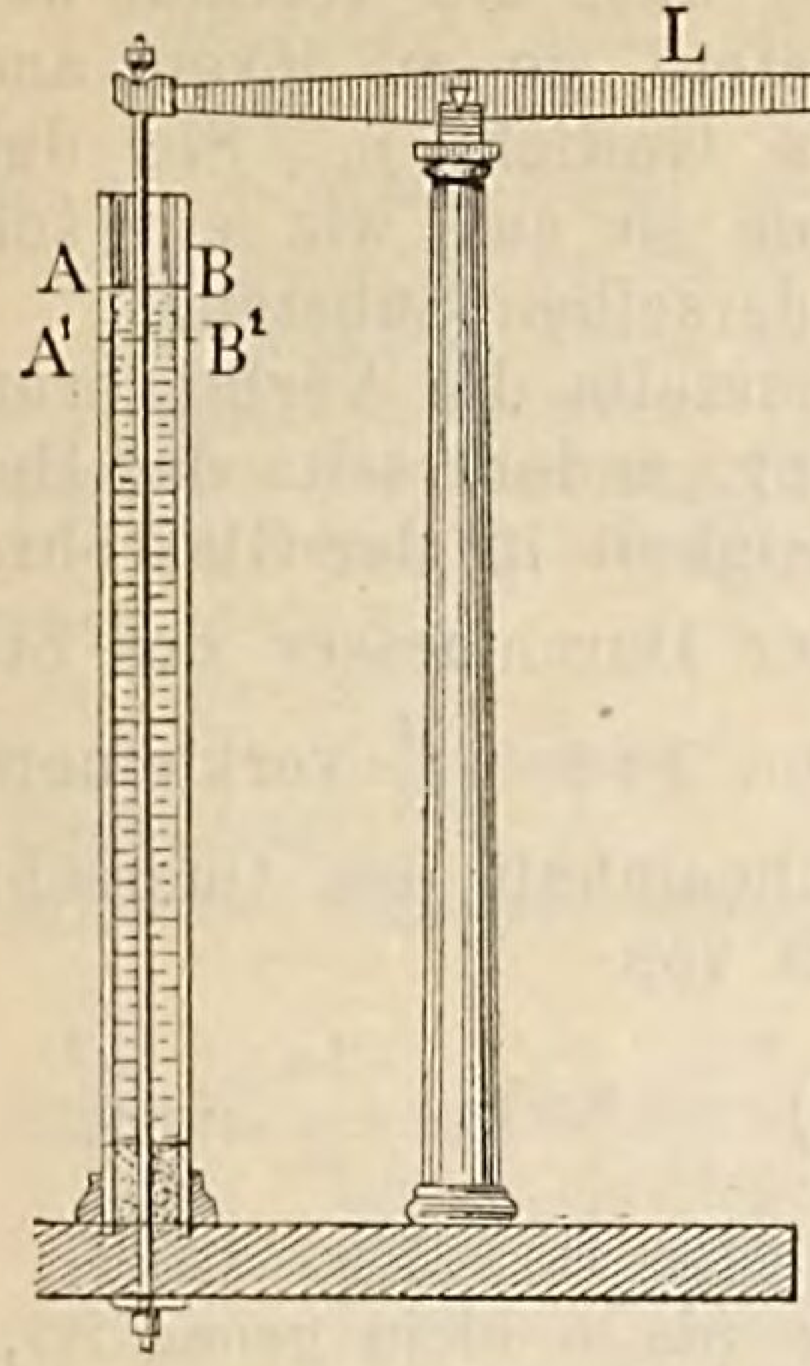
Antwort. Nach *Poisson*'s theoretischen Entwickelungen wird der Durchmesser eines Stabes im Verhältnis von 1 zu $1 - \frac{a}{4}$ verkleinert, wenn die Länge desselben durch Ziehen im Verhältnis von 1 zu $1 + a$ vermehrt worden ist. [1])

Mit dem vorerwähnten Wert der Querkontraktion stimmen die Resultate überein, welche *Cagniard la Tour* durch folgenden Versuch ermittelte:

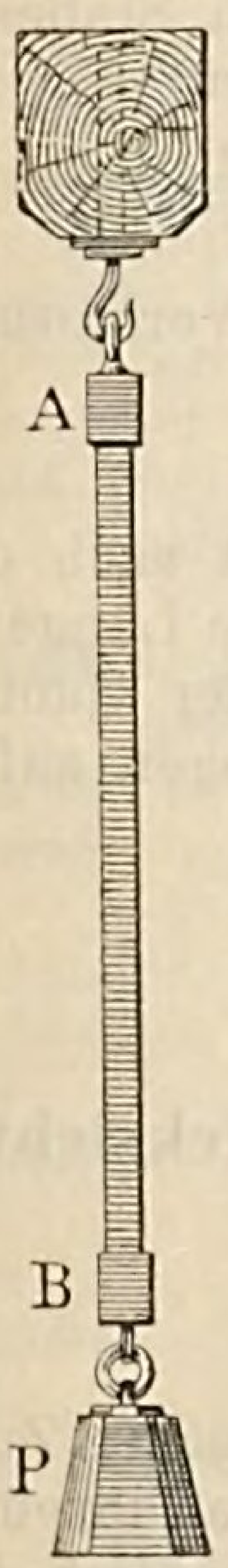
Er befestigte auf einem Fussbrett (siehe Fig. 25) einen Metalldraht so, dass derselbe senkrecht aufstieg; das obere Ende des Drahts wurde an einem Arm eines ungleicharmigen Hebels L befestigt, dessen anderer Arm mit einem Gewicht P belastet wurde.

[1]) Siehe Erkl. 33.

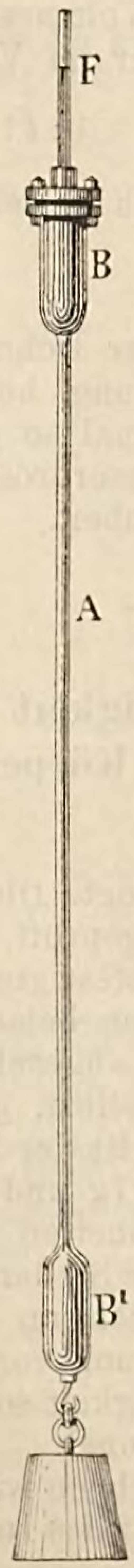
Figur 25.



Figur 26.



Figur 27.



Die Länge des unbelasteten Drahts, sie betrug 2 m, war genau bestimmt, und es wurde dann die Verlängerung beobachtet, welche durch die Belastung des Hebels eintrat. Die letztere wurde so weit gesteigert, dass die Verlängerung des Drahts 6 mm betrug. Der Draht war, wie die Figur zeigt, von einer engen, unten geschlossenen und mit Wasser gefüllten Röhre umgeben, der Durchmesser der Röhre und des Drahts waren genau gemessen. In dem Augenblick nun, in dem sich der Draht durch den Zug zu verlängern begann, sah man das Niveau des Wassers in der Röhre von AB bis A^1B^1 sinken; ein Beweis, dass in der That bei der Verlängerung des Drahts eine Verminderung des Querschnitts eintritt. Die Niveaudifferenz vor und nach dem Zug wurde genau gemessen und daraus die Verminderung des Durchmessers des Stabes berechnet.

Wertheim's Versuche stimmten jedoch mit diesen Resultaten nicht überein. Er nahm zunächst sehr sorgfältig gearbeitete Kautschukstreifen (siehe Fig. 26) von ungefähr 300 mm Länge. Dieselben hatten die Gestalt von Prismen mit quadratischer Grundfläche. Die Länge einer Seite war zwischen 9 und 47 mm. An ihren beiden Enden versah er sie mit eisernen Ansätzen A und B, in denen die Kautschukstreifen fest angebracht waren. Die Ansätze hatten Haken; mittels des einen wurde der Kautschukstreifen senkrecht aufgehängt, während an dem andern B das ziehende Gewicht P angebracht wurde. Da der Kautschuk sich sehr leicht ausdehnt, so verlängerte sich der Streifen bedeutend, und die Verlängerung wurde gemessen. Da ferner der Querschnitt des Streifens sehr gross war, so konnte man ihn mittels eines Zirkels messen, und so fand *Wertheim* durch direkte Messung, dass, wenn diese Stäbe durch angehängte Gewichte im Verhältnis von $1:1+a$ verlängert werden, die Seite des Querschnitts im Verhältnis von $1:1-\frac{a}{3}$ abnimmt.

Zu dem gleichen Resultat führten Versuche mit Messingröhren (siehe Fig. 27), welche mit ihren Enden an andere kurze, aber weitere Röhren B^1B^1 befestigt waren. Die untere war unten verschlossen, die obere an beiden Seiten offen, und an ihrem oberen Ende mit einer Fassung versehen, durch welche eine sehr enge Glasröhre F mit dem Inneren der Röhre kommunizierte. Diese so vorgerichteten Röhren wurden mit Wasser bis zur Marke F der Glasröhre ge-

Erkl. 34. Dass das Verhältnis $1:1-\frac{1}{3}a$ welches wir als $\alpha=\frac{1}{3}$ bezeichnen wollen, konstant sei, haben spätere Versuche nicht bestätigt. *Kirchhoff* und *Okatow* haben runde Stahlstäbe geprüft, die einzigen, welche sich einigermassen als strukturlos homogen erwiesen. Der runde Stab, in der Mitte horizontal gehalten, wurde beiderseits durch Gewichtchen, die an Seitenarmen wirkten, gleichzeitig gebogen und gedreht, und diese Aenderungen, deren eine die Längen-, die zweite die Querdimensionen betraf, durch das feine Mittel der Spiegelablesung gemessen. *Schneebeli* hat das Verhältnis α auf noch anderem Wege, nämlich durch Vergleichung der tönenden Längs- und Torsionsschwingungen weit dickerer Stäbe gleichfalls bestimmt. Sie erhielten für federharten und weichen Stahl:

	hart	weich
Kirchhoff (300 mm auf 2,55 mm)	$\alpha=0{,}294$	—
Okatow (Stricknadeln). .	0,294	0,304
Schneebeli (640—1000 m auf 14—20 mm) . .	0,296	0,306

Der Wert α scheint also für die gleiche Substanz, unabhängig von den Dimensionen, konstant, hingegen für jeden andern Zustand und jede andere Substanz ein anderer zu werden.

füllt. Man befestigte die Röhre an ihrem oberen Ende, so dass sie vertikal herabhing, und belastete sie an ihrem andern Ende mit einem Gewicht p. Sie dehnte sich dann gerade so aus wie ein solider Metallstab von derselben Substanz.

Man mass einerseits die Verlängerungen dieser Vorrichtung, andererseits das Herabsinken der Flüssigkeit in der Glasröhre F.

Wenn sich der Durchmesser des Stabes im Verhältnis von $1:1-\frac{a}{3}$ verkleinert, so nimmt der Flächeninhalt des Querschnitts ab im Verhältnis von

$$1:\left(1-\frac{a}{3}\right)^2 = 1:1-\frac{2a}{3}+\frac{a^2}{9}$$

oder:

$$1:1-\frac{2}{3}a \text{ (da } a \text{ klein genug ist, um } \frac{1}{9}a^2 \text{ zu vernachlässigen.)}$$

Das Volumen des ganzen Stabes ändert sich aber im Verhältnis von

$$1:\left(1+a\right)\left(1-\frac{2}{3}a\right)$$

oder was dasselbe ist, im Verhältnis von

$$1:1+\frac{1}{3}a$$

d. h.: der Dehnungsquotient nach der Längenrichtung, bezogen auf die Längeneinheit, ist dreimal so gross, als der Quotient der Volumenvergrösserung, bezogen auf die Volumeneinheit.

b). Die absolute Festigkeit oder die Zugfestigkeit ohne Berücksichtigung des Eigengewichts der Körper.

Frage 26. Wie hat man die Festigkeit gegen Zug geprüft, und welchen Wert hat man für dieselbe gefunden?

Erkl. 35. Die nachstehende Tabelle enthält die Werte der absoluten Festigkeit (d. h. den Festigkeitskoeffizienten oder Festigkeitsmodulus) gegen Zerreissen von Stäben mit je 1 Quadratmillimeter Querschnitt in Kilogramm:

Metalle.

		Kilogr.
Schmiedeeisen,	reinstes, stärkstes . . .	60
„	feines weiches	46
„	mittleres, Stangeneisen .	40
„	schwächstes, in grob. Stäben	25
Eisendraht,	ungeglühter	69,5
„	geglühter	36
„	in Bündeln oder Ankertauen .	30

Antwort. Die Festigkeit gegen Zug wurde einfach geprüft, indem man an ihrem oberen Ende befestigte Stäbe allmählich bis zum Zerreissen belastete. Da alle Teilchen der Länge, abgesehen von dem Gewicht des Stabes selbst, gleich stark ausgezogen werden, so ist der Bruch von der Länge unabhängig und wird einzig durch zufällige Ungleichheiten und die zufällige Schwäche einzelner Stellen bestimmt. Obgleich meist dem Bruch an der Bruchstelle eine starke Verdünnung vorausgeht, so zeigt sich doch die Festigkeit so ziemlich dem Querschnitt proportional.

Bezeichnen wir nun mit s die Grösse oder Intensität des in der Flächeneinheit des

		Kilogr.
Drahtseile	von 9 mm Durchm., aus 36 Eisendrähten (6 Litzen), schwed. Draht	55,06
„	französ. Draht	54,53
Ketten	aus weichem Eisen, gewöhnliche, mit längeren Gelenken	24
„	aus weichem Eisen, durch Stege verstärkte Gelenke	32
Eisenblech,	in der Richtung der Fasern	35,45
„	senkrecht auf die Fasern	35,25
Gusseisen,	weisses	10,50
„	graues	11
Stahl,	roher Schmelzstahl	61,76
	Zementstahl	89,78
	raffin. Schmelzstahl, weich zu Federn	67,88
	„ „ „ Messern	71,86
	„ „ „ „ Feilen	75,99
	Gussstahl, weichste Sorte zu Federn	72,15
	„ harter, zu Maschinenteilen	72,59
	„ sehr hart, zu Prägestempeln	104,88
	„ in der Kirschrotglut gehärtet, blau	103,31
	„ dunkelrot gehärtet, blau angelassen	136,89
	„ härtester, schwarzrot gefärbt, grau angelassen	142,87
Stahldraht,	ungeglüht	86,5
„	geglüht	61
Kupfer,	gewalzt, in der Richtung d. Länge	21
„	geschlagen	25
„	gegossen	13,4
Kupferdraht,	ungeglüht	40,5
„	geglüht	23,5
Messing		12,5
Messingdraht,	ungeglüht	59,5
„	geglüht	32,5
Kanonenmetall		23
Argentandraht,	ungeglüht	72,5
„	geglüht	51,5
Zink,	gewalztes	5
„	gegossenes	6
Zinkdraht		14
Zinn,	gegossen	3
Zinndraht		3,85
Blei,	gewalzt	1,35
„	gegossen	1,28
Bleidraht		2
Aluminium,	gegossen	10,97
„	kalt gehämmert	20,27
Aluminiumdraht		11,50
Silberdraht,	von feinem Silber, ungeglüht	32
„	„ „ „ geglüht	18
„	„ 750teilig. Silber, ungeglüht	63,5
„	„ „ „ „ geglüht	40
Golddraht,	von feinem Gold, ungeglüht	20,5
„	„ „ „ geglüht	17
„	„ 900teiligem Gold	46
„	„ 583⅓ „ „ ungeglüht	93,5
„	„ „ „ „ geglüht	69
Platindraht,	ungeglüht	34
„	geglüht	27,5

Aus dieser Tabelle folgt, dass die Festigkeit verschiedener Metalle in keinem Zusammenhang mit der Dichte derselben steht; so z. B. haben Stabquerschnitts auftretenden Widerstands, der Gegenwirkung (Reaktion), Spannung oder was dasselbe sagt, bezeichnet s den Festigkeitskoeffizient oder Bruchmodulus des betreffenden Materials (siehe Antw. auf Frage 25), P die Grösse der von aussen auf den Körper einwirkenden Kraft, und nehmen wir an, der Körper bestehe in allen kongruenten Querschnitten aus F Flächeneinheiten, so ist erfahrungsmässig für den Zustand des Gleichgewichts:

1). $P = Fs$

d. h. die den Körper beanspruchende Kraft oder die absolute Festigkeit des Körpers ist gleich der Anzahl der Flächeneinheiten des zur Kraftrichtung normalen Querschnitts, multipliziert mit der Grösse der in der Flächeneinheit dieses Querschnitts auftretenden Spannung (Normalspannung).

Umgekehrt ist:

2). $F = \frac{P}{s}$

d. h. man erhält die Grösse der Querschnittsfläche eines durch die Kraft P auf Zug oder Druck in Anspruch genommenen Stabes, indem man die Kraft P (in Kilogr.) durch die Grösse der Spannung s dividiert, welche in der Quadrateinheit der kleinsten Querschnittsfläche eintreten darf.

Oder:

3). $s = \frac{P}{F}$

ergibt eine Formel, welche direkt zur Berechnung der in 1 qmm resp. 1 qcm des Stabquerschnitts eintretenden Spannung benutzt werden kann.

Ist der in Betracht kommende Stab cylindrisch, der Querschnitt also ein Kreis vom Durchmesser d, so ist die Fläche

$$F = \frac{1}{4}\pi d^2$$

folglich nach Gleichung 2). auch

$$\frac{P}{s} = \frac{1}{4}\pi d^2$$

oder:

4). $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi s}}$

Ist der Stab hingegen quadratisch und die Seite des quadratischen Querschnitts $= a$, so ist die Querschnittsfläche

$$F = a^2$$

und diesen Wert in Gleichung 2). eingesetzt:

Zinn und Eisen fast gleiche Dichten (7,313 und 7,748) und doch sehr verschiedene Festigkeit.

Dieselben Metalle aus verschiedenen Erzen, auf verschiedene Weise gewonnen, lassen oft wesentliche Abweichungen in der Festigkeit erkennen; es ist überhaupt auf chemische und mechanische Einflüsse bei der Herstellung und während des Betriebs Rücksicht zu nehmen. Besonders wird durch Hämmern, Walzen und Drahtziehen die Elasticität und Festigkeit der Metalle etwas erhöht, die Dehnbarkeit hingegen vermindert. Der Stahl wird durch Härten etwas fester, desgleichen auch das Eisen durch Verminderung des Phosphor- und Kohlenstoffgehalts. Ausglühen vermindert die Festigkeit, erhöht dafür aber die Dehnbarkeit. Sehr niedrige Temperatur (— 33° C.) erhöht die Elasticitätsgrenze bei Eisen und Stahl; hohe Temperatur (+140° C.) drückt dieselbe herab. Der Elasticitätsmodulus des Schmiedeeisens und Stahls wächst um 0,03 % bis 0,05 % pro 1° C. abnehmende Temperatur.

Auf die absolute Festigkeit hat eine Temperaturdifferenz von —33° C. und +220° C. bei Stahl, von —33° C. und +100° C. bei Schmiedeeisen keinen Einfluss. Zwischen +100° C. und 200° C. nimmt das Schmiedeeisen bis zu 20 % an Zugfestigkeit zu, wird aber in dunkler Rotglühhitze (600—700° C.) um $^1/_2$ bis $^2/_3$ geringer.

Die absolute Festigkeit des Kupferblechs wird mit steigender Temperatur geringer und sinkt bei +400° C. auf die Hälfte derjenigen bei 0°.

Aus den zahlreichen *Wertheim*schen Versuchen mit **Legierungen** mögen die folgenden genügen:

Darcet's Met.	($Pb_2Bi_3Sn_2$)	1,74
Letternmet.	(Pb_2Sb)	1,87
Schnelllot	($PbSn$)	2,46
Tombak	(SCu_2)	32,5
Similor	(ZCu_5)	51,90
Messing	(ZCu_2)	60,22
Neusilber	($Z_4Cu_{18}Ni_2$)	61,88
Packfong	($Z_2Cu_5Ni_3$)	68,10

Die Versuche von *Wertheim* und *Chevandier* ergaben für verschiedene **Hölzer**, nach den 3 Hauptrichtungen, bei 20 % Feuchtigkeit:

		Richtung.		
	Dichte	longit.	radial	tangent.
Pappel	0,477	1,97	0,146	0,214
Fichte (P. sylvestr.)	0,559	2,48	0,256	0,196
Buche	0,823	3,57	0,885	0,752
Ahorn	0,674	3,58	0,715	0,371
Tanne	0,493	4,18	0,220	0,297
Birke	0,812	4,30	0,823	1,063
Erle	0,601	4,54	0,329	0,175
Eiche (Q. pedunc.)	0,808	6,49	0,582	0,406
Esche	0,697	6,78	0,218	0,408
Espe	0,602	7,20	0,171	0,414
Acacia	0,717	7,93	—	1,231

Die meist angenommene Zunahme der Festigkeit mit der Dichtigkeit des Holzes erleidet vielerlei Ausnahmen. So auch zeigten die einen Hölzer (Tanne, Esche, Ulme, Ahorn, Espe, Erle) eine wachsende Festigkeit von der Achse nach dem Umfang; alte Eichen,

$$a^2 = \frac{P}{s}$$

und somit

$$5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a = \sqrt{\frac{P}{s}}$$

Ist der Stab aber rechteckig prismatisch und sind die Seiten des rechteckigen Querschnitts $= b$ und h, so ist die Querschnittsfläche

$$F = bh$$

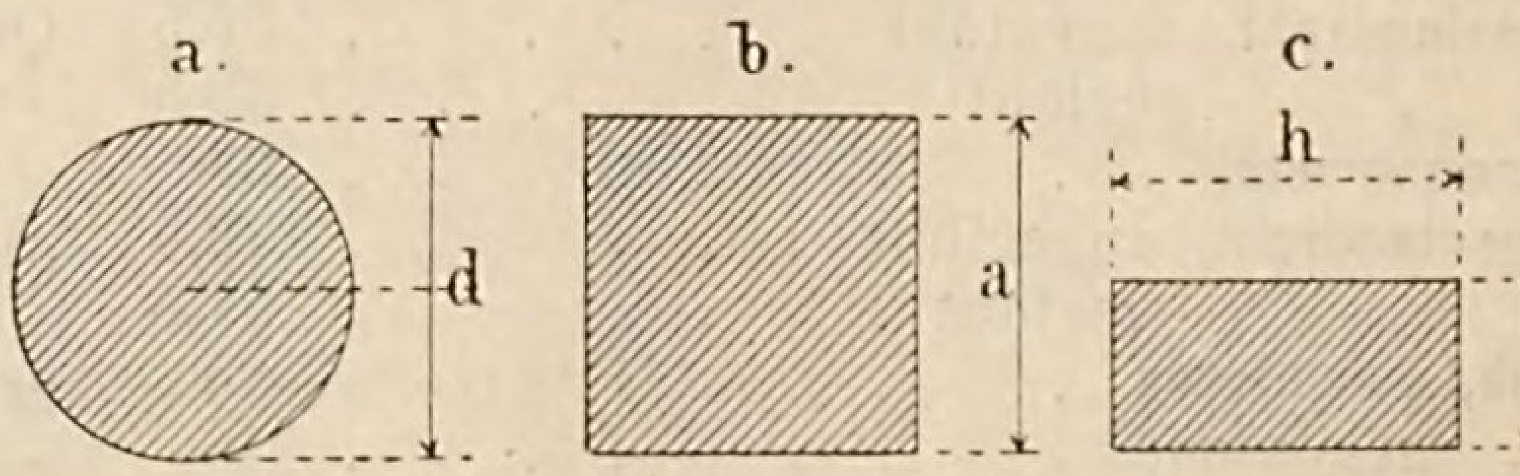
oder diesen Wert in Gleichung 2). eingesetzt:

$$bh = \frac{P}{s}$$

und somit:

$$6). \quad . \quad . \quad b = \frac{P}{sh} \quad \text{oder} \quad h = \frac{P}{sb}$$

Figur 28.



Birken und Buchen hingegen eine Abnahme derselben. In dieser Beziehung, wie mit Hinsicht auf die Kohäsion in verschiedenen Höhen des Baumes, treten keine allgemeinen Gesetze hervor. Dagegen steigt die Festigkeit radial und tangential, ähnlich der Elasticität, nur auf 0,163 und 0,159 von derjenigen im Sinn der Fasern. Sie nimmt endlich mit dem Alter, mit dem Austrocknen, mit dem schnellen Wachstum ab.

Für **organische Fasern** gibt *Frankenheim* folgende Zusammenstellung:

	Durchmesser	s
Pferdehaar	0,26 mm	9,644
Menschenhaar	0,10 „	11,595
Wollfaden	0,50 „	13,951
Spinnfaden	0,0025 „	18,809
Hanffaden	0,26 „	25,949
Coconfaden	0,0013 „	27,500

Für **Steine** mögen pro Quadratcentimeter Querschnitt folgende Werte in Kilogr. genügen:

Basalt von Auvergne	77 kg
Kalkstein-Portland	60 „
weisser von feinem Korn . .	15 „
mit körnigem Gefüge, sandig	23 „
Backstein, harter, stark gebrannter .	19 „
roter, schwach gebrannter .	8 „
Gips, mit Kalkmilch angerührt . . .	12 „
„ Wasser angerührt	4 „
Mörtel aus sehr hydraulischem Kalk .	15 „
Glas in Röhren oder Stäben . . .	248 „

Hanfseile (pro Quadr.-Centim.)

Geteerte Hanftaue bei der engl. Marine	390 kg
„ „ franz. „	435 „
Seile aus Strassburger Hanf, 13-14 mm Durchmesser	880 „
„ aus Lothring. Hanf, 23 mm Durchm.	600 „

Die grosse Verschiedenheit in der Festigkeit der Hanfseile rührt von der ungleichen Beschaffenheit der Materiale her, aus denen sie verfertigt sind. Dünne Seile sind verhältnismässig fester als dicke, weil sie aus besserem Hanf gemacht sind. Durch starkes Drehen der einzelnen Fäden wird die Tragkraft der Seile bedeutend vermindert. Nasse Seile haben eine geringere Festigkeit als trockene. Auch durch das Teeren der Taue und Stricke und durch das Rosten der Drahtseile wird die harte äussere Schicht des Eisendrahts, welche sich beim Ziehen bildet und welche zu seiner im Vergleich zu ungezogenem Eisen grösseren Tragfähigkeit mitwirkt, chemisch verändert und in einen nicht mehr kohärenten oder zusammenhangsfähigen, pulverförmigen Körper (Hydrooxyd) verwandelt.

Frage 27. Warum darf man bei der Berechnung der Dimensionen von Maschinenteilen u. dergl. nie den in vorstehenden Formeln benutzten Bruchmodulus oder Festigkeitskoeffizient einführen?

Antwort. Wollte man bei der Berechnung der Dimensionen von Maschinenteilen den Bruchmodulus *s* (resp. die für denselben in Erkl. 35 gegebenen Werte) in die Rechnung einführen, dann würde der nach

solchen Berechnungen konstruierte Körper unter dem Einfluss der auf ihn einwirkenden Kräfte unfehlbar zerstört werden.

Frage 28. Was ist deshalb bei Anwendung der oben gegebenen Formeln zu berücksichtigen, da in der Praxis kein Körper bis zu seiner Zerstörung und selbst nicht bis zu bleibender Formänderung durch äussere Kräfte in Anspruch genommen werden darf?

Erkl. 36. Der Tragmodulus eines Materials ist diejenige Zahl, welche angibt, mit wieviel Gewichtseinheiten (kg) man einen Körper von 1 Quadratmillimeter (oder Quadratcentimeter) Querschnittsfläche belasten muss, damit gerade seine Elasticitätsgrenze erreicht werde. Wenn die Belastung eines Körpers pro Flächeneinheit seines Querschnitts die Grösse des Tragmodulus erreicht, so ist die Elasticitätsgrenze erreicht, der Körper nimmt bleibende Formänderung an, und wenn die Belastung die Grösse des Bruchmodulus erreicht, so wird der Zusammenhang des Körpers in dem fraglichen Querschnitt zerstört.

Antwort. Bei Anwendung der oben gegebenen Formeln ist zu berücksichtigen, dass für *s* ein bedeutend kleinerer Wert als die Normalspannung in Rechnung zu bringen ist. Ja es darf der zu berechnende Körper noch nicht einmal bis zu seiner Elasticitätsgrenze (siehe Antw. auf Frage 20) in Anspruch genommen werden, denn er würde sich alsdann bei der geringsten Vermehrung der Belastung bleibend ausdehnen. Da solches vermieden werden muss, so darf an Stelle des Bruchmodulus noch nicht einmal der ganze Tragmodulus[1]), sondern nur ein Bruchteil desselben in Rechnung gebracht werden.

[1]) Siehe Erkl. 36.

Frage 29. Auf welche Weise gelangt man nun zu dem für die Praxis nötigen Grad der Sicherheit?

Erkl. 37. Während früher eine drei bis fünffache Sicherheit für genügend erachtet wurde, hat *Redtenbacher* durch ein sehr eingehendes Studium von einer grossen Anzahl gut ausgeführter Maschinen und ihrer Bestandteile hinsichtlich ihrer Festigkeit gefunden, dass nur die wenigsten Maschinenteile bis auf $^1/_5$, die meisten hingegen nur auf einen viel kleineren Teil ihrer Festigkeit in Anspruch genommen sind, und zwar die auf absolute Festigkeit in Anspruch genommenen Teile nur auf $^1/_{10}$, $^1/_{20}$ bis $^1/_{50}$, die auf relative Festigkeit in Anspruch genommenen Teile nur auf $^1/_{10}$, $^1/_{15}$ bis $^1/_{25}$, und die auf Torsion in Anspruch genommenen nur auf $^1/_{30}$ bis $^1/_{50}$ ihrer betreffenden Festigkeit, oder dass, was dasselbe sagt, erstere auf 10-, 20- bis 50fache, die andern auf 10-, 15- bis 25fache und die letzteren auf 30- bis 50-fache Sicherheit konstruiert sind.

Antwort. Damit nun die für die Praxis nötige Sicherheit erreicht wird, dafür, dass der Körper weder zerstört, noch dass die Elasticitätsgrenze überschritten wird, darf die Belastung eines Körpers resp. die Spannung pro Flächeneinheit des Körperquerschnitts eine Grösse nicht überschreiten, die je nach dem verlangten und üblichen Sicherheitsgrad ein grösserer oder kleinerer Bruchteil vom Tragmodulus T und Bruch- oder Festigkeitsmodulus K ist. Man nimmt also z. B. nur die Hälfte, den dritten oder vierten Teil des Tragmodulus und führt diesen Teil als zulässige Spannung oder Sicherheitskoeffizient in die Rechnung ein.

Frage 30. Was versteht man demnach unter dem Sicherheitskoeffizient oder der zulässigen Spannung eines Materials?

Erkl. 38. Bezeichnet man den Sicherheitskoeffizient für die absolute Festigkeit mit S und den Grad der Sicherheit mit σ, resp.

Antwort. Unter dem Sicherheitskoeffizient, Sicherheitsmodulus S, der zulässigen Spannung oder zulässigen Belastung eines Materials versteht man das Mass desjenigen Ge-

die Beanspruchung oder den reciproken Wert der Sicherheit mit $\frac{1}{\sigma}$, so ist der Festigkeitsmodulus oder die Normalspannung:

$$s = \sigma S$$

oder umgekehrt:

$$S = \frac{s}{\sigma}$$

Für diesen Wert für S hat man in den in Antw. auf Frage 26 gegebenen Formeln in jedem einzelnen Fall den entsprechenden Zahlenwert nach dem verwendeten Material und dem verlangten Grad der Sicherheit einzuführen. Und es ist demnach die Tragfähigkeit:

1a). $P = FS$

die Querschnittsfläche:

2a). $F = \frac{P}{S}$

der Sicherheitskoefffzient:

3a). $S = \frac{P}{F}$

Dasselbe gilt auch für die folgenden Formeln und Koeffizienten der übrigen Festigkeitsarten.

wichts per Querschnittseinheit, welchem der Körper noch mit hinreichender Sicherheit auf die Dauer zu widerstehen vermag.

Frage 31. Was ist über den Wert des Sicherheitskoeffizienten zu bemerken?

Erkl. 39. Allgemeine Regeln für die Bestimmung der bei praktisch auszuführenden Konstruktionen als zulässig anzunehmenden Zug- oder Druckspannung lassen sich nicht angeben. Je nach der Qualität der verwendeten Materialsorte, und je nach dem Grad der Möglichkeit, alle Umstände, welche die Sicherheit der Konstruktion gefährden können, entweder ganz anzuschliessen, oder wenigstens der Berechnung zu unterziehen, wird eine grössere oder kleinere Spannung als praktisch zulässig anzunehmen sein. Den oberen Grenzwert dieser zulässigen Spannung bildet unter allen Umständen die Elasticitätsgrenze des verwendeten Materials.

Da für den Elasticitätsmodulus, die Elasticitätsgrenze und den Festigkeitskoeffizienten auch bei den verschiedenen Sorten eines und desselben Materials sehr verschiedene Werte sich ergeben, so ist es nicht möglich, bestimmte ein für allemal giltige Zahlenwerte dieser Grössen für jeden einzelnen Körper anzugeben. Um die genaueren Werte zu ermitteln, hat man für jeden speziellen Fall mit der zu verwendenden Materialsorte spezielle Versuche anzustellen.

Erkl. 40. Körper, welche eine nicht grosse Elasticität, aber bedeutende Härte haben, können unter geeigneten Umständen grosse Lasten tragen, weil sie der beugenden Gewalt nur wenig nachgeben, wenig herabsinken und nicht leicht über die Grenze ihrer Kohäsion hinausgebracht werden. Wirkt aber eine ihre Sprödigkeit treffende Gewalt auf sie, dann zerbrechen sie leicht. So wird eine Glassäule und ein Bal-

Antwort. Während der Tragmodulus T und der Bruchmodulus K für bestimmtes Material je einen bestimmten (für Zug, Druck, Schub und Biegung mehr oder weniger verschiedenen) durch Versuche festgestellten Wert hat, sind die Werte für den Sicherheitskoeffizienten mehr willkürlich nach dem gewünschten Sicherheitsgrad σ und anderen, der eigentlichen Festigkeitslehre fernliegenden Umständen anzunehmen.

Es kommt dabei der Kostenpunkt, die Notwendigkeit geringen Gewichts, stetige oder längere Zeit unterbrochene Belastung u. a. m. in Frage.

Vor allem ist aber zu berücksichtigen, ob die Belastung eine ruhende, oder ob sie eine der Grösse oder Richtung nach wechselnde oder eine beständig wiederholte und mit Stössen verknüpfte ist.

Die durch die Versuche von *Wöhler* bestätigte Erfahrung hat gezeigt, dass nicht nur durch eine einmalige äusserste Beanspruchung, sondern auch durch eine weit geringere aber oft wiederholte Beanspruchung die Kohäsion eines Körpers zerstört werden kann. Je mehr die Spannung unter der Bruchgrenze bleibt, je öfter muss dieselbe wiederholt werden, um endlich den Bruch herbeizuführen. Schliesslich gibt es aber einen Wert der Spannung, welcher selbst bei zahlloser Inanspruchnahme den Bruch nicht herbeiführt, sondern von dem Material ertragen wird.

ken von sprödem Gusseisen eine grosse Last zu tragen vermögen, beide aber können durch einen Schlag oder Stoss leicht zerspringen.

Tabelle des Tragmodulus und Sicherheitskoeffizienten

in Kilogramm pro Quadratcentimeter.

Material.	Tragmodul T oder Elasticitätsgrenze				Sicherheitskoeffizient S oder zulässige Belastung.													
	Zug	Druck	Biegung	Drehung	Zug			Druck		Biegung			Schub			Drehung		
					a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	c.	a.	b.	c.	a.	b.	c.
Schmiedeeisen in Stäben . .	1400	1400	—	—	900	600	300	900	600	900	600	300	720	480	240	360	240	120
Eisenblech ═ [1])	—	—	—	—	900	600	300	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
„ „ ⊥ .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	720	480	240	—	—	—
Bessemerstahl.	3000	3000	3000	1450	1350	900	450	1350	900	1350	900	450	1080	720	360	540	360	180
Gussstahl . . .	—	—	—	1450	1500	1000	500	1500	1000	1500	1000	500	1200	800	400	600	400	200
Federgussstahl gehärtet . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4300	—	—	—	—	—	—	—
Gusseisen . . .	750	1500	800	—	300	200	100	900	600	450	300	150	—	160	—	150	100	50
Phosphorbronze	1300	—	—	—	750	500	250	—	—	750	500	250	—	—	—	300	200	100
Bronze	385	—	—	—	300	200	100	—	—	300	200	100	—	—	—	—	—	—
Kupferblech gehämmert . .	1400	1400	—	—	900	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Eiche, Buche, Esche	270	120	—	—	120	66	—	—	—	120	66 }	—	—	—	—	—	—	—
Kiefer, Fichte Tanne	270	120	—	—	80	60	—	—	—	80	60 } mittlere Werte	—	—	—	—	—	—	—
Granit, Syenit, Diorit	—	—	—	—	—	40–60	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Sandstein . . .	—	—	—	—	—	16–32	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ziegel	—	—	—	—	—	7–10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

[1]) In der Richtung der Fasern.

NB. Es gelten die zulässigen Belastungen:

unter a, wenn die Belastung eine ruhende ist,

unter b, wenn die Beanspruchung eine wechselnde ist derart, dass die hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von Null bis zu einem Maximum wachsen und dann wieder bis auf Null zurückgehen (wiederholte Biegung, Dehnung und Drehung nach einer Richtung hin),

unter c, wenn die Beanspruchung eine wechselnde ist derart, dass die dadurch hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von einem grössten negativen Wert stetig wachsen bis zu einem grössten positiven in absoluter Beziehung gleichgrossen Wert, dann wieder abnehmen u. s. w. (wiederholte Biegung oder Drehung nach entgegengesetzter Richtung u. s. w.)

Für zwischenliegende Beanspruchungen können dazwischenliegende Werte angenommen werden.

Beim Auftreten von Stössen in den Konstruktionsteilen ist die zulässige Beanspruchung kleiner anzunehmen.

c). Die absolute oder Zugfestigkeit prismatischer Körper mit Rücksicht auf deren Eigengewicht.

Frage 32. Unter welchen Umständen muss das Eigengewicht des Körpers mit in Rechnung gebracht werden?

Antwort. Ist der Körper, an dem die Last P hängt, von beträchtlicher Länge und Dicke, so trägt das eigene Gewicht G zur Verlängerung resp. zum Abreissen mit bei und muss daher auch, soll der Körper in allen Querschnitten gleiche absolute Festigkeit erhalten, bei der Bestimmung der Körperform mit berücksichtigt werden.

Frage 33. In welcher Weise wird man das Eigengewicht G bei Körpern, welche entweder senkrecht frei aufgehängt oder horizontal gestützt sind, in Rechnung bringen?

Antwort. Bei Körpern, welche entweder senkrecht frei aufgehängt oder horizontal gestützt sind, wird man das Eigengewicht G des betreffenden Körpers einfach auf die Weise in Rechnung bringen, dass man dasselbe zu der übrigen Belastung P addiert. Wir werden also dann in der Fundamentalformel 1). anstatt P zu setzen haben:

$$(P + G) = Fs$$

Unregelmässige Körper mit verschieden grossen Querschnitten wird man auf diese elementare Weise berechnen, wobei man also zunächst deren Eigengewicht $G = V\gamma$ zu bestimmen hat (worin V das Volumen und γ das spezifische Gewicht des betreffenden Körpers bedeutet.

Frage 34. Durch welche Betrachtung gelangt man zu einer für prismatische Körper anwendbaren Formel, bei welcher nicht erst vorher das Eigengewicht des Körpers einzuführen ist?

Erkl. 41. In den meisten technischen Handbüchern findet man das Gewicht von gewissen Materialien in prismatischer Form als sogen. „Laufendes Gewicht“ oder „Gewicht pro laufende Längeneinheit“ angegeben. Das ist für den praktischen Gebrauch und besonders für die Rechnung sehr bequem. Wäre das absolute Gewicht pro laufende Längeneinheit z. B. für ein solches Material $= G_0$, so hätten wir in der Formel

$$P + Fl\gamma = Fs$$

zu setzen $G_0 l$ an Stelle des zweiten Gliedes, also wäre

$$P + G_0 l = Fs$$

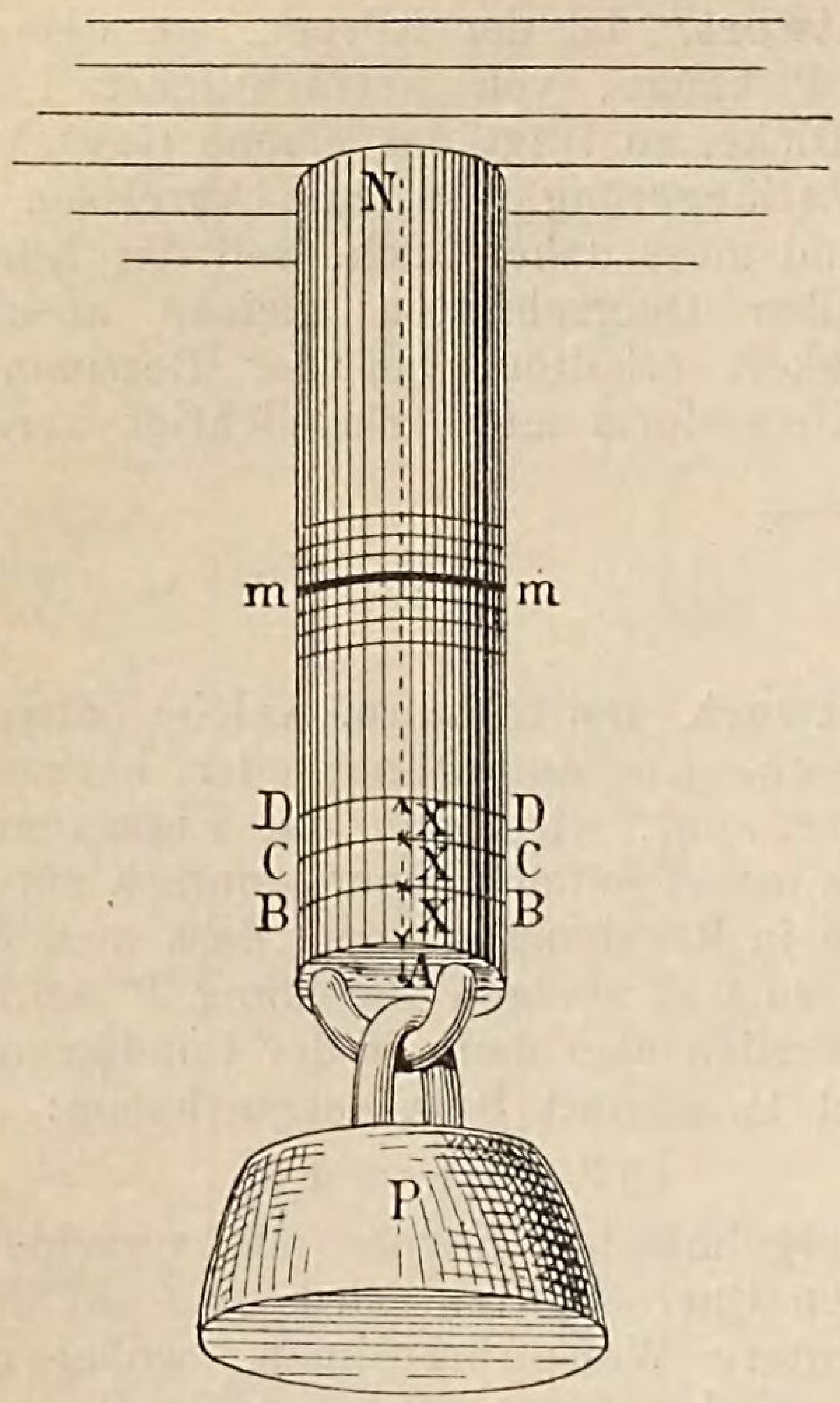
und alsdann

$$10). \quad \ldots \quad P = Fs - G_0 l$$

Antwort. Für prismatische Körper lässt sich die Fundamentalformel so umgestalten, dass man nicht das vorher zu bestimmende Eigengewicht des Körpers einzuführen braucht, sondern direkt die Dimensionen und das Gewicht γ der Kubikeinheit des Stabmaterials, wie folgende Betrachtung zeigt.

Ein prismatischer Stab AN (siehe Fig. 29) sei senkrecht aufgehängt, bei N befestigt und am unteren Ende bei A durch eine Kraft P auf Zug belastet. Wir denken uns den Stab seiner Länge l nach in n gleiche Teile geteilt, und die Länge eines solchen Stabteils sei $= x$. Wäre nun der Stab bei B, am Ende des ersten x befestigt, so hätten wir an dieser Stelle eine Belastung gleich der angehängten Last P, plus dem Gewicht des unter B befindlichen Stabteils. Das Gewicht der Kubikeinheit des letzteren bezeichnen wir allgemein mit γ. Das Vo-

Figur 29.



Erkl. 42. Obgleich das Eigengewicht bei allen Körpern als senkrecht abwärts wirkende Kraft seinen Einfluss ausübt, so bringt man dasselbe in der Praxis doch nur dann in Rechnung, wenn es zur übrigen Belastung eine namhafte Grösse hat.

lumen eines prismatischen Körpers ist aber gleich dem Querschnitt F, multipliziert mit der Länge, hier x. Also ist für den Querschnitt bei B als Befestigungsstelle die Belastung $= P + Fx\gamma$; für den Punkt C, welcher um $2x$ über A liegt, ist dieselbe $= P + F2x\gamma$, für D ist sie $= P + F3x\gamma$ und für N beträgt die Belastung $= P + Fnx\gamma$.

Da nun $nx = l$, so ist als Zugbelastung für den Querschnitt bei N zu setzen:

$$P + Fl\gamma$$

Dieser Belastung muss nun der Stab an seiner Befestigungsstelle mit der Widerstandsfähigkeit gegen Zug das Gleichgewicht halten. Das geschieht aber offenbar auf dieselbe Weise wie in der Fundamentalgleichung 1). Also wir erhalten, indem wir anstatt P setzen $P + Fl\gamma$:

$$P + Fl\gamma = Fs$$

oder:

$$P = Fs - Fl\gamma$$

oder:

7). . . . $P = F(s - l\gamma)$

Das ist die **Belastung**, welche ein prismatischer Körper von der Länge l und dem Querschnitt F an der Befestigungsstelle ausser seinem Eigengewicht, aber mit Rücksicht auf dasselbe zu tragen vermag.

Setzen wir in diese Formel an Stelle des Festigkeitskoeffizienten s den Sicherheitskoeffizienten S, so enthält die obige Formel den Wert für die **Tragfähigkeit** des Körpers.

Daraus ergibt sich der **Querschnitt**:

8). $F = \frac{P}{s - l\gamma}$

und die **Materialspannung** (der Festigkeitskoeffizient):

9). $s = \frac{P}{F} + l\gamma$

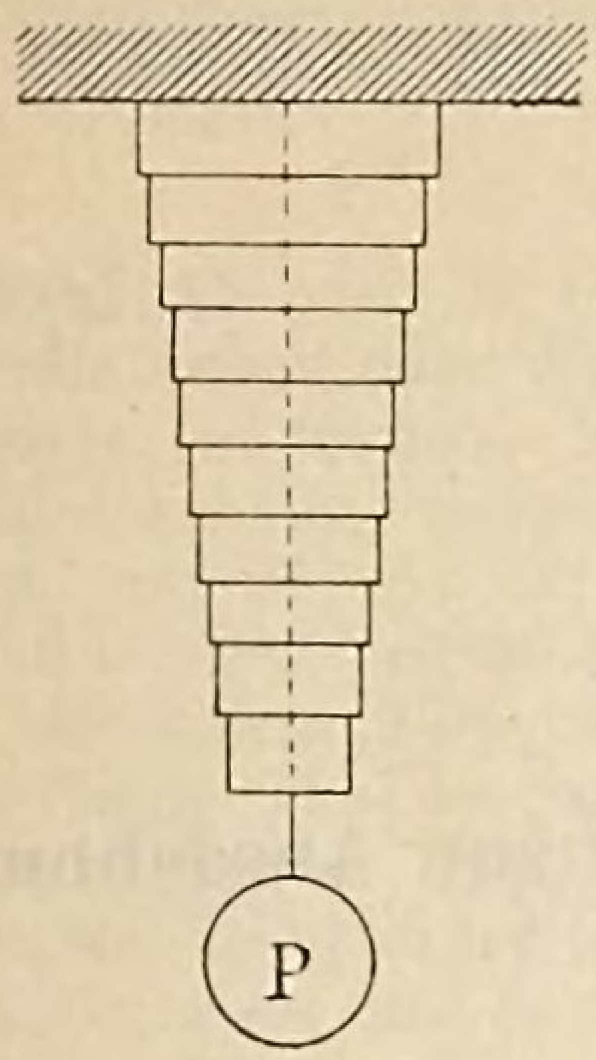
Frage 35. Was folgt aus der vorhergehenden Betrachtung für den Fall, dass die Spannung in jedem Querschnitt beständig gleich der zulässigen Belastung sein soll zum Zweck einer Gewichts- und Materialersparnis?

Antwort. In der vorhergehenden Betrachtung wurde gezeigt, dass die Querschnitte des Stabes von oben nach unten immer weniger zu tragen haben und dass die Spannung in einem beliebigen Querschnitt in der Entfernung x vom freien Ende

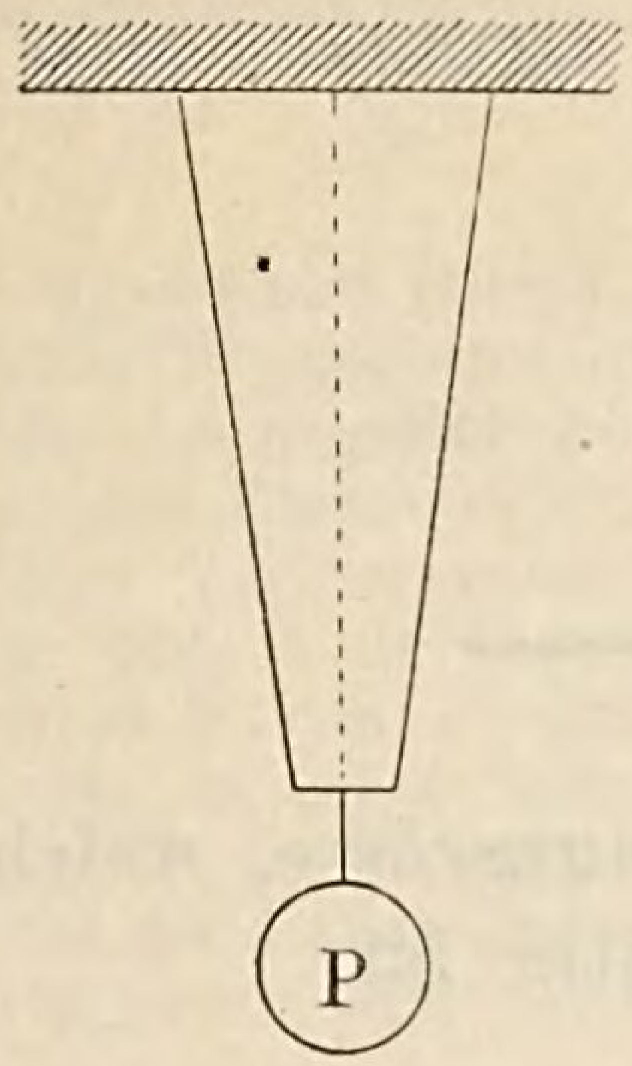
$$s = \frac{P + Fx\gamma}{F}$$

beträgt. Hieraus folgt, dass die Querschnitte von oben nach unten immer schwächer ge-

Figur 30.



Figur 31.



Erkl. 43. Die Herleitung der nebenstehenden Gleichung, die in der Praxis keine Anwendung findet und hier nur der Vollständigkeit halber gegeben ist, soll hier übergangen werden. Man ersetzt die allmähliche Querschnittsänderung bei der Anwendung (Schachtgestänge, Brückenpfeiler etc.) dadurch, dass man einzelne prismatische oder cylindrische Teile auf oder unter einandersetzt.

Besteht z. B. ein Gestänge oder ein Pfeiler aus drei Teilen, deren Längen $l_1 l_2 l_3$ mit den Querschnitten $F_1 F_2 F_3$ und ist P die Belastung der ganzen Konstruktion, so ist:

für den ersten Teil:

$$F_1 s = P + F_1 \gamma l_1$$

für den zweiten Teil:

$$F_2 s = P + F_1 \gamma l_1 + F_2 \gamma l_2$$

für den dritten Teil:

$$F_3 s = P + F_1 \gamma l_1 + F_2 \gamma l_2 + F_3 \gamma l_3$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$F_1 = \frac{P}{s - l_1 \gamma}$$

Mit Einsetzung dieses Wertes in die zweite Gleichung folgt:

$$F_2 s = P + \frac{P l_1 \gamma}{s - l_1 \gamma} + F_2 \gamma l_2$$

woraus

$$F_2 = \frac{P s}{(s - l_1 \gamma)(s - l_2 \gamma)}$$

ebenso erhält man mit Einsetzung dieses Wertes in die dritte Gleichung:

$$F_3 = \frac{P s^2}{(s - l_1 \gamma)(s - l_2 \gamma)(s - l_3 \gamma)}$$

Allgemein folgt für den n^{ten} Stab:

$$F_n = \frac{P s^{n-1}}{(s - l_1 \gamma)(s - l_2 \gamma) \ldots (s - l_n \gamma)} \quad . \; . \; . \; . \; 12).$$

nommen werden können. Man könnte also den cylindrischen oder prismatischen Stab ersetzen durch einen Stab, der aus einer grösseren Anzahl cylindrischer oder prismatischer Platten von immer kleinerem Durchmesser zusammengesetzt wäre, wie in Fig. 30, oder durch eine konische oder pyramidale Form wie in Fig. 31, wobei die grössere Basis nach oben und die kleinere nach unten gekehrt ist. Die nähere Untersuchung führt jedoch auf eine Körperform wie in Fig. 32, deren Querschnitt F in irgend einem Abstand x vom unteren Ende an gerechnet bestimmt ist durch die Formel:

$$11). \quad . \; . \; . \; . \quad F_{(x)} = \left(\frac{P}{s}\right) \cdot e^{\left(\frac{\gamma}{s}\right) \cdot x}$$

worin $e = 2{,}7182818$ die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet und wovon

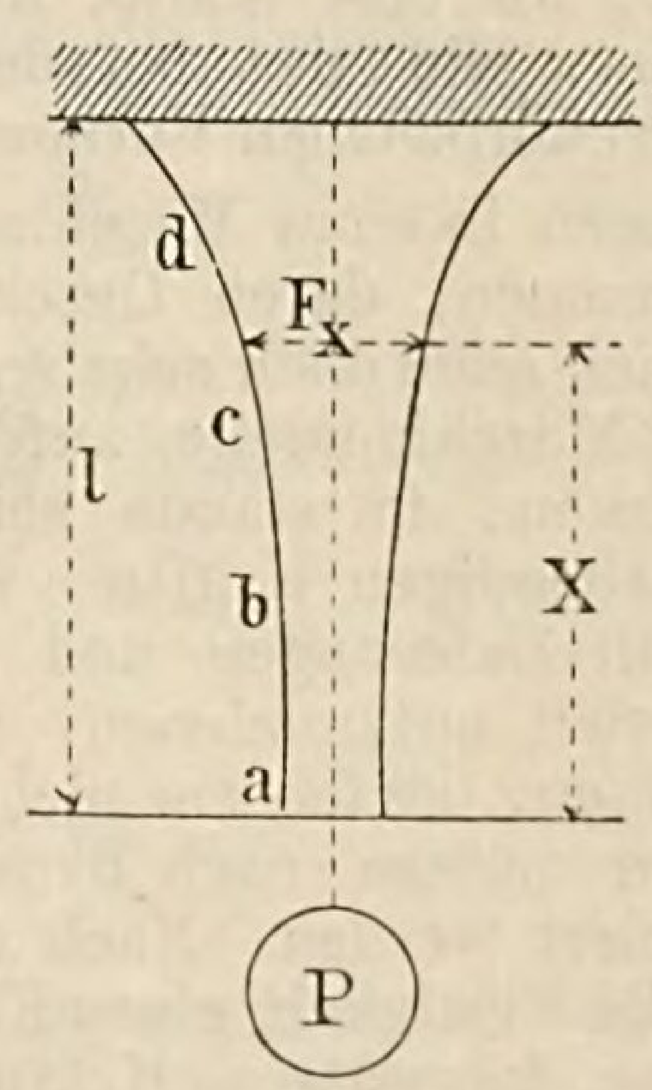
$$\log e = \log 2{,}7182818 = 0{,}4342945$$

ist. Bei Anwendung dieser Formel ist es zweckmässig, dieselbe vorher zu logarithmieren. Dann erhält man:

$$11a). \; . \; . \; \log F_{(x)} = \log\left(\frac{P}{s}\right) + 0{,}43429 \left(\frac{\gamma}{s}\right) x$$

In dieser Gleichung kann man nun beliebige Werte von x annehmen und daraus die zugehörigen Werte von $F_{(x)}$ berechnen, womit alsdann die verlangte Körperform (deren Durchschnitt von zwei sogenannten exponentiellen oder logarithmischen Linien, siehe Fig. 32, *a b c d* begrenzt wird) von gleicher oder k o n s t a n t e r a b s o l u t e r F e s t i g k e i t bestimmt ist.

Figur 32.



Sind die Längen $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$ gleich gross, so wird

$$F_1 = \frac{P}{s} \cdot \frac{s}{s - l\gamma}$$

$$F_2 = \frac{P}{s}\left(\frac{s}{s - l\gamma}\right)^2$$

und allgemein für den n^{ten} Stab:

$$F_n = \frac{P}{s}\left(\frac{s}{s - l\gamma}\right)^n \quad \ldots \ldots \ldots \quad 13).$$

d. Bestimmung der Arbeits- oder Wirkungsgrösse, welche zur Ausdehnung eines Stabes nötig ist.

Frage 36. Welche Formel dient zur Bestimmung der Arbeits- oder Wirkungsgrösse, welche zur Ausdehnung eines Stabes nötig ist?

Erkl. 44. Wenn eine Maschine einen ruhigen gleichförmigen Gang hat, so sind die Kräfte und Widerstände, welche auf irgend einen einzelnen Bestandteil einwirken, in jedem Augenblick unter sich im Gleichgewicht. Die Konstruktion dieser Maschinenteile darf daher auf die statischen Gesetze der Körperfestigkeit gegründet werden. Nach diesen Gesetzen richtet sich nun aber die Festigkeit oder Widerstandsfähigkeit der verschiedenen Körperformen, ausser nach dem Material und dem Festigkeitskoeffizienten, auch nach den einzelnen Dimensionen und ganz besonders nach den Querschnittsdimensionen, und sind namentlich bei der relativen und Torsionsfestigkeit solche Querschnittsformen vorteilhaft, bei welchen der grösste Teil des Materials von der Schwerpunktsfaser weit entfernt und insbesondere da angebracht ist, wo eine starke Körperausdehnung stattfindet, wie dies bei den gerippten, hohlen und durchbrochenen Formen der Fall ist.

Wenn hingegen in einer Maschine bedeutende Massen vorkommen, deren Geschwindigkeiten sich oft plötzlich oder doch sehr schnell ändern, so müssen die Maschinenteile, auf welche diese Massen einwirken, im stande sein, ohne zu brechen, die lebendigen Kräfte, welche jenen Geschwindigkeitsänderungen und Massen entsprechen, in sich aufzunehmen, und um dies leisten zu können, dürfen sie nicht nach statischen, sondern müssen nach dynamischen Gesetzen konstruiert werden. Nach diesen letzteren ist aber die Festigkeit eines Körpers gegen die Einwirkung lebendiger Kräfte nicht den einzelnen Dimensionen, sondern dem Volumen des Körpers und einem Koeffizienten, den man den Wirkungs- oder Arbeitskoeffizienten nennen kann, proportional. Man kann also in

Antwort. Zur Bestimmung der Arbeits- oder Wirkungsgrösse, welche zur Ausdehnung eines Stabes nötig ist, dient die Formel:

$$14). \quad \ldots \quad W = \frac{1}{2} V \cdot \frac{s^2}{E}$$

Beweis. Wenn man mit P diejenige Kraft bezeichnet, welche erforderlich ist, um eine prismatische Stange $\overline{AB}$ vom Querschnitt F und der Länge L in einem um die Strecke $\overline{BC} = \lambda$ verlängerten Zustand zu erhalten (siehe Fig. 33) und wenn man mit K die der Verlängerung x entsprechende Kraft bezeichnet, so ist nach Antw. auf Frage 17:

$$P = \frac{EE\lambda}{L} \quad \text{und} \quad K = \frac{FEx}{L}$$

folglich:

$$\frac{K}{P} = \frac{x}{\lambda}$$

d. h. die verlängernden Kräfte verhalten sich wie die ihnen entsprechenden Verlängerungen. Die mechanische Arbeit einer stetig veränderlichen Kraft kann aber geometrisch durch ein rechtwinkliges Dreieck dargestellt werden, dessen eine Kathete die Intensität der Kraft, und dessen andere Kathete den von ihrem Angriffspunkt zurückgelegten Weg bedeutet.

Da sich nun, wie oben bemerkt wurde, die spannende Kraft P resp. K einfach mit der Verlängerung λ resp. x ändert, so erhält man, wenn man in dem Endpunkt C die horizontale $\overline{CD} = P$ abträgt, und die gerade Linie BD zieht, in dieser letzteren die graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem die Kraft K mit der Verlängerung x sich ändert.

einem solchen Falle die Festigkeit nicht durch eine Querschnittsform, sondern muss sie durch das Volumen hervorzubringen suchen, weshalb denn auch in solchen Fällen die gedrungenen Massenformen dem Zweck am besten entsprechen.

Erkl. 45. Die in nebenstehender Gleich. 14). für die Arbeit oder Wirkung W gegebene Grösse negativ genommen, bildet die negative mechanische Arbeit, welche von dem Elasticitätswiderstand der Stange bei jener Verlängerung verrichtet wird. Setzt man für s die Spannung an der Elasticitätsgrenze, d. h. den Tragmodulus (siehe Tabelle Seite 32), so erhält man aus nebenstehender Gleichung die mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um die Stange bis zur Elasticitätsgrenze zu verlängern. Diese Arbeitsgrösse ist also proportional dem Quotienten $\frac{s^2}{E}$ welcher von der Beschaffenheit des Materials abhängt, sowie proportional dem körperlichen Inhalt der Stange — übrigens aber unabhängig von der Form derselben, also z. B bei gleichem Inhalt für eine kurze dicke Stange ebensogross wie für eine lange dünne Stange.

Da nach Tabelle S. 33:

für Schmiedeeisen:

$s = 1400 \quad E = 15 - 2500000$

also im Mittel $E = 2000000$

für Gusseisen:

$s = 750 \quad E = 1000000$

für Kupfer, gehämmert:

$s = 1400 \quad E = 1310000$

für Holz:

$s = 270 \quad E =$ durchschnittl. 1000

ist, so ist die Grösse der mechanischen Arbeit, welche erforderlich ist, um eine Stange von 1 Kubikcentimeter Inhalt bis zur Elasticitätsgrenze auszudehnen:

für Schmiedeeisen:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1400^2}{2000000} = 0{,}49 \text{ Centimeter-Kilogr.}$$

für Gusseisen:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{750^2}{1000000} = 0{,}2875 \quad " \quad "$$

für Kupfer:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1400^2}{1310000} = 0{,}748 \quad " \quad "$$

für Holz:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{270^2}{100000} = 0{,}3645 \quad " \quad "$$

Setzt man aber für s den Koeffizienten der Festigkeit ein, so ergeben sich diejenigen Werte für $\frac{s^2}{E}$, welche in den vier letzten Kolumnen

Denkt man sich den Endpunkt B der Stange allmählich fortschreitend bis nach C gezogen und zwar unter Einwirkung einer verlängernden Kraft K, welche nach dem obigen Gesetz von Null bis P wächst, so ist die mechanische Arbeit, welche von dieser Kraft verrichtet wird, sobald ihr Angriffspunkt die unendlich kleine Strecke n zurücklegt, gleich dem Produkt Kn und demnach die ganze geleistete mechanische Arbeit während der Zeit, in welcher die Strecke λ zurückgelegt wurde, offenbar gleich der Summe der einzelnen mechanischen Arbeiten, welche nötig waren zur Erzeugung der unendlich vielen kleinen Verlängerungen n, aus denen λ besteht, oder wie man es mathematisch unter Anwendung des Summationszeichens Σ ausdrückt:

$$W = \Sigma(Kn)$$

Da nun diese mechanische Arbeit dargestellt wird durch den Flächeninhalt des Dreiecks BCD, so hat dieselbe die Grösse:

$$W = \frac{1}{2}\overline{BC}\,.\,\overline{CD}$$

oder:

$$W = \frac{1}{2}\lambda P$$

oder wenn man hierein für λ den in Antw. auf Frage 22 gegebenen Wert setzt, so ergibt sich:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{FE} \cdot PP$$

oder:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{FE} \cdot P^2$$

Diese Gleichung nimmt, wenn darin für $P = \frac{FE}{L} \cdot \lambda$ (siehe Antw. auf Frage 22) gesetzt wird, die Form an:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{FE}{L} \cdot \lambda^2$$

Und wenn man für $P = Fs$ (siehe Antw. auf Frage 26) einführt, so folgt:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{FE} \cdot (Fs)^2$$

oder:

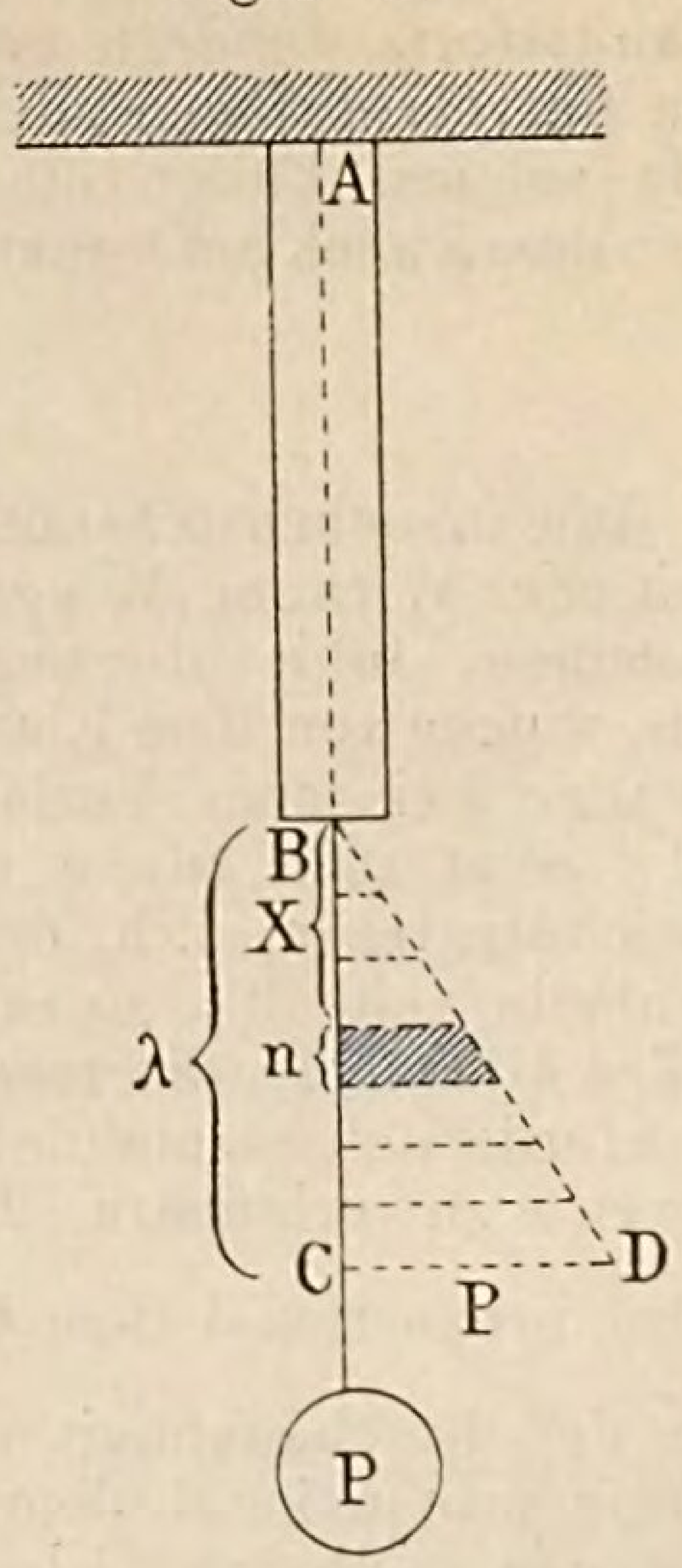
$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{E} \cdot FL$$

oder, da Querschnitt mal Länge das Volumen gibt, also für $FL = V$ gesetzt werden kann, so ist:

$$14). \quad W = \frac{1}{2} \cdot V \cdot \frac{s^2}{E}$$

der nachfolgenden Tabelle unter $\frac{A^2}{E}$, $\frac{C^2}{E}$, $\frac{B^2}{E}$ und $\frac{T^2}{E}$ für Zug, Druck, Biegung und Torsion für die verschiedenen Materialien pro □cm Querschnitt verzeichnet sind. Dieselben sind nach der nebenstehend entwickelten Formel 14). aus dem Quadrat des betreffenden Festigkeitskoeffizienten, geteilt durch den zugehörigen Elasticitätsmodulus, zusammengesetzt. Zu diesem Zweck sind in den vier ersten Kolumnen die Festigkeitskoeffizienten angegeben, und zwar unter A für die absolute, unter C für die rückwirkende, unter B für die relative und unter T für die Torsionsfestigkeit, während die fünfte Kolumne den Elasticitätsmodulus E enthält, der für die absolute, rückwirkende und relative Elasticität derselbe, dagegen für die Torsionselasticität bedeutend kleiner ist, und für diese Elasticitätsart nur ungefähr $^2/_5$ des entsprechenden Koeffizienten für die übrigen Elasticitätsarten beträgt. Die 6. Kolumne enthält unter E^1 diesen Elasticitätsmodulus für Torsion.

Figur 33.



Tabelle

über die Koeffizienten der Festigkeit und Elasticität der Materialien, bezogen auf den Querschnitt von einem Quadratcentimeter und in Kilogramm ausgedrückt.

Material.	A	C	B	T	E	E^1	$\left(\frac{A^2}{E}\right)$	$\left(\frac{C^2}{E}\right)$	$\left(\frac{B^2}{E}\right)$	$\left(\frac{T^2}{E^1}\right)$
Eichenholz	720	480	700	280	120000	48000	4,3	2,0	4,1	1,6
Eschenholz	1195	595	900	478	112000	44800	12,8	3,16	7,2	5,1
Tannenholz	854	427	600	240	100000	40000	7,3	1,8	3,6	1,44
Buchenholz	803	401	720	321	93000	37200	6,9	1,8	5,6	2,8
Schmiedeeisen (dünn) .	4350	—	7000	7000	2500000	1000000	7,6	—	19,6	49
„ (dickere Stäbe)	3300	2640	4000	4500	1500000	600000	7,3	4,65	10,7	33,7
Eisendraht	7000	—	—	—	1800000	720000	27,2	—	—	—
Gusseisen	1000 1300	5500 7150	3000	3000	1000000	400000	1,0 1,7	30 51	9,0	22,5
Gussstahl, ungehärtet .	8000	—	—	8000	2000000	800000	32	—	—	80
Gussstahl, gehärt. u. angelass.	10000	—	10000	10000	3000000	1200000	33	—	33	83
Stahl, ordinäre Qualität .	3600	—	—	3600	2000000	800000	6,5	—	—	16,2
Kanonenmetall	2600	—	—	2300	700000	280000	9,7	—	—	14,7
Kupfer, gehämmert . .	2500	—	—	—	1310000	—	4,8	—	—	—
Kupfer, gegossen . . .	1300	—	—	2000	—	—	—	—	—	—
Messing	1300	—	2270	2100	645000	256000	2,6	—	8,0	21
Zinn	333	—	—	658	320000	—	0,35	—	—	—
Blei	128	—	—	458	540000	—	0,03	—	—	—
Zink	199	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Glas	248	—	—	—	9000	—	6,8	—	—	—
Kalbleder	129	—	—	—	391	—	43	—	—	—
Gegerbtes Schafleder . .	110	—	—	—	381	—	32	—	—	—
Weisses Rossleder . .	272	—	—	—	748	—	99	—	—	—
Dünnes Rossleder . . .	218	—	—	—	476	—	100	—	—	—
Korduan-Rossleder . .	114	—	—	—	252	—	52	—	—	—
Kuhleder	271	—	—	—	683	—	108	—	—	—

Frage 37. Was ergibt sich aus den vorstehenden Zahlenwerten der Arbeits- oder Wirkungskoeffizienten?

Erkl. 46. So beträgt z. B. der Ausdehnungskoeffizient für Kuhleder 108, für Gussstahl nur 33, für Schmiedeeisen nur 7,3, für Eichenholz nur 4,3 und für Gusseisen sogar nur 1 bis 1,7, so dass in dieser Beziehung das Kuhleder alle übrigen Materialien, selbst den besten Stahl, bei weitem übertrifft. Auch ist es eine bekannte Sache, dass Schmiedeeisen und sogar Holz bei gleichem Volumen eine grössere Festigkeit gegen Stösse und Massenwirkung gewähren als Gusseisen, was sich einfach dadurch erklärt, dass für die beiden zuerst genannten Materialien der erwähnte Arbeitskoeffizient grösser ist als für das letzte.

Antwort. Aus den Zahlenwerten dieser Koeffizienten ersieht man, dass sich die verschiedenen Materialien hinsichtlich der Wirkung zu einer bestimmten Ausdehnung ganz anders verhalten, als hinsichtlich der absoluten Festigkeit oder ihres Kohäsionswiderstandes gegen das Zerreissen.[1])

[1]). Siehe Erkl. 46.

Frage 38. Wenn an dem unteren Ende einer senkrecht aufgehängten prismatischen Stange ein Körper vom Gewicht Q befestigt wird, welcher anfangs unterstützt, dann plötzlich losgelassen und der Wirkung der Schwere überlassen wird, so ist die durch das fallende Gewicht erzeugte Verlängerung offenbar eine andere, als diejenige Verlängerung, welche durch dasselbe Gewicht im Ruhezustand hervorgerufen wird. Welcher Satz gilt hierüber und aus welcher Betrachtung ergibt sich die Richtigkeit dieses Satzes?

Erkl. 47. Denken wir uns irgend einen Körper in Bewegung, so müssen wir notwendig annehmen, dass derselbe die Geschwindigkeit seiner Bewegung erlangt hat durch einen Verbrauch von mechanischer Arbeit. Aendert sich dann die Geschwindigkeit des bewegten Körpers, so kann dies nur geschehen durch einen dieser Aenderung entsprechenden Aufwand oder Verbrauch von Arbeit der vorhandenen Kräfte oder

1). die lebendige Kraft einer bewegten Masse = der Arbeit derjenigen Kraft, welche der Masse die Bewegung erteilte,

2). die lebendige Kraft einer Masse = der Arbeit, welche diese Masse leisten kann, wenn sie hierbei ihre Bewegung ganz verliert.

Damit ist das charakterisiert, was man das Prinzip der Aequivalenz zwischen Arbeit und lebendiger Kraft nennt und welches ausführlicher behandelt ist in demjenigen Lehrbuch dieser Encyklopädie, welches die allgemeinen Eigenschaften der Körper behandelt.

Antwort. Dasjenige Gewicht P, welches im Ruhezustand an einer Stange hängt, bringt dieselbe Spannung und Verlängerung in der Stange hervor, wie ein halb so schweres an der Stange befestigtes und anfangs unterstütztes Gewicht Q, welches man plötzlich fallen lässt.

Beweis. Wenn mit λ die Strecke bezeichnet wird, nach deren Zurücklegung die Geschwindigkeit des fallenden Gewichts Null wird, so ist $Q\lambda$ (Kraft mal Weg) die mechanische Arbeit, welche hierbei von dem Gewicht Q verrichtet wird, und nach Antw. auf vorige Frage:

$$-W = -\frac{1}{2}\lambda P$$

die negative mechanische Arbeit, welche von dem Elasticitätswiderstand der Stange verrichtet wird. Die hervorgebrachte Spannung und Verlängerung kann man nun (vorausgesetzt, dass die Masse der Stange verschwindend klein ist) bestimmen, indem man, nach dem Prinzip der lebendigen Kraft[1]) die algebraische Summe der beiden mechanischen Arbeiten gleich der hervorgebrachten lebendigen Kraft, d. h. gleich Null setzt, aus der Gleichung:

$$0 = Q\lambda - W$$

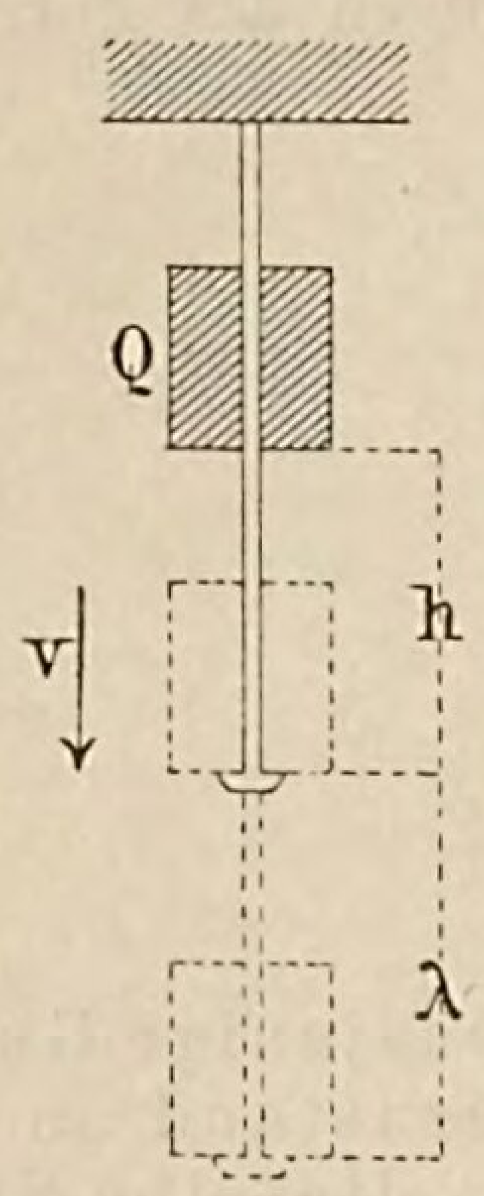
welche nach Einsetzung des oben gefundenen Wertes für W die Form annimmt:

$$0 = Q\lambda - \frac{1}{2}P\lambda \quad \text{oder} \quad P = 2Q$$

[1]) Siehe Erkl. 47.

Frage 39. Wie lässt sich die an einer Stange hervorgebrachte Verlängerung λ berechnen, wenn das Gewicht Q mit der durch den freien Fall erlangten Geschwindigkeit v gegen den Endpunkt der Stange stösst?

Figur 34.



Antwort. Wenn das Gewicht Q, anstatt mit der Geschwindigkeit Null (siehe oben) mit der durch den freien Fall erlangten Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ [1]) gegen den Endpunkt der Stange stösst (siehe Fig. 34), so ist, wiederum unter Voraussetzung einer verschwindend kleinen Masse der Stange, zu setzen:

$$0 = Q(\lambda + h) - W$$

Wenn man hierein für W den in Antw. auf Frage 21 gefundenen Wert: $\frac{1}{2} \cdot \frac{FE}{L} \lambda^2$ einsetzt, so erhält man die Gleichung:

$$Q(\lambda + h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{FE}{L} \lambda^2$$

aus welcher die hervorgebrachte Verlängerung λ, und damit zugleich die entsprechende Spannung berechnet werden kann. Wenn λ sehr klein ist im Verhältnis zu h, oder auch, wenn das Gewicht Q in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit v längs einer horizontalen Stange sich bewegend gegen den Endpunkt der Stange stösst, so ist zu setzen:

$$Q h = \frac{1}{2} \cdot \frac{FE}{L} \lambda^2$$

oder:

$$Q h = \frac{1}{2} V \cdot \frac{s^2}{E}$$

worin wiederum $h = \frac{v^2}{2g}$ die der Geschwindigkeit v entsprechende Fallhöhe bezeichnet.

[1]) Siehe Erkl. 48.

Erkl. 48. Wie in meinem Lehrb. der Dynamik ausführlich erörtert wird, ist der freie Fall der Körper eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, und zwar erhält ein frei fallender Körper in jeder Sekunde eine Geschwindigkeit von 9,81 Meter, welche Grösse man ganz allgemein mit g bezeichnet und die Beschleunigung der Schwere nennt. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein aus einer bestimmten Höhe h frei herabfallender Körper auf der Erde anlangt, nennt man seine Endgeschwindigkeit und bezeichnet sie mit v, und da sich die Geschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln aus den Fallräumen oder Höhen verhalten, so ist

$$v = \sqrt{2gh}$$

d. h. wenn z. B. ein Körper aus 100 m Höhe frei herabfällt, so erlangt er eine Geschwindigkeit von

$$v = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 100}$$

oder:

$$v = 10\sqrt{2 \,.\, 9{,}81}$$

oder:

$$v = 44{,}3 \text{ m}$$

aus $v = \sqrt{2gh}$ folgt für $h = \frac{v^2}{2g}$

Frage 40. Welchen Einfluss kann unter Umständen die Verminderung der Materialmenge eines Körpers auf die Widerstandsfähigkeit desselben haben?

Antwort. Die Widerstandsfähigkeit eines Körpers gegen mechanische Arbeit oder gegen lebendige Kraft bewegter Massen kann durch Verminderung der Materialmenge unter Umständen vergrössert werden.

Denken wir uns z. B. die auf Zug in Anspruch genommene Stange hätte irgendwo eine schwache Stelle, an welcher die

Widerstandsfähigkeit gegen Zerreissen nur den 2^{ten}, 3^{ten} oder n^{ten} Teil beträgt von der Grösse s, welche dieselbe an allen übrigen Stellen besitzt, wie z. B. wenn durch Einschneiden oder Einsägen der Querschnitt an dieser Stelle auf den 2^{ten}, 3^{ten} oder n^{ten} Teil vermindert wäre, so würde in die Formel 14). an Stelle des s im allgemeinen $\frac{s}{n}$ zu setzen sein, und man erhält demnach in diesem Fall zur Ueberwindung des Elasticitätswiderstandes die mechanische Arbeit:

$$W_1 = \frac{V s^2}{2 n^2 E}$$

oder:

$$W_1 = \frac{W}{n^2}$$

Wenn man ein anderes Mal von der Stange soviel Material wegnimmt, dass alle Stellen der Querschnitte auf den 2^{ten}, 3^{ten} und n^{ten} Teil zurückgeführt werden, wenn man also für V nur allgemein $\frac{V}{n}$ in Formel 14). einsetzt, so erhält man für die betreffende mechanische Arbeit den Wert:

$$W_2 = \frac{V s^2}{2 n E}$$

oder:

$$W_2 = \frac{W}{n}$$

Dieser Wert ist aber n mal so gross als der oben für W_1 ermittelte Wert oder

$$W_2 = n \,.\, W_1$$

also ist durch Verminderung der Materialmenge die Widerstandsfähigkeit gesteigert.

e). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Wie gross ist a). der Elasticitätsmodulus, b). der Dehnungsquotient eines Eisendrahtes von 2 m Länge und 1 mm Durchmesser, welcher durch ein Gewicht von 8,5 kg um 1 mm verlängert wird?

Auflösung. Nach Antw. auf Frage 23 ist:

$$\lambda = \frac{PL}{FE}$$

und somit der gesuchte Elasticitätsmodulus

$$E = \frac{PL}{F\lambda}$$

Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen Werte und für

$$F = \frac{3{,}14 \,.\, 1}{4}$$

so erhalten wir:

$$E = \frac{8{,}5 \,.\, 2000 \,.\, 4}{3{,}14}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

E = 21656 kgr pro □mm Querschnitt

oder:

$$\varepsilon = \frac{1}{21656} \text{ oder } \varepsilon = 0{,}00004618$$

(siehe die nebenstehende Hilfsrechn. 2)

Hilfsrechnungen:

```
1). . . 8,5 . 20000 . 4 = 34 . 2000 = 68000
   68000 : 3,14 =
   6800000 : 314 = 21656
   628
    520      2).  100000 : 21656 = 0,000046177
    314            86624
    2060           133760
    1884           129936
     1760           38240
     1570           21656
      1900          165840
      1884          151592
                    142480
```

Aufgabe 2. Um wieviel streckt sich ein Kupferdraht von 10 m Länge und 2 mm Durchmesser, welcher mit einer Kraft von 24 kg gespannt wird?

Auflösung. Nach Antw. auf Frage 23 ist:

$$\lambda = \frac{PL}{FE}$$

Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen Werte in Millimeter und Kilogramm, sowie den in Erkl. 43 gegebenen Elasticitätsmodulus für gezogenes Kupfer E = 12449, und berechnen wir die Querschnittsfläche

$$F = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3{,}14}{4} = 3{,}14 \text{ qmm}$$

so ergibt sich:

$$\lambda = \frac{24 \cdot 10000}{12449 \cdot 3{,}14}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$\lambda = 6{,}14$$

d. h. der Draht verlängert sich um 6,14 mm.

Hilfsrechnung.

```
12449 . 3,14
     49796
    12449
   37347
   39089,86 | 24000000 = 6,14
              23453916
                5460840
                3908986
               15518540
               15635944
```

Aufgabe 3. Welchen Durchmesser muss ein cylindrischer Stab aus Gussstahl erhalten, wenn derselbe bei 15000 kg Belastung nur um $^1/_{3000}$ seiner ursprünglichen Länge ausgedehnt werden soll?

Auflösung. Aus der in Antw. auf Frage 23 gegebenen Formel erhalten wir für die gesuchte Querschnittsfläche

$$F = \frac{PL}{E\lambda}$$

Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte, sowie aus Erkl. 42 für E = 19561, so erhalten wir:

$$F = \frac{15000 \cdot 3000}{19561 \cdot 1}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1):

$$F = 2300 \text{ qmm oder } 23 \text{ qcm}$$

Da nun der Inhalt einer Kreisfläche

$$F = \frac{d^2\pi}{4}$$

so ergibt sich hieraus für

$$d = \sqrt{\frac{4F}{3{,}14}}$$

oder:

$$d = 2\sqrt{\frac{23}{3{,}14}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2). ist:

$$d = 5{,}4128$$

d. h. der Durchmesser des Stabes aus Gussstahl muss 5,4128 cm betragen.

Hilfsrechnungen.

1). . . . 15000 . 3000 = 45000000

```
45000000 : 19561 = 2300
39122
 58780
 58683
    9700
```

2). . . . $\sqrt{\frac{23}{3{,}14}} = \frac{1}{2}(\log 23 - \log 3{,}14)$

$$\log 23 = 1{,}3617278$$
$$-\log 3{,}14 = -0{,}4969296$$
$$0{,}8647982 \cdot \frac{1}{2}$$
$$0{,}4323991$$

mithin:

$$\text{num-log}\sqrt{\frac{23}{3{,}14}} = 2{,}7064$$
$$\cdot 2$$
$$5{,}4128$$

Aufgabe 4. Welche Kraft ist nötig, um a). einen Bleidraht, b). einen Silberdraht von 1,59 m Länge und 4,5 mm Durchmesser um 2 mm länger zu ziehen?

Auflösung. Reduzieren wir die in Antw. auf Frage 23 gegebene Formel auf die gesuchte Grösse P, so ergibt sich:

$$P = \frac{\lambda \, . \, FE}{L}$$

a). Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte und aus Erkl. 13 für E = 1803, so ergibt sich:

$$P = \frac{2 \cdot \frac{4,5 \, . \, 4,5 \, . \, 3,14}{4} \cdot 1803}{4500}$$

oder wenn man die in Zähler und Nenner enthaltenen gemeinschaftlichen Faktoren gegeneinander hebt:

$$P = \frac{0,3 \, . \, 0,9 \, . \, 1,57 \, . \, 601}{20}$$

oder:

$$P = 12,738$$

d. h. der Bleidraht erfordert eine Kraft von 12,738 kg.

b). Setzen wir aber in die obige Gleichung aus Erkl. 13 für E = 7357, so ergibt sich:

$$P = \frac{2 \cdot \frac{4,5 \, . \, 4,5 \, . \, 3,14}{4} \cdot 7357}{4500}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$P = 51,977$$

d. h. der Silberdraht erfordert eine Kraft von 51,977 kg.

NB. Dasselbe Resultat würde sich ergeben haben, wenn man anstatt der direkten Berechnung aus den gegebenen Grössen, das erste Resultat zu Hilfe genommen hätte; da die Kräfte P_1 und P_2 in demselben Verhältnis stehen wie die Elasticitätsmoduli der beiden Körper, so muss

$$12,738 : P_2 = 1803 : 7357$$

oder:

$$P_2 = \frac{12,738 \, . \, 7357}{1803} = 51,977$$

sein. (siehe Hilfsrechn. 3)

Hilfsrechnungen:

1). . . . 0,3 . 0,9 = 0,27 . 1,57 . 601

```
 1,57 . 601
        157
       942
0,27 . 943,57
      660499
     188714
20 : 254,7639 = 12,738
```

2). $\frac{2 \, . \, 4,5 \, . \, 4,5 \, . \, 3,14 \, . \, 7357}{4 \, . \, 4500} = 0,9 \, . \, 1,57 \, . \, 7357$

```
= 1,413 . 7357
       22071
       7357
      29428
      7357
200 : 10395,441
= 2 : 103,954 = 51,977
```

3). . . $\frac{12,738 \, . \, 7357}{1803} = \frac{4,246 \, . \, 7357}{601}$

```
4,246 . 7357
       44142
      29428
     14714
    20428
601 | 31237,822 = 51,977
      3005
       1187
        601
        5868
        5409
         4592
         4207
```

Aufgabe 5. Wie lang ist ein Eisendraht von 5,3 mm Drahtdicke, wenn derselbe durch eine Kraft von 75 kg eine Verlängerung von 3,76 mm erfährt?

Auflösung. Die Gleichung in Antw. auf Frage 23 auf die Unbekannte reduziert, gibt:

$$L = \frac{\lambda \, . \, FE}{P}$$

Setzen wir dafür die entsprechenden Zahlenwerte und aus Erkl. 13 für E = 20869 ein, so ergibt sich:

Hilfsrechnung.

$$\frac{3{,}76 \,.\, 5{,}3 \,.\, 5{,}3 \,.\, 3{,}14 \,.\, 20869}{4 \,.\, 75}$$

$$= \frac{3{,}76 \,.\, 5{,}3}{1128 \atop 1880} \,.\, \frac{5{,}3 \,.\, 3{,}14}{942 \atop 1570} \,.\, 20869$$

(19,928 . 16,642 . 20869) : 300

= log 19,928 + log 16,642 + log 20869 — log 300

log 19,928	=	1,2994637
+ log 16,642	=	1,2212055
+ log 20869	=	4,3195016
		6,8401708
— log 300	=	—2,4771213
log L	=	4,3630495

mithin:
num-log L = 23070

$$L = \frac{3{,}76 \cdot \frac{5{,}3 \,.\, 5{,}3 \,.\, 3{,}14}{4} \cdot 20869}{75}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

L = 23070

d. h. die Länge des Eisendrahts beträgt 23070 mm oder 23,07 m.

Aufgabe 6. Wenn für den preuss. Quadratzoll Querschnitt in Neupfunden für Messingdraht

der Elasticitätsmodulus E = 13500000
„ Tragmodulus T = 18600
„ Festigkeitsmodulus K = 68000
„ Sicherheitsmodulus S = 11000

beträgt, wie gross sind dann diese vier Moduli, berechnet auf den Quadratcentimeter Querschnitt und das Kilogramm, wenn der preuss. Fuss à 12 Zoll = 313,85 mm und das Kilogramm = 2 Neupfund hat?

Auflösung. Wenn 12 Zoll = 313,85 mm oder 31,38 cm betragen, so beträgt 1 Zoll $= \frac{31{,}38}{12} =$ 2,6 cm, und somit enthält 1 □ Zoll = 2,6 . 2,6 = 6,76 □ cm, somit ist 1 Quadratzoll an Fläche 6,76 mal so gross als 1 Quadratcentimeter und somit auch die auf den Quadratzoll bezogenen Moduli 6,76 mal so gross als die auf den Quadratcentimeter bezogenen. In Neupfund berechnet ist aber jeder Modulus doppelt so gross als in Kilogrammen berechnet, und somit haben wir die nebenstehenden Zahlengrössen durch 2 . 6,76 = 13,52 zu dividieren, um die Moduli in Bezug auf Quadratcentimeter und Kilogramm zu erhalten. Hieraus ergibt sich nach den nebenstehenden Hilfsrechnungen für

E =	998521	pro qcm	oder 9985	pro qmm
T =	1376	„ „	„ 13,76	„ „
K =	5030	„ „	„ 50,3	„ „
S =	814	„ „	„ 8,14	„ „

Hilfsrechnungen.

```
13500000oo : 13,52 = 998521
12168
 13320
 12168
  11520
  10816
    7040
    6760
     2800
     2704
      960
```

```
1860000 : 13,52 = 1376
1352
 5080
 4056
 10240
  9464
   7760
```

```
6800000 : 13,52 = 5030
6760
 4000
```

```
1100000 : 13,52 = 814
10816
  1840
  1352
  4880
```

Aufgabe 7. Wie gross sind die Moduli E, T, K und S (siehe vorige Aufgabe) in Wiener Pfund pro Wiener Quadratzoll, wenn

dieselben pro Quadratcentimeter und Kilogramm die oben berechneten Werte haben und wenn 1 Wiener Fuss = 316 mm und 1 Wiener Pfund = 560 g enthält?

Hilfsrechnung.

$$0{,}56x = \frac{31{,}6}{12} \cdot \frac{31{,}6}{12}$$

oder:

$$0{,}56x = \frac{7{,}9}{3} \cdot \frac{7{,}9}{3}$$

oder:

$$x = \frac{7{,}9 \cdot 7{,}9}{3 \cdot 3 \cdot 0{,}56}$$

7,9 . 7,9 3 . 3 . 0,56 = 9 . 0,55 = 5,04

711
553

5,04 | 62,41 = 12,38
504
1201
1008
1930
1512
4180
4032

Auflösung. Die Aufgabe löst sich am leichtesten auf dem umgekehrten Weg, den wir bei Lösung der vorigen Aufgabe einschlugen, oder auf dem Weg der Kettenrechnung, wie folgt:

Wieviel Wiener Pfund kommen auf 1 Quadratzoll, wenn

$$1 \;\square\,\text{Zoll} = \frac{316}{12} \cdot \frac{316}{12}\,\text{qcm}$$

$$1\,\text{qcm} = E\,\text{kg}$$

$$\text{und}\quad 0{,}56\,\text{kg} = 1\,\text{Pfund}$$

Die Multiplikation dieser Gleichungen gibt: $0{,}56x = \frac{31{,}6 \cdot 31{,}6}{12 \cdot 12}$

und somit ist:

$$x = 12{,}38 \text{ (siehe Hilfsrechn.)}$$

d. h. es sind die pro Quadratcentimeter und Kilogramm für E, T, K und S gegebenen Werte mit 12,38 zu multiplizieren, um die pro Quadratzoll und Wiener Pfund giltigen Werte zu ermitteln.

Aufgabe 8. Ein Stab von Tannenholz hat einen Querschnitt von 1,5 qcm und wird durch ein Gewicht von 1200 kg gerade zerrissen; wie gross ergibt sich daraus der Festigkeitsmodulus K des Tannenholzes?

Auflösung. Bewirkt bei 1,5 qcm Querschnitt eine Belastung von 1200 kg das Zerreissen, so genügt nach Antw. auf Frage 23 für 1 qcm Querschnitt bereits

$$\frac{1200}{1{,}5} = 800 \text{ kg}$$

und für 1 qmm Querschnitt

$$\frac{800}{100} = 8 \text{ kg Belastung.}$$

Es ist somit der Festigkeitsmodulus des Tannenholzes = 800 (pro Quad.-Centimeter) oder 8 (pro Quad.-Millimeter).

Aufgabe 9. Welches Gewicht P ist zum Zerreissen eines Messingdrahts von 1,25 mm Durchmesser erforderlich, und welches kann er mit Sicherheit tragen?

Hilfsrechnungen.

1). . . . 1,25 . 1,25 . 3,14
625
1500
1,5625 . 3,14
62500
15625
46875
4 | 4,906250 = 1,2265

Auflösung. Nach Antwort auf Frage 23 ist $P = Fs$; die Querschnittsfläche ist in diesem Fall:

$$F = \frac{1{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 3{,}14}{4}$$

oder:

$$F = 1{,}2265 \text{ qmm (siehe Hilfsrechn. 1)}$$

Nach Erkl. 28 ist die absolute Festigkeit des ungeglühten Messingdrahts pro Quadrat-Millimeter $s = 59{,}5$, folglich ist die zum Zerreissen nötige Kraft

$$P = 1{,}2265 \cdot 59{,}5$$

oder:

2). 1,2265 . 59,5
61325
100385
61325
71,97675 : 6 = 11,99
1
11
59
57

P = 71,97675 kg (siehe Hilfsrechn. 2)

Nimmt man, wie gewöhnlich, sechsfache Sicherheit, so ist das Gewicht, welches der gegebene Messingdraht tragen kann:

$$P = \frac{71{,}97675}{6}$$

oder:

P = ca. 12 kg (siehe Hilfsrechn. 2)

Aufgabe 10. Wie stark muss eine schmiedeeiserne Tragstange von quadratischem Querschnitt sein, wenn sie eine Last von 40 Zentner mit Sicherheit tragen soll?

Auflösung. Nach Antw. auf Frage 27 ist:

$$a = \sqrt{\frac{P}{S}}$$

Der Sicherheitskoeffizient S ist nach der auf S. 23 gegebenen Tabelle für Schmiedeeisen bei ruhender Belastung pro Quadratcentimeter = 900, und 40 Zentner sind = 2000 kg; setzen wir diese Werte in die obige Gleichung, so ergibt sich:

$$a = \sqrt{\frac{2000}{900}}$$

oder:

$$a = \sqrt{2{,}2222\ldots.}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$a = 1{,}49$$

das heisst der quadratische Querschnitt der schmiedeeisernen Tragstange muss 1,49 cm oder 14,9 mm Kante bekommen.

Nehmen wir aber den in Erkl. 28 für mittleres Schmiedeeisen gegebenen Wert von 40 kg pro Quadratmillimeter und sechsfache Sicherheit, so ist in diesem Fall:

$$S = \frac{40}{6} \quad \text{oder} \quad S = 6^2/_3$$

und somit:

$$a = \sqrt{\frac{2000 \,.\, 3}{20}}$$

oder:

$$a = \sqrt{300}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$a = 17{,}32$$

d. h. es ergibt sich alsdann für den quadratischen Querschnitt der schmiedeeisernen Stange eine Kantenlänge von 17,32 mm oder 1,732 cm.

Hilfsrechnungen.

1). . . . $\sqrt{2{,}2222} = 1{,}49$
1
2 | 122
96
28 | 2622
2601

2). . . . $\sqrt{3|00} = 17{,}32$
1
2 | 200
189
34 | 1100
1029
346 | 7100

Aufgabe 11. Welchen Durchmesser hat man dem Kreisquerschnitt eines schmiedeeisernen cylindrischen Stabes zu geben, wenn derselbe

a). 10000 kg sicher tragen soll,
b). durch 10000 kg bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt werden soll,
c). durch 10000 kg zerreissen soll?

Hilfsrechnungen.

1). . . $\sqrt{\frac{400}{28,26}} = \frac{1}{2}(\log 400 - \log 28,26)$

$$\begin{aligned} \log 400 &= 2,6020600 \\ -\log 28,26 &= -1,4511722 \\ & 1,1508878 \\ & \cdot \tfrac{1}{2} \\ \log d &= 0,5754439 \end{aligned}$$

mithin:
num-log d oder $d = 3,7536$

2). . . $\sqrt{\frac{6000}{3,14}} = \frac{1}{2}(\log 6000 - \log 3,14)$

$$\begin{aligned} \log 6000 &= 3,7781513 \\ -\log 3,14 &= -0,4969296 \\ & 3,2812217 \\ & \cdot \tfrac{1}{2} \\ \log d &= 1,6406108 \end{aligned}$$

mithin:
num log d oder $d = 43,713$

3). . . $\sqrt{\frac{100}{10,99}} = \frac{1}{2}(\log 100 - \log 10,99)$

$$\begin{aligned} \log 100 &= 2,0000000 \\ -\log 10,99 &= -1,0409977 \\ & 0,9590023 \\ & \cdot \tfrac{1}{2} \\ \log d &= 0,4795011 \end{aligned}$$

mithin:
num-log d oder $d = 3,0165$

4). . . $\sqrt{\frac{40000}{3,14 \,.\, 40}} = \sqrt{\frac{1000}{3,14}} = \frac{1}{2}(\log 1000 - \log 3,14)$

$$\begin{aligned} \log 1000 &= 3,0000000 \\ -\log 3,14 &= -0,4969296 \\ & 2,5030704 \\ & \cdot \tfrac{1}{2} \\ \log d &= 1,2515352 \end{aligned}$$

mithin:
num-log d oder $d = 17,846$

Auflösung. a). Nach Antw. auf Frage 27 ist der Durchmesser

$$d = \sqrt{\frac{4\,P}{\pi\, S}}$$

Nehmen wir nun wie in der vorigen Aufgabe den Sicherheitsmodulus für Schmiedeeisen pro Quadratcentimeter = 900 an, so ist:

$$d = \sqrt{\frac{4 \,.\, 10000}{3,14 \,.\, 900}}$$

oder:

$$d = \sqrt{\frac{4 \,.\, 100}{3,14 \,.\, 9}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$d = 3,75 \text{ cm oder } 37,5 \text{ mm}$$

Nehmen wir aber nach Erkl. 28 den Festigkeitsmodulus pro Quadratmillimeter = 40 kg und sechsfache Sicherheit, dann haben wir in die obige Formel an Stelle des S = $\frac{40}{6}$ = $6^2/_3$ zu setzen und erhalten dann:

$$d = \sqrt{\frac{4 \,.\, 10000 \,.\, 3}{3,14 \,.\, 20}}$$

oder:

$$d = \sqrt{\frac{500 \,.\, 4 \,.\, 3}{3,14}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$d = 43,7 \text{ mm oder } 4,37 \text{ cm}$$

b). Nach Tabelle auf Seite 23 ist der Tragmodulus für Schmiedeeisen T = 1400 pro Quadratcentimeter. Setzen wir diesen Wert an Stelle des S in die obige Formel, so ergibt sich:

$$d = \sqrt{\frac{4\,P}{\pi\, T}}$$

oder:

$$d = \sqrt{\frac{40000}{3,14 \,.\, 1400}}$$

oder:

$$d = \sqrt{\frac{400}{3,14 \,.\, 14}}$$

oder:

$$d = \sqrt{\frac{100}{1,57 \,.\, 7}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrchn. 3).:

$$d = 3,016 \text{ cm oder } 30,16 \text{ mm}$$

c). Nehmen wir nach Erkl. 35 den Festigkeitsmodulus für Schmiedeeisen (Stangeneisen) = 40 pro Quadratmillimeter und setzen wir diesen Wert in die obige Formel, so ergibt sich:

$$d = \sqrt{\frac{40000}{3{,}14 \cdot 40}}$$

oder:

$$d = 17{,}8 \text{ mm oder } 1{,}78 \text{ cm.}$$

Darnach würde also ein Rundeisenstab von 17,8 mm Durchmesser bei einer Zugbelastung von 10000 kg oder 200 Zentner gerade zerreissen; ein solcher von 30,16 mm Stärke würde die genannte Belastung zwar tragen, sich dabei aber sehr stark und bleibend ausdehnen, während man demselben einen Durchmesser von 37,5 bis 43,7 mm geben müsste, wenn er eine ruhige, stossfreie Zugbelastung von 10000 kg mit Sicherheit tragen soll.

Aufgabe 12. Wenn eine Hängesäule aus Tannenholz bei 10facher Sicherheit 13440 kg tragen soll und der Querschnitt derselben ein Rechteck bilden soll, dessen anstossende Kanten sich zu einander verhalten wie 2 : 3, wie lang und wie breit muss dann der Querschnitt genommen werden? (s. Aufgabe 8.)

Auflösung. Nach Auflösung der Aufg. 8 ist der Festigkeitsmodulus des Tannenholzes = 800, also bei 10facher Sicherheit der Sicherheitskoeffizient S = 80, übereinstimmend mit der Tabelle Seite 23, und somit ist, nach Erkl. 43 die Querschnittsfläche

$$F = \frac{13440}{80}$$

oder:

$$F = 168$$

Nennen wir die beiden Seiten der rechteckigen Querschnittsfläche a und b, so ist:

$$a : b = 1 : \frac{3}{2}$$

und da $a \,.\, b = F$ oder $a \cdot \frac{3}{2} a = F$, so ergibt sich für

$$a = \sqrt{\frac{168 \cdot 2}{3}}$$

oder:

$$a = \sqrt{112}$$

oder:

$$a = 10{,}58 \text{ cm}$$ (siehe Hilfsrechn.)

und

$$b = \frac{3}{2} \cdot 10{,}58$$

oder:

$$b = 15{,}87 \text{ cm}$$

Hilfsrechnung.

$\sqrt{112} = 10{,}58$
1
20|1200
 1025
210|17500

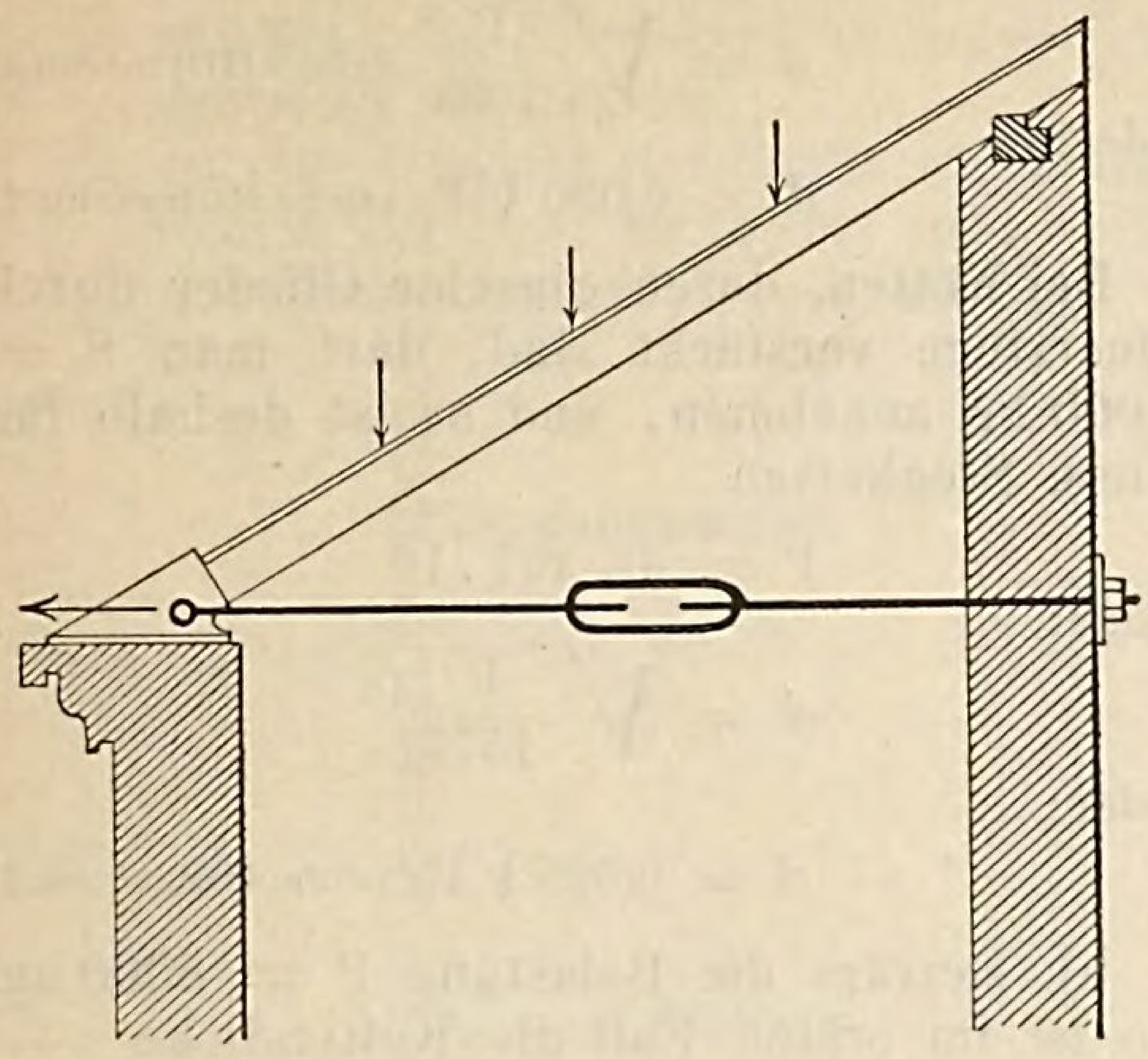
Aufgabe 13. Ein Dachstuhl übt an seinem Fussende einen Horizontalschub von 10000 kg aus, der durch eine horizontale schmiedeeiserne cylindrische Querstange (s. Fig. 26) aufgenommen wird. Wie gross ist der Durchmesser der letzteren, und welche Ausdehnung erleidet dieselbe bei einer Länge von 10 m, wenn die zulässige Spannung pro Quadratcentimeter zu 600 kg angenommen wird?

Auflösung. Nach Antw. auf Frage 27 ist:

$$d = \sqrt{\frac{4\,P}{\pi\, s}}$$

oder die entsprechenden Werte und S statt s eingesetzt:

Figur 35.



Hilfsrechnungen:

1). $\sqrt{\frac{40000}{3,14.600}} = \sqrt{\frac{100}{1,57.3}} = \sqrt{\frac{100}{4,71}} =$

$\frac{1}{2}\left(\log 100 - \log 4,71\right)$

$$\begin{array}{rl} \log 100 = & 2,0000000 \\ -\log 4,71 = & 0,6730209 \\ \hline & 1,3269791 \\ & \cdot \frac{1}{2} \\ \hline \log d = & 0,6634895 \end{array}$$

mithin:

num log d oder $d = 4,6077$

2). . . . $\frac{600 . 10 \text{ m}}{2080000} = \frac{3 \text{ m}}{1040}$

$$\begin{array}{l} 3000 : 1040 = 0,0029 \\ 2080 \\ \hline 9200 \\ 9360 \end{array}$$

oder:

$$d = \sqrt{\frac{4 . 10000}{3,14 . 600}}$$

$$d = 4,6 \text{ cm}$$

Die Verlängerung, welche die Stange erfährt, ist nach Antw. auf Frage 22:

$$\lambda = \frac{P}{F} \cdot \frac{L}{E}$$

oder da nach Antw. auf Frage 26 für

$$\frac{P}{F} = S$$

gesetzt werden kann, so ist:

$$\lambda = \frac{S . L}{E}$$

Nach Erkl. 15 ist E pro Quadratmillimeter = ca. 20800, also pro Quadratcentimeter = 2080000, und somit:

$$\lambda = \frac{600 . 10}{2080000}$$

oder:

$$\lambda = 0,0029 \text{ m oder } 2,9 \text{ mm}$$

Aufgabe 14. Der Durchmesser d des Rundeisens zur Erzeugung einer Kette, welche einer Spannung = P widersteht, soll ermittelt werden, wenn der Sicherheitskoeffizient S = 700 kg pro Quadratcentimeter beträgt. b). Welche Kettendicke ergibt sich bei einer Belastung von 8000 kg?

Hilfsrechnungen:

1). . . . $\frac{2\, d^2 . 3,14 . 700}{4} = d^2 . 157 . 7$

also:

$P = 1099\, d^2$ und somit $d = \sqrt{\frac{P}{1099}}$

Auflösung. Da die Zerstörung in zwei gegenüberliegenden Querschnitten zugleich erfolgen wird, so ist, da ein Querschnitt

$$F = \frac{d^2 \pi}{4}$$

beträgt, und nach Erkl. 38 P = FS in diesem Fall:

$$P = \frac{2 . d^2 . \pi}{4} \cdot S$$

oder:

$$P = \frac{2 . d^2 . 3,14 . 700}{4}$$

und hieraus ergibt sich für

$$d = \sqrt{\frac{P}{1099}} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 1)}$$

oder:

$$d = 0{,}030 \sqrt{P} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 2)}$$

Bei Ketten, deren einzelne Glieder durch Querstege verstärkt sind, darf man S = 1000 kg annehmen, und es ist deshalb für diese Stegketten

$$P = d^2 . 157 . 10$$

oder:

$$d = \sqrt{\frac{P}{1570}}$$

oder:

$$d = 0{,}025 \sqrt{P} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 3)}$$

b). Beträgt die Belastung P = 8000 kg, so ist im ersten Fall die Kettendicke

$$d = 0{,}03 \sqrt{8000}$$

oder:

$$d = 0{,}03 . 89{,}44 \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 4)}$$

oder:

$$d = 2{,}6832 \text{ cm}$$

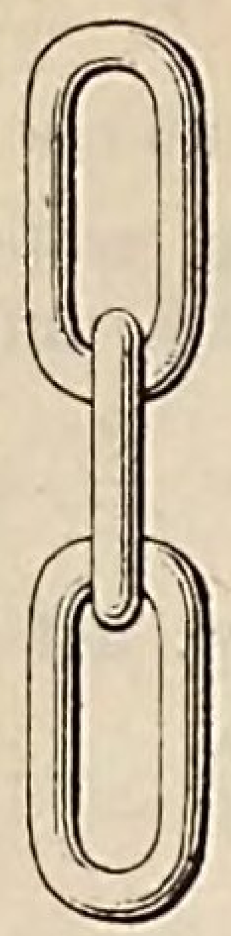
für den zweiten Fall ist

$$d = 0{,}025 . 89{,}44$$

oder:

$$d = 2{,}236 \text{ cm.}$$

Figur 36.



Hilfsrechnungen.

2). . . . $\sqrt{\frac{1}{1099}} = \frac{1}{2}\left(\log 1 - \log 1099\right)$

$$\begin{aligned} \log 1 &= 4{,}0000000-4 \\ -\log 1099 &= 3{,}0409977 \\ & \quad 0{,}9590023-4 \\ & \quad \cdot \tfrac{1}{2} \\ \log \sqrt{\frac{1}{1099}} &= 0{,}4795011-2 \end{aligned}$$

mithin: $\sqrt{\frac{1}{1099}} = 0{,}030165$

3). . . . $\sqrt{\frac{1}{1570}} = \frac{1}{2}\left(\log 1 - \log 1570\right)$

$$\begin{aligned} \log 1 &= 4{,}0000000-4 \\ -\log 1570 &= 3{,}1958997 \\ & \quad 0{,}8041003-4 \\ & \quad \cdot \tfrac{1}{2} \\ \log \sqrt{\frac{1}{1570}} &= 0{,}4020501-1 \end{aligned}$$

mithin: $\sqrt{\frac{1}{1570}} = 0{,}025238$

4). . . $\sqrt{80|00} = 89{,}44$

```
     64
  16|1600
     1521
  178|7900
      7136
 1788|76400
      71536
```

Aufgabe 15. Welchen Querschnitt muss eine 3,15 m lange Hängesäule aus Fichtenholz erhalten, welche auf die Dauer 10000 kg Last mit Sicherheit tragen soll:

a). aus dem Tragmodulus,
b). aus dem Sicherheitsmodulus berechnet;
c). wie breit ist in beiden Fällen der quadratische Querschnitt;
d). ist das Gewicht der Säule von merklichem Einfluss, wenn das spez. Gew. des Fichtenholzes = 0,47 beträgt?

Hilfsrechnungen.

1). . . . 1000 : 27 = 37,04
```
81
---
190
189
---
100
```

2). . . . $\sqrt{37{,}04} = 6{,}086$
```
 36
----
120|10400
     9664
1216|73600
```

3). . . . $\sqrt{1|25} = 11{,}18$
```
2|25
  21
22|400
   221
222|17900
    17824
```

4). . . . 315 cm . 1 = 315 Kubikcentimeter.

Da jeder Kubikcentimeter Wasser 1 Gramm wiegt, so wiegt jeder Kubikcentimeter Fichtenholz 0,47 g und somit wiegen 315 ccm
```
315 . 0,47
----------
   2205
  1260
----------
  148,05 g oder 0,148 kg
```

Auflösung. a). Nach Tabelle Seite 32 ist der Tragmodulus T = 270 und somit die Querschnittsfläche

$$F = \frac{10000}{270}$$

oder:

$$F = 37{,}04 \text{ qcm}$$ (siehe Hilfsrechn. 1)

b). Nach derselben Tabelle ist der Sicherheitsmodulus S = 80 und somit die Querschnittsfläche

$$F = \frac{10000}{80} \text{ oder } 125 \text{ qcm}$$

c). Es ist demnach im ersten Fall die Breite des Querschnitts

$$a = \sqrt{37{,}04}$$

oder:

$$a = 6{,}086 \text{ cm}$$ (siehe Hilfsrechn. 1)

für den zweiten Fall ist

$$a = \sqrt{125}$$

oder:

$$a = 11{,}18 \text{ cm}$$ (siehe Hilfsrechn. 3)

d). Wird das Eigengewicht der Säule berücksichtigt, so ist nach Antw. auf Frage 34 die Querschnittsfläche

$$F = \frac{P}{s - l\gamma}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte und für s zunächst den Tragmodulus eingesetzt:

$$F = \frac{10000}{270 - 0{,}148}$$

denn $l\gamma = 0{,}148$, da auf jeden Quadratcentimeter Querschnittsfläche bei 3,15 m Länge und 0,47 spez. Gewicht = 0,148 kg Eigengewicht kommen (siehe Hilfsrechn. 4).

Setzen wir aber in die obige Formel den Sicherheitsmodulus ein, so ist:

$$F = \frac{10000}{80 - 0{,}148}$$

Das Gewicht der Säule ist also von unmerklichem Einfluss.

Aufgabe 16. a). Welchen Durchmesser muss eine 20 m lange Schachtpumpenstange haben, wenn dieselbe ausser ihrem eigenen Gewicht noch 10000 kg zu tragen hat und die nötige Dauerhaftigkeit besitzen soll? (Spez. Gew. = 7,7.) b). Wie gross ist das Gewicht des Gestänges und c). welche Verlängerung erleidet dasselbe?

Auflösung. a). Nach Antw. auf Frage 34 ist die Querschnittsfläche

$$F = \frac{P}{s - l\gamma}$$

Hilfsrechnungen.

1). . . $\sqrt{\frac{40000}{3{,}14 \,.\, 584{,}6}} = \frac{1}{2}\Big(\log 40000 - (\log 3{,}14 + \log 584{,}6)\Big)$

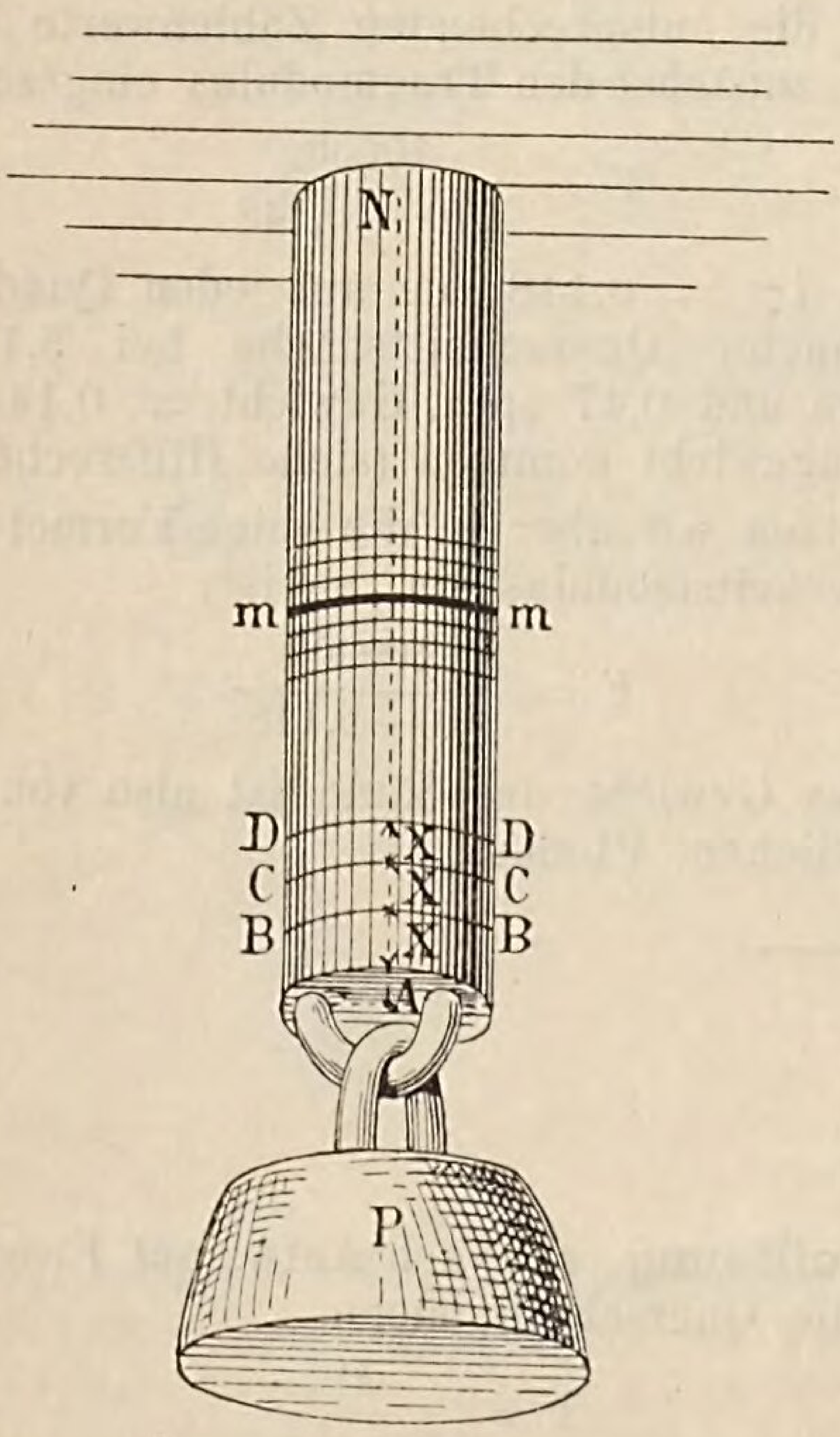
$$\begin{aligned} \log 3{,}14 &= 0{,}4969296 \\ +\log 584{,}6 &= 2{,}7668588 \\ &\ 3{,}2637884 \\ \log 40000 &= 4{,}6020600 \\ & -3{,}2637884 \\ &\ 1{,}3382716 \\ &\ \cdot \tfrac{1}{2} \\ \log d &= 0{,}6641358 \end{aligned}$$

mithin:
num-log d oder $d = 4{,}6146$ cm

2). . . . $\frac{4{,}6 \,.\, 4{,}6 \,.\, 3{,}14}{4} = 2{,}3 \,.\, 2{,}3 \,.\, 3{,}14$

$$\begin{array}{r} 69 \\ 46 \\ \hline 5{,}29 \,.\, 3{,}14 \\ \hline 2116 \\ 529 \\ 1587 \\ \hline 16{,}6106 \end{array}$$

Figur 37.



Da diese Querschnittsfläche ein Kreis ist, dessen Durchmesser wir d nennen wollen, so ist auch:

$$F = \frac{d^2\pi}{4}$$

also auch

$$\frac{d^2\pi}{4} = \frac{P}{s - l\gamma}$$

und hieraus ergibt sich für

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi(s - l\gamma)}}$$

Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen Werte und berechnen zunächst das auf jeden qcm Querschnitt entfallende Gewicht der 20 m oder 2000 cm langen Stange

$$l\gamma = 2000 \,.\, 7{,}7$$

oder:

$$l\gamma = 15400 \text{ g}$$

oder:

$$l\gamma = 15{,}4 \text{ kg}$$

so erhalten wir:

$$d = \sqrt{\frac{4 \,.\, 10000}{3{,}14\,(600 - 15{,}4)}}$$

wobei wir die in Tabelle Seite 32 für Zug unter b. gegebene Beanspruchungsweise zu Grunde legen, wonach $s = 600$.

Aus obiger Gleichung ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$d = 4{,}6146 \text{ cm.}$$

b). Das Gewicht des Gestänges beträgt pro Quadratcentimeter Querschnittsfläche, nach obiger Berechnung 15,4 kg; soll also das Gesamtgewicht berechnet werden, so ist die Querschnittsfläche

$$F = \frac{4{,}6 \,.\, 4{,}6 \,.\, 3{,}14}{4}$$

oder:

$$F = 16{,}61 \text{ qcm}$$ (siehe Hilfsrechn. 2)

mit 15,4 zu multiplizieren, und somit ist das Gesamtgewicht

$$G = 16{,}61 \,.\, 15{,}4 \text{ kg}$$

oder:

$$G = 255{,}794 \text{ kg}$$

c). Die durch das Gewicht P erzeugte Verlängerung ist nach Antw. auf Frage 22:

$$\lambda = \frac{PL}{FE}$$

hierzu kommt aber noch die Verlängerung, welche durch das Eigengewicht G der Stange erzeugt wird. Um diese zu ermitteln, denken wir uns die Stange (siehe Fig. 37) wieder aus einer unendlichen Menge horizontaler Schichten bestehend. Während nun

auf die oberste Schicht, in welcher Punkt N liegt, das Gesamtgewicht G verlängernd wirkt, wirkt auf die unterste Schicht, in welcher A liegt, gar nichts von dem Eigengewicht G der Stange abwärts ziehend. Auf die mittelste Schicht *mm* wirkt offenbar $\frac{1}{2}$G abwärts ziehend, während auf die erste, zweite, dritte oder n^{te} über *mm* gelegene Schicht $\frac{1}{2}G + g$, $\frac{1}{2}G + 2g$, $\frac{1}{2}G + 3g \ldots$ $\frac{1}{2}G + ng$ verlängernd wirkt, wenn g das Gewicht einer solchen Schicht bedeutet.

Dagegen wirkt auf die erste, zweite, dritte, n^{te} unter *mm* gelegene Schicht je $\frac{1}{2}G - g$, $\frac{1}{2}G - 2g$, $\frac{1}{2}G - 3g \ldots \frac{1}{2}G - ng$ verlängernd, und somit ist offenbar die Gesamtverlängerung der Einzelschichten dieselbe, als wenn auf die ganze Länge der Stange das Gewicht $\frac{1}{2}$G (d. h. das arithmetische Mittel aus der obersten und untersten, der zweitobersten und zweituntersten etc.) wirkte, und es ist daher, wenn wir für

$$P = \frac{1}{2}G$$

einsetzen:

$$\lambda_2 = \frac{\frac{1}{2}GL}{FE}$$

und somit die durch die Belastung P und und das Eigengewicht G hervorgerufene Verlängerung:

$$\lambda = \frac{PL}{FE} + \frac{\frac{1}{2}GL}{FE}$$

oder:

$$\lambda = \frac{L}{FE}\left(P + \frac{1}{2}G\right)$$

Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen resp. berechneten Zahlenwerte und aus der in Erkl. 15 gegebenen Tabelle für E rund 20800 pro Quadratmillimeter, also 2080000 pro Quadratcentimeter, dann ergibt sich:

$$\lambda = \frac{2000}{16{,}61 \,.\, 2080000}\left(10000 + \frac{1}{2} \cdot 255{,}794\right)$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 4).:

$$\lambda = 0{,}6 \text{ cm oder } 6 \text{ mm.}$$

Hilfsrechnungen.

3). . . . 16,61 . 15,4
6644
8305
1661
255,794

4). . . $\frac{1}{2} \cdot 255{,}794 = 127{,}897$ oder ca. 128 kg
+ 10000
10128

$$\frac{2000 \,.\, 10128}{16{,}61 \,.\, 2080000} = \frac{633}{16{,}61 \,.\, 65}$$

16,61 . 65
8305
9966
1079,65 oder ca. 1080 : 6330 = ca. 0,6 cm.
6480

Aufgabe 17. Welche Belastung trägt unter Berücksichtigung des Eigengewichts mit Sicherheit ein prismatischer, senkrecht freihängender Stab von weichem Gussstahl, dessen Querschnitt ein reguläres Sechseck von 1,2 cm Kante und dessen freie Länge l = 5 m misst?

Auflösung. Nach Antw. auf Frage 34 ist die Tragfähigkeit

$$P = F\,(s - l\gamma)$$

Wir berechnen zunächst den Querschnitt F, welcher nach Angabe ein reguläres Sechseck bildet. Dieses Sechseck können wir uns vom Mittelpunkt aus in sechs kongruente,

Hilfsrechnung.

1). 6 . 1,2 . 1,2 . 0,433
= 6 . 1,44 . 0,433
= 8,64 . 0,433
2652
2652
3456
3,74772 oder ca. 3,75

2). . . 1500 — 3,95 = 1496,05
. 3,75
748025
1047235
448815
5610,1875

gleichseitige Dreiecke zerlegt denken, deren Höhe

$$h = \frac{s}{2}\sqrt{3} \quad \text{oder} \quad h = 0{,}866\, s$$

beträgt, wenn s die Seite eines solchen Dreiecks bezeichnet. Da nun der Flächeninhalt eines Dreiecks $= \frac{1}{2} h\, s$, oder für

$$h = 0{,}866\, s$$

gesetzt:

$$\Delta = 0{,}433\, s^2$$

ist, so ergibt sich für die aus 6 solchen Dreiecken bestehende Querschnittsfläche

$$F = 6 \,.\, 1{,}2 \,.\, 1{,}2 \,.\, 0{,}433$$

oder:

$$F = 3{,}75 \text{ qcm}$$ (siehe Hilfsrechn. 1)

Nach der in Erkl. 15 enthaltenen Tabelle ist das spez. Gew. von Gussstahl $\gamma = 7{,}9$, und da der Stab 5 m oder 500 cm lang ist, so beträgt sein Gewicht pro Quadratcentimeter Querschnittsfläche

$$l\gamma = 500 \,.\, 7{,}9 \text{ Gramm}$$

oder:

$$l\gamma = 3950 \text{ g oder } 3{,}95 \text{ kg}$$

Setzen wir nun diese nebst den gegebenen Werten in die obige Formel, so ergibt sich:

$$P = 3{,}75\,(1500 - 3{,}95)$$

(da nach Tabelle auf Seite 32 $S = 1500$ beträgt)
oder:

$$P = 5610{,}1875$$ (siehe Hilfsrechn. 2)

Aufgabe 18. Wenn man einem eisernen Gestänge von 315 m Länge und 37800 kg Belastung einen Querschnitt von 90 qcm gibt, wie gross hat man dann den Sicherheitskoeffizient pro Quadratcentimeter in Rechnung gestellt? ($\gamma = 7{,}6$)

Hilfsrechnungen.

1). . . . 31500 . 7,6
1890
2205
239400,0 g oder 239,4 kg

2). . . 37800 : 90 oder 3780 : 9 = 420
18 +240
660

Auflösung. Nach Antwort auf Frage 34 ist der Sicherheitskoeffizient

$$S = \frac{P}{F} + l\gamma$$

l beträgt 315 m oder 31500 cm und $\gamma = 7{,}6$ und somit:

$$l\gamma = 31500 \,.\, 7{,}6 \text{ g}$$

oder:

$$l\gamma = \text{ca. } 240 \text{ kg}$$ (siehe Hilfsrechn. 1)

Setzen wir diesen Wert nebst den gegebenen Werten in die obige Formel, so ergibt sich:

$$S = \frac{37800}{90} + 240$$

oder:

$$S = 660$$ (siehe Hilfsrechn. 2)

Aufgabe 19. Bei welcher Länge wird ein Eisendraht mit durchgängig gleichem Querschnitt von 3,5 qmm oder 0,035 qcm durch sein eigenes Gewicht zerrissen werden, wenn sein spez. Gew. $\gamma = 7{,}6$ und nach Tabelle Seite 38, $s = 7000$ angenommen wird?

Auflösung. Ist das spezifische Gewicht des Eisendrahts $\gamma = 7{,}6$, so wiegt ein Stück von 1 m = 100 cm Länge =

$$0{,}035 \,.\, 7{,}6 \,.\, 100$$

oder:

Hilfsrechnungen.

1). . . 0,035 . 7,6 . 100 = 3,5 . 7,6
380
228
26,60

2). . . 245 : 0,0266
= 2450000 : 266 = 9210,5
2394
560
532
280
266
1400

$$g = 26{,}6 \text{ Gramm oder } 0{,}0266 \text{ kg}$$
(siehe Hilfsrechn. 1)

und somit ist bei x Meter Länge das Gesamtgewicht des Drahts in Kilogramm:

$$G = 0{,}0266\, x$$

Da nun nach Antw. auf Frage 33:

$$P + G = Fs$$

und die Belastung P in diesem Fall = 0 ist, so ist:

$$G = Fs$$

oder:

$$G = 0{,}035 \,.\, 7000$$

oder:

$$G = 245$$

Setzen wir für G den oben ermittelten Wert ein, so erhalten wir:

$$0{,}0266\, x = 245$$

oder:

$$x = \frac{245}{0{,}0266}$$

oder:

$$x = 9210{,}5$$

d. h. der Draht wird bei einer Länge von 9210,5 m durch sein eigenes Gewicht zerreissen.

Aufgabe 20. a). Welche Belastung P trägt ein Eisendrahtseil von 36 Drähten, wenn ein Draht $\delta = 3$ mm Durchmesser hat und dasselbe auf eine Länge von 300 m freihängt?

b). Bei welcher freien Länge l wird das Seil durch sein Eigengewicht schon derart in Anspruch genommen, dass es eine andere Belastung ausserdem nicht tragen kann?

(S = 1200 und das Gewicht eines laufenden Meters Rundeisen von 2,4 cm Durchmesser $G_0 = 3{,}52$ kg.)

Erkl. 49. Zu diesem Resultat gelangt man durch folgende Rechnung:

Ist F der Querschnitt eines vollen cylindrischen Eisenstabs vom Durchmesser d und f der Querschnitt eines Drahtseils — den Inhalt desselben gleich der Summe der einzelnen Drahtquerschnitte gleichgesetzt, — von 36 Drähten, von denen jeder eine Stärke δ hat, so verhält sich

$$F : f = \frac{1}{4}\pi d^2 : 36 \cdot \frac{1}{4}\pi \delta^2$$

oder:

$$F : f = d^2 : 36\delta^2$$

Da nun für diesen Fall $d = 8\delta$ gesetzt werden kann, so ist:

Auflösung. a). Der äussere Durchmesser d des umschriebenen Kreises eines 36drähtigen Seils ist ungefähr 8 mal so gross als der Durchmesser eines Drahts, also hier

$$d = 8 \,.\, 3 = 24 \text{ mm oder } 2{,}4 \text{ cm}$$

und das Gewicht eines laufenden Meters ist ungefähr 0,7 [1]) vom laufenden Gewicht eines Rundeisenstabs von demselben Durchmesser d. Da nun das Gewicht eines laufenden Meters Rundeisen von 2,4 cm Durchmesser zu G = 3,52 kg angegeben ist, so beträgt das Gewicht eines laufenden Meters Eisendraht

$$G_0 = 0{,}7 \,.\, 3{,}52 = 2{,}464 \text{ kg}$$

Mit Benutzung der in Erkl. 41 gegebenen Formel

$$P = FS - G_0 l$$

erhalten wir, da

$$F = 36 \cdot \frac{d^2\pi}{4}$$

oder:

[1]). Siehe Erkl. 43.

oder:

$$F : f = (8\delta)^2 : 36\delta^2$$

oder:

$$F : f = 64\delta^2 : 36\delta^2$$

$$F : f = 16 : 9$$

Die Volumina V und v von zwei cylindrischen Stäben mit den Querschnitten F und f verhalten sich bei derselben Länge $l = 1$ m wie ihre Querschnitte, also

$$V : v = F : f = 16 : 9$$

und setzen wir für beide Stäbe gleiche spez. Gewichte voraus, so ergibt sich für die laufenden Gewichte pro 1 m Rundeisen und 1 m Eisendrahtseil die Proportion:

$$G_0 : g = 16 : 9$$

$$g = \frac{9}{16} G_0$$

In Wirklichkeit wird g etwas grösser ausfallen, da bei einem Querschnitt durch ein Drahtseil wir nicht genau Kreise vom Durchmesser δ erhalten, sondern etwas grössere Ellipsen. Nehmen wir dazu noch das geringe Mehr des spez. Gewichts von Eisendraht und etwa vorkommende Hanfseelen, so kann man setzen:

$$g = 0{,}7\, G_0$$

Hilfsrechnungen.

1). . . 9 . 0,3 . 0,3 . 3,14 . 1200 — 246,4 . 3

2,7 . 0,942 . 1200 739,2

6594
1884
2,5434 . 1200
= 254,34 . 12
= 3052,08
— 739,2
2312,88 oder ca. 2313

2). . . $\frac{2{,}5434 \,.\, 1200}{2{,}464} = \frac{1{,}2717 \,.\, 75}{0{,}077}$

1,2717 . 75
63585
89019
95,3775 : 0,077
= 95377,5 : 77 = 1238,63
77
183
154
297
231
665
616
490
462

$$F = 36 \cdot \frac{0{,}3 \,.\, 0{,}3 \,.\, 3{,}14}{4}$$

und S = 1200 ist:

$$P = 36 \cdot \frac{0{,}3 \,.\, 0{,}3 \,.\, 3{,}14}{4} \,.\, 1200 - 2{,}464 \,.\, 300$$

oder:

$$P = 9 \,.\, 0{,}3 \,.\, 0{,}3 \,.\, 3{,}14 \,.\, 1200 - 246{,}4 \,.\, 3$$

oder:

$$P = 2313 \text{ kg}$$ (siehe Hilfsrechn. 1.)

b). Um zu erfahren, bei welcher freien Länge das Seil durch sein Eigengewicht schon derart in Anspruch genommen wird, dass es eine andere Belastung mit Sicherheit nicht mehr tragen kann, setzen wir in der oben benutzten Formel P = 0 und lösen die Gleichung für l auf, also:

$$0 = F S - G_0 l$$

oder:

$$l = \frac{F S}{G_0}$$

Setzen wir in diese Gleichung die entsprechenden Zahlenwerte, so ergibt sich, da F = 2,5434 berechnet wurde:

$$l = \frac{2{,}5434 \,.\, 1200}{2{,}464}$$

oder:

$$l = 1238{,}63 \text{ m}$$

Diese Länge bezeichnet man bei Seilen mit dem Namen „Traglänge“, und da Seildicke und Drahtdicke ohne Einfluss auf dieselbe sind (denn in demselben Masse wie der Querschnitt F zunimmt, nimmt auch das laufende Gewicht G_0 zu), so wird dieselbe für Drahtseile auf rund 1000 m angenommen, d. h. ein Seil, welches auf 1000 m Länge freihängt, lässt sich nicht mehr als Zug- oder Triebseil verwenden, da die Festigkeit desselben schon durch das Eigengewicht so in Anspruch genommen ist, dass es eine andere Last nicht mit der nötigen Sicherheit tragen kann.

Aufgabe 21. Ein eisernes Gestänge von 50 m Länge soll für eine Zugbelastung P = 12000 kg berechnet werden, so dass dasselbe an fünf gleichweit entfernten Stellen seiner Länge diese Last P und sein eigenes Gewicht mit derselben Sicherheit trägt. Wie gross ist der Querschnitt desselben an den betreffenden fünf Stellen, wenn der Sicherheitskoeffizient S = 650 kg pro Quadratcentimeter ist und das spez. Gew. $\gamma = 7{,}8$ beträgt?

Hilfsrechnungen.

1). $\frac{12000}{650} = 240 : 13 = 18{,}46$

```
240 : 13 = 18,46
13
110
104
 60
 52
 80
```

2). $650 - 7{,}8 = 642{,}2$

$650 : 642{,}2$ oder $6500 : 6422 = 1{,}012$

```
6422
 7800
 6422
 13780
 12844
   936
```

3). $18{,}46 \,.\, 1{,}012$

```
    3692
   1846
  18460
 18,68152
```

4). . . $18{,}46\,(1{,}012)^2 = \log 18{,}46 + 2 \,.\, \log 1{,}012$

$\log 1{,}012 = 0{,}0051805$

$.\,2$

$0{,}0103610$

$+\log 18{,}46 = 1{,}2662317$

$\log F_2 = 1{,}2765927$

mithin: num-log $F_2 = 18{,}906$

5). . . $\log F_3 = \log 18{,}46 + 3 \,.\, \log 1{,}012$

$\log 1{,}012 = 0{,}0051805$

$.\,3$

$0{,}0155415$

$+\log 18{,}46 = 1{,}2662317$

$\log F_3 = 1{,}2817732$

mithin: num-log $F_3 = 19{,}13$

6). . . $\log F_4 = \log 18{,}46 + 4 \,.\, \log 1{,}012$

$\log 1{,}012 = 0{,}0051805$

$.\,4$

$0{,}0207220$

$+\log 18{,}46 = 1{,}2662317$

$\log F_4 = 1{,}2869537$

mithin: num-log $F_4 = 19{,}36$

Auflösung. Wir nehmen zur Lösung der vorliegenden Aufgabe die in Erkl. 43 gegebene Formel zu Hilfe, wonach

$$F_n = \frac{P}{S}\left(\frac{S}{S - l\gamma}\right)^n$$

ist. Bleibt das Eigengewicht des Gestänges unberücksichtigt, so ist die nötige Querschnittsfläche nach Erkl. 38:

$$F = \frac{P}{S}$$

also im gegebenen Fall ist:

$$F = \frac{12000}{650}$$

oder:

$$F = 18{,}46 \text{ (siehe Hilfsrechn. 1)}$$

Bezeichnen wir nun von unten anfangend die Querschnittsflächen des Gestänges mit F_1, F_2, F_3, F_4 und F_5, so ist nach obiger Formel:

$$F_1 = \frac{P}{S}\left(\frac{S}{S - l\gamma}\right)^1$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$F_1 = \frac{12000}{650}\left(\frac{650}{650 - 7{,}8}\right)$$

(denn das Gewicht eines 10 m oder 1000 cm langen Stabes vom Querschnitt von 1 qcm beträgt: $l\gamma = 1000 \,.\, 7{,}8$ g = 7,8 kg).

Für $\frac{P}{S} = \frac{12000}{650}$ kann man auch setzen:

18,46 (siehe Hilfsrechn. 1)

und für $\left(\frac{S}{S - l\gamma}\right) = \frac{650}{650 - 7{,}8}$ kann man auch setzen: 1,012 (siehe Hilfsrechn. 2) und somit ist:

$$F_1 = 18{,}46 \,.\, 1{,}012$$
$$F_2 = 18{,}46\,(1{,}012)^2$$
$$F_3 = 18{,}46\,(1{,}012)^3$$
$$F_4 = 18{,}46\,(1{,}012)^4$$
$$F_5 = 18{,}46\,(1{,}012)^5$$

oder nach den nebenstehenden Hilfsrechn. 3—7:

$F_1 = 18{,}68$ qcm

$F_2 = 18{,}906$ qcm

$F_3 = 19{,}13$ qm

$F_4 = 19{,}36$ qm

$F_5 = 19{,}59$ qm

7). . . . $\log F_5 = \log 18{,}46 + 5 \, . \log 1{,}012$

$\log 1{,}012 = 0{,}0051805$

$. \, 5$

$0{,}0259025$

$+ \log 18{,}46 = 1{,}2662317$

$\log F_5 = 1{,}2921342$

mithin: num-log $F_5 = 19{,}59$

Aus diesen Querschnittsflächen lässt sich nun leicht die Kante oder der Durchmesser berechnen, je nachdem der Querschnitt quadratisch oder kreisförmig sein soll.

Zu denselben Resultaten gelangt man auch unter Anwendung der in Antw. auf Frage 35 gegebenen Formel.

f). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 22. Wie gross ist a). der Elasticitätsmodulus, b). der Dehnungsquotient einer Klaviersaite von 1,5 m Länge und 0,66 mm Durchmesser, wenn dieselbe durch 6,75 kg Belastung um 1,7 mm ausgedehnt wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 1.

Aufgabe 23. Um wieviel streckt sich ein Silberdraht von 2 m Länge und 1 mm Durchmesser, wenn derselbe mit 18 kg belastet wird? (E = 7357, siehe Tabelle Seite 10).

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 2.

Aufgabe 24. a). Welche Querschnittsfläche muss eine schmiedeeiserne Stange von 1,88 m Länge erhalten, wenn dieselbe durch 12000 kg Belastung nur um 0,4 mm verlängert werden soll?

b). Wie gross ist der Durchmesser zu nehmen, wenn der Stab cylindrischen Querschnitt hat?

c). Wie gross ist eine Kante zu nehmen, wenn der Querschnitt des Stabes quadratisch sein soll?

d). Wie gross ist jede Kante zu nehmen, wenn der Querschnitt des Stabes ein Rechteck bildet, dessen Kanten im Verhältnis 3 : 5 stehen?

Andeutung. Die Auflösung von a). und b). erfolgt analog der gelösten Aufgabe 3. Die Lösungen von c). und d). ergeben sich aus den in Antwort auf Frage 26 gegebenen Formeln. Bei der Auflösung von d). kann auch die Lösung der Aufgabe 12 teilweise Berücksichtigung finden.

Aufgabe 25. Welche Kraft ist nötig, um a). einen Eisen-, b). einen Messing-, c). einen Bleistab von 3 m Länge und einem quadratischen Querschnitt von 2,5 cm Kante um 2 mm zu verlängern?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 4.

Aufgabe 26. Wie lang ist ein Eisendraht von 2 qcm Querschnitt, wenn derselbe durch eine Kraft von 1000 kg eine Verlängerung von 1,5 mm erfährt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 5.

Aufgabe 27. Wenn für den Wiener Quadratzoll Querschnitt in Wiener Pfunden ausgedrückt für Buchenholz

der Festigkeitsmodulus K = 10000
„ Sicherheits- „ S = 2000
und „ Elasticitäts- „ E = 1150000

beträgt, wie gross sind dann diese Moduli, berechnet auf 1 qmm Querschnitt und auf Kilogramm, wenn 1 Wiener Zoll = 26,3 mm und 1 Wiener Pfund = 560 g enthält?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 6.

Aufgabe 28. Wie gross sind die Moduli K, S und E (siehe vorige Aufgabe) in früheren preuss. Pfunden, bezogen auf 1 preuss. Quadratzoll Querschnitt, wenn 12 preuss. Zoll = 314 mm und 2 preuss. Neupfund = 1 kg zu rechnen sind?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 7.

Aufgabe 29. Eine hölzerne Hängesäule von rechteckigem Querschnitt mit den Seiten 13,7 cm und 19,6 cm wird durch 215000 kg gerade zerrissen; wie gross ist demnach der Festigkeitsmodulus K dieser Stange.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 8.

Aufgabe 30. Welche Kraft ist notwendig, um einen cylindrischen Stab aus Blei von 2,5 cm Durchmesser zu zerreissen, und welche Last kann derselbe bei fünffacher Sicherheit tragen?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 9.

Aufgabe 31. Es soll aus Buchenholz eine Säule angefertigt werden, deren Querschnitt ein reguläres Sechseck bildet. Welchen Durchmesser hat der um das Sechseck beschriebene Kreis, wenn die Säule auf Zug in Anspruch genommen wird und

a). 25000 kg sicher tragen soll,

b). durch 25000 kg bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt werden soll,

c). durch 25000 kg zerreissen soll?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 11, unter Berücksichtigung der Auflösung zur Aufgabe 17.

Aufgabe 32. Ein Dachstuhl übt an seinem unteren Ende einen Horizontalschub von 8400 kg aus, welcher durch eine schmiedeeiserne Querstange von 30 m Länge aufgehoben wird.

a). Wie gross ist der Querschnitt der letzteren, wenn der Sicherheitsmodulus zu 650 kg angenommen wird?

b). Um wieviel wird sie ausgedehnt, wenn der Elasticitätsmodulus pro Quadratcentimeter = 1500000 kg beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 13.

Aufgabe 33. Welche Last kann eine eiserne Kette tragen, deren Glieder 1 cm Durchmesser haben?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt unter Berücksichtigung der gelösten Aufgabe 14. Dort wurde der Durchmesser d gesucht, während P gegeben war; hier ist das Umgekehrte der Fall.

Aufgabe 34. Welchen Durchmesser müssen die vier schmiedeeisernen Säulen einer hydraulischen Presse erhalten, wenn der durch die Presse ausgeübte grösste Druck 150000 kg beträgt und der Sicherheitsmodulus (da die Belastung nicht dauernd ist) zu 1200 kg angenommen wird.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 14, wobei aber zu berücksichtigen ist, dass in dem vorliegenden Fall die Zerstörung in vier Querschnitten (und nicht wie dort in nur zwei Querschnitten) zugleich erfolgt.

Aufgabe 35. Es ist der Durchmesser d eines Hanfseils zu berechnen, welches auf die Dauer 8000 kg Last mit Sicherheit tragen soll:

a). wenn für stehende Seile S = 102 kg,

b). „ „ Förderseile S = 37 „

pro Quadratcentimeter gerechnet wird.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 15b.

Aufgabe 36. Welchen Durchmesser muss eine cylindrische Messingstange erhalten, wenn dieselbe unter Berücksichtigung ihres Eigengewichts bei 5 m Länge 18000 kg sicher tragen soll? b). Wie schwer ist die Stange, c). welche Verlängerung erleidet dieselbe?

Es sei S = 210 und s = 1250.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 16.

Aufgabe 37. Welche Belastung trägt, unter Berücksichtigung des Eigengewichts, ein auf Zug in Anspruch genommener Balken aus Eichenholz von 6,9 m Länge 18 cm Breite und 24 cm Dicke?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 17.

Aufgabe 38. Wenn man einer Messingstange von 4 m Länge und 20000 kg Belastung einen Querschnitt von 96,6 qcm gibt, wie gross hat man dann den Sicherheitskoeffizient pro Quadratcentimeter in Rechnung gestellt?
($\gamma = 8,6$)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 18.

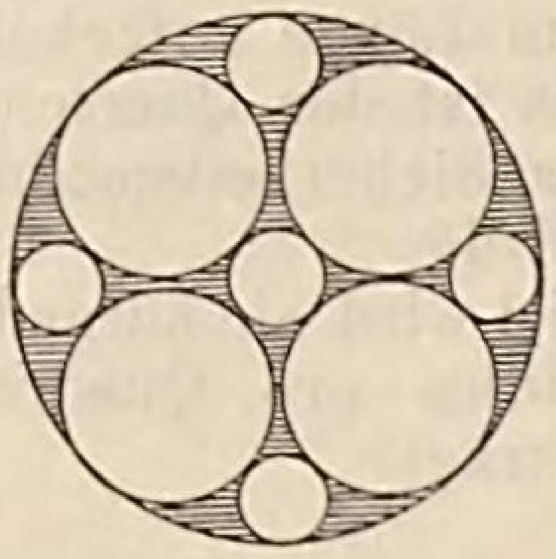
Aufgabe 39. Es soll die Länge einer Stange aus Blei gefunden werden, bei der dieselbe vermöge ihres Gewichts ohne weitere Belastung zerreisst. (Das spez. Gewicht = 11,4 und der Festigkeitskoeffizient = 128 kg pro Quadratcentimeter)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 19.

Aufgabe 40. Welche Belastung trägt ein Eisendrahtseil, bestehend aus fünf dünneren Drähten von 4 mm Durchmesser und aus vier dickeren Drähten von 9,5 mm Durchmesser (siehe Fig. 38), wenn dasselbe auf 80 m freihängt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 20.

Figur 38.



Aufgabe 41. Ein Körper aus Kupfer (spez. Gewicht $\gamma = 8,936$ und Sicherheitskoeffizient $S = 900$) soll für eine Zugbelastung von 180 kg berechnet werden, so dass derselbe an vier gleichweit entfernten Stellen seiner Länge ($l = 2$ m) die genannte Last und sein eigenes Gewicht mit derselben Sicherheit trägt. Der Querschnitt desselben sei durchweg cylindrisch. Wie gross ist der Durchmesser an den betreffenden vier Stellen?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 21.

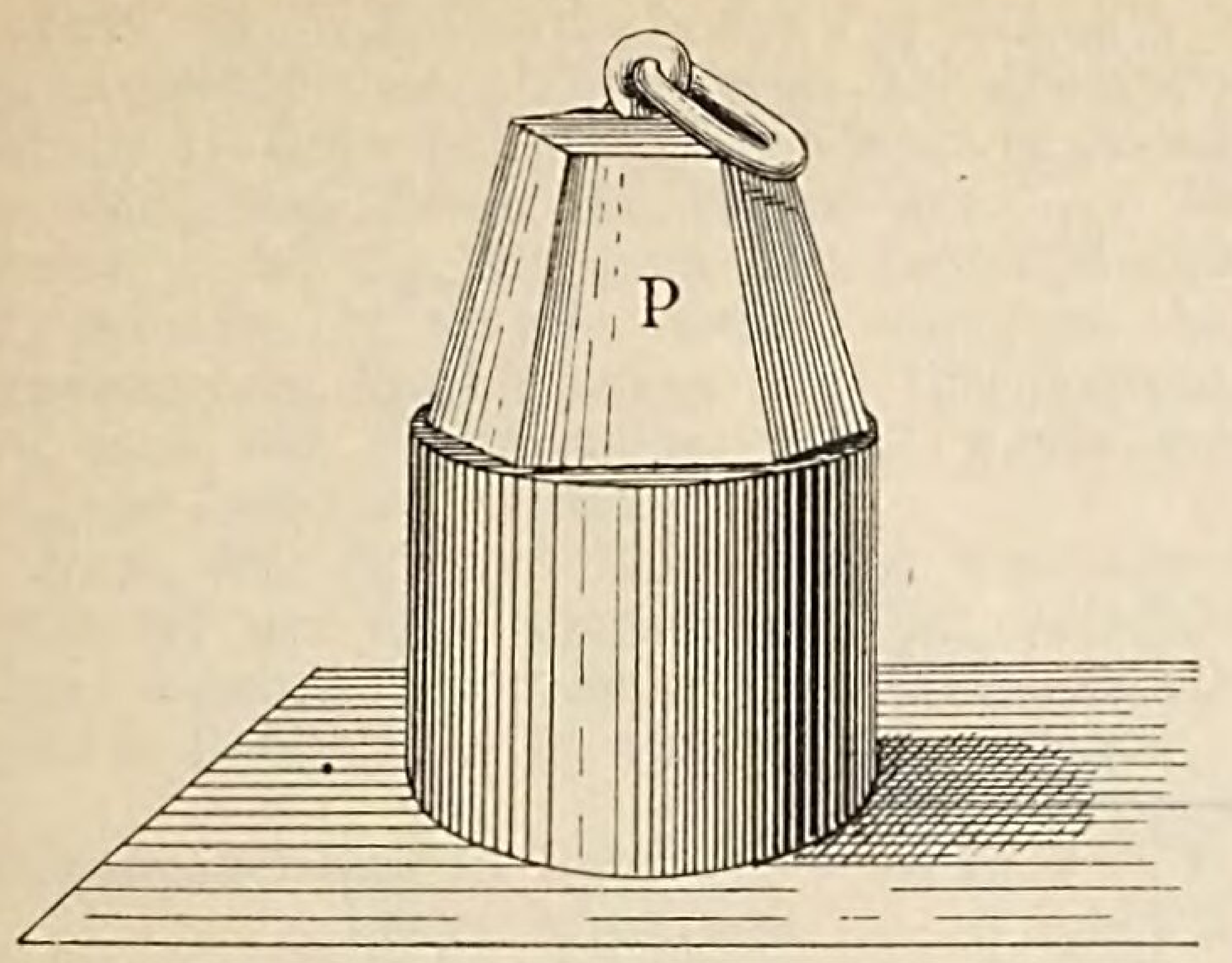
III. Die rückwirkende Elasticität und Festigkeit oder die Elasticität und Festigkeit beim Druck.

a). Die Gesetze der rückwirkenden Elasticität und Festigkeit.

Frage 41. Wenn kommt die rückwirkende Elasticität und Festigkeit eines Körpers zur Geltung?

Antwort. Die rückwirkende Elasticität und Festigkeit eines Körpers kommt zur Geltung, wenn ein Körper mit seiner Grundfläche aufliegt und auf die entgegengesetzte

Figur 39.



Fläche eine Last wirkt (s. Fig. 39), wobei die Höhe oder Länge des Körpers im Verhältnis zu seinen Querschnittsdimensionen als nur klein angenommen wird.

Frage 42. Welche Veränderung erfährt ein auf Druckelasticität oder -Festigkeit in Anspruch genommener Körper und welche Gesetze gelten erfahrungsmässig für diese Veränderung?

Erkl. 50. Die Zunahme der Dicke einer nach der Längenrichtung zusammengedrückten Säule beweist, dass die Teilchen nicht nur nach der Richtung des Drucks einander näher rücken, sondern auch nach den Seiten ausweichen und gleichsam wie Keile in die Zwischenräume anderer Teile einzudringen streben. Die Elasticität widersetzt sich dieser Seitenbewegung. Werden ihre Grenzen überschritten, so treten bleibende seitliche Anschwellungen ein und endlich fallen die Teile ganz auseinander; es findet eine Zerdrückung statt.

Erkl. 51. Bei Druckbelastung versteht man unter dem Elasticitätsmodulus E diejenige Belastung in Kilogramm, die einen Körper von einem Quadratcentimeter (resp. Quadratmillimeter) Querschnitt auf Null zusammenzudrücken vermag, vorausgesetzt, dass dabei die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird.

Der Sicherheitsmodulus S ist diejenige Belastung in Kilogramm, die ein Körper von einem Quadratcentimeter Querschnitt mit Sicherheit zu tragen vermag.

Der Tragmodulus T ist diejenige Belastung in Kilogramm, die den Körper von einem Quadratcentimeter Querschnitt so weit zusammendrückt, dass dadurch gerade die Elasticitätsgrenze erreicht ist (s. Erkl. 52).

Der Festigkeitsmodulus *s* ist diejenige Belastung in Kilogramm, die einen Körper von einem Quadratcentimeter Querschnitt zu zerdrücken vermag.

Erkl. 52. Die Elasticitätsgrenze und folglich auch der Tragmodulus sind für das Zerreissen und das Zerdrücken bei ein und demselben Material nicht immer gleich gross. Das-

Antwort. Wenn, wie oben bemerkt, eine Druckkraft auf einen Körper einwirkt, so bringt dieselbe eine Druckspannung und infolgedessen eine Verkürzung des Körpers (dessen Form gewöhnlich als prismatisch angenommen wird) hervor. Bei den in dieser Beziehung vielfach angestellten Versuchen hat es sich gezeigt, dass für die Bestimmung der hervorgebrachten Verkürzungen innerhalb der Elasticitätsgrenze genau dieselben Gesetze und Gleichungen gelten, nach welchen im vorigen Abschnitt die hervorgebrachten Verlängerungen zu berechnen waren, und dass bei allen Körpern der Elasticitätsmodulus für Druckspannung mit dem Elasticitätsmodulus für Zugspannung gleiche Grösse hat[1]).

Auch bei der rückwirkenden Elasticität ist die Verkürzung

1). proportional dem belastenden Gewicht,

2). proportional der ursprünglichen Länge des zusammengedrückten Körpers,

3). umgekehrt proportional dem Querschnitt,

4). abhängig von der Natur des Materials.

Bezeichnet also wieder λ die Verkürzung, P die Belastung in Kilogramm, L die Länge in Centimetern, F den Querschnitt in Quadratcentimetern, so hat man:

$$\lambda = \frac{P\,L}{F\,E}$$

oder mit Berücksichtigung des Eigengewichts G des Körpers:

$$\lambda = \frac{\left(P + \frac{1}{2}G\right)L}{F\,E}$$

[1]). Siehe Erkl. 51.

jenige Gewicht, welches eine Eisenstange z. B. bis zur Elasticitätsgrenze ausdehnt, wenn es als Zugkraft angebracht ist, vermag nicht immer dieselbe Stange bis zur Elasticitätsgrenze zu komprimieren, wenn es als Druckkraft wirkt. Genaue Tabellen geben daher für den Zug und den Druck verschiedene Elasticitätsgrenzen. So finden wir z. B. in der auf Seite 32 gegebenen Tabelle, dass der Tragmodulus des Gusseisens für Druck doppelt so gross ist als für Zug, während umgekehrt bei den Hölzern der Tragmodulus für Druck noch nicht die Hälfte des Tragmodulus für Zug beträgt (120 zu 270).

Frage 43. Wie wurde die rückwirkende Festigkeit der Körper geprüft?

Antwort. Die rückwirkende Festigkeit der Körper wurde geprüft, indem man prismatische Stücke auf ihrer oberen Fläche einem gleichmässigen Druck aussetzte und durch Steigerung desselben die Last bestimmte, bei welcher die Körper zerquetscht oder zersplittert werden. Von der so bestimmten Last nimmt man dann für die Tragkraft des betreffenden Materials nur einen der Sicherheit entsprechenden Bruchteil. Die Zerdrückung ist keine direkte Wirkung des Drucks, sondern eine Folge der Verschiebung und peripherischen (oder umlaufenden) Auseinandertreibung der Teilchen (siehe Erkl. 50).

Erkl. 53. Namentlich vielfach untersucht wurde die rückwirkende Festigkeit bei Bausteinen, welche z. B. in den Grundmauern hoher Gebäude oder als Teile flacher Gewölbe einen oft ungeheueren Druck auszuhalten haben. Die folgenden Zahlen geben die Werte des Festigkeitsmodulus pro Quadratmillimeter Querschnittsfläche und brauchen nur mit 100 multipliziert zu werden, wenn man den Festigkeitsmodulus pro Quadratcentimeter haben will:

Porphyr	24,782	Kilogr.
Granit (Aberdeen)	17,310	„
„ (Cornwall)	10,076	„
Marmor (Flandern)	10,407	„
„ (Genua)	8,575	„
Kalkstein (dicht, schwarz)	14,034	„
„ (erdig hart)	3,064	„
„ (weich)	1,046	„
Sandstein (fest)	1,804	„
„ (weich)	0,884	„
„ (sehr weich)	0,232	„
Backstein (gut)	1,720	„
„ (schwach)	0,686	„

Porphyr und Granit sind die festesten Bausteine. Bei gleicher Tragfläche soll der Würfel mehr tragen als die Platte und die Säule, weil dort kleine Ungleichheiten des Kornes, hier des Druckes einen grossen Einfluss gewinnen. Harte und spröde Steine springen, gleich wie Glas, in Splitter oder verwandeln sich in Pulver; erdige und körnige Massen werden entweder zermalmt oder teilen sich, wenn sehr homogen, in conische und pyramidale Stücke von oft sehr regelmässiger Gestalt.

Frage 44. Zu welchem Ergebnis haben im allgemeinen die vorerwähnten Versuche geführt?

Antwort. Die über die rückwirkende Festigkeit angestellten Versuche, welche meistens nur mit Körpern von kleinen Dimensionen gemacht wurden, ergaben folgendes:

1). Wird bei einem Körper die rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen,

Erkl. 54. Will man die in den Tabellen enthaltenen Festigkeitskoeffizienten als Anhaltspunkte für die sichere Belastung der Körper benützen, so darf man davon für Hölzer nur $1/_{10}$, für Steine $1/_{10}$ bis $1/_{20}$, für Guss- und Schmiedeeisen $1/_{6}$ nehmen, ja es gibt Fälle, wie z. B. bei gusseisernen Bogenbrücken für Eisenbahnen, wo man der entstehenden Stösse wegen nur $1/_{100}$ in Anspruch nimmt.

Nach der Berliner Bauordnung vom Jahre 1873 ist der Quadratcentimeter der verschiedenen Baumaterialien im höchsten Fall mit folgenden Belastungen in Anspruch zu nehmen:

	Zug	Druck
Ziegelmauerwerk in Kalk	— kg	7 kg
„ bestes in Cement	— „	14 „
Kiefern- und Tannenbauholz	80 „	80 „
Schmiedeeisen	750 „	— „
Gusseisen	250 „	500 „

Der Quadratmeter Baugrund soll höchstens mit 35000 kg belastet werden.

Erkl. 55. Die Festigkeit des gemeinen Mörtels steigt auf nicht mehr als 0,4—0,5 kg; man darf ihn daher nicht als tragende, sondern nur als Ausfüllungsmasse zur Verteilung des Druckes benutzen. Nach *Rondelet* erhöht die gute Bearbeitung die Stärke desselben von 1 auf 1,3. Eine andere Zunahme zeigt der Mörtel im Laufe der Zeit, vermutlich durch eine langsame chemische Umwandlung des Kalkes in kohlensauren und kieselsauren Kalk. *Rondelet* beobachtete in 15 Jahren bei gemeinem Mörtel, bei Cement, bei weisser u. grauer Puozzolane eine Zunahme der Festigkeit im Verhältnis von 1:1,125; 1,250; 1,286 u. 1,333. Vielleicht hat die Stärke mancher antiker Mörtel und mancher in der Natur gebildeter Steine in solchen langsamen inneren Verschmelzungsprozessen ihren Grund.

Erkl. 56. Von Metallen dient namentlich das Gusseisen zum Tragen, und übertrifft, wegen geringerer Sprödigkeit, sogar die festesten Steine. Nach *Hodgkinson*'s Versuchen ist beim Gusseisen die rückwirkende Festigkeit bis zur Elasticitätsgrenze nahe doppelt so gross als dessen absolute Festigkeit (ebenfalls innerhalb dieser Grenze) dagegen bis zum Bruch im Durchschnitt $5^1/_2$mal so gross, oder es verhält sich die absolute zur rückwirkenden Festigkeit beim Gusseisen wie 1:5,637. Dabei ist die äussere Kruste der Gussstücke weit dichter krystallinisch und fester als das Innere.

Merkwürdig ist noch, dass das Gusseisen innerhalb der Elasticitätsgrenze bei gleicher Belastung ungefähr doppelt so stark als Schmiedeeisen zusammengedrückt wird.

Erkl. 57. Was die Hölzer betrifft, so zeigen diese, wenn sie sehr ausgetrocknet sind, eine bedeutend grössere Festigkeit als im gewöhnlichen Zustand. Die folgenden für 1 Quadratmillimeter geltenden Werte beziehen sich auf

ohne dass man dabei über die Elasticitätsgrenze desselben hinausgeht, so dass also die durch die aufgelegte Last entstehende Zusammendrückung nach Wegnahme derselben wieder gänzlich verschwindet, so sind diese Verkürzungen (wie oben schon bei der rückwirkenden Elasticität bemerkt wurde) den aufgelegten Gewichten oder dem Druck proportional.

2). Bei Körpern von ähnlicher Form und demselben Material ist die rückwirkende Festigkeit den Querschnittsflächen proportional auf welche der Druck senkrecht wirkt, und sie ist dabei um so grösser, je mehr sich die Fläche der Kreisform und die Dicke der Höhe nähert.

3). Die durch Versuche ermittelten Werte haben wegen der Ungleichartigkeit der Massen keine grosse Zuverlässigkeit und man bedient sich in der Anwendung deshalb weniger dieser als vielmehr jener Zahlen, welche die Erfahrung für die sichere Belastung an die Hand gibt.

Bezeichnet man mit P die Belastung, mit V das Volumen, mit F den Querschnitt, mit s den Festigkeitsmodulus, mit S den Sicherheitsmodulus und mit E den Elasticitätsmodulus, mit W die Arbeits- oder Wirkungsgrösse, welche zur Verkürzung des Stabes um die Länge λ nötig ist, mit G das Gesamtgewicht, mit γ das spez. Gewicht, mit F den veränderlichen Querschnitt des durch die Last P samt dem eigenen Gewicht $G = \gamma V$ zusammengedrückten Stabes, so erhält man für dieselben Bestimmungsgrössen der rückwirkenden oder Druckfestigkeit die nämlichen Formeln wie im vorigen Kapitel und zwar:

für die Verkürzung ohne Rücksicht auf das Eigengewicht des Körpers:

1). $\lambda = \frac{PL}{FE}$

für die Verkürzung mit Rücksicht auf das Eigengewicht des Körpers:

2). . . . $\lambda = \frac{L}{FE}\left(P + \frac{1}{2}G\right)$

oder, da $G = FL.\gamma$

2a). . . $\lambda = \frac{PL}{FE} + \frac{F\gamma L^2}{2FE}$

für die rückwirkende Festigkeit:

3). $P = Fs$

4). $F = \frac{P}{s}$

5). $s = \frac{P}{F}$

diesen Zustand grosser Trockenheit und rühren von Versuchen her, welche *Hodgkinson* mit kleinen Holzcylindern, deren Höhe nur dem doppelten Durchmesser gleichkam, vornahm.

Pappel	3,601	Weisstanne	5,125
Birke	4,499	Esche	6,580
Rottanne	4,628	Buche	6,580
Fichte	4,772	Eiche (engl.)	7,068
Erle	4,891	Teaka	8,504
Nussbaum	5,079		

Würfel und kurze Prismen komprimieren sich um $^2/_3$, bevor sie zermalmt und in Fasern zersplittert werden; längere brechen durch Biegen, nach der schwächeren Seite hin.

Erkl. 58. Der Erfahrung gemäss nimmt die rückwirkende Festigkeit eines Körpers mit seiner Länge (Höhe), jedoch nicht in gleichem Verhältnis mit dieser ab. Diese Abnahme mit der Höhe tritt im allgemeinen aber erst ein, wenn die Höhe das 4- oder 5fache der Körperdicke übersteigt. Bei grösserer Länge kann nämlich eher ein Biegen und Zerknicken des belasteten Körpers eintreten, und aus diesem Grund ist für die praktisch zulässige Druckspannung im allgemeinen ein kleinerer Wert anzunehmen als bei kurzen dicken Stangen. Speziellere Regeln für die Berechnung der Widerstandsfähigkeit langer, dünner Stangen, Pfeiler und Pfosten ergeben sich aus dem später folgenden Abschnitt über die „Zerknickungsfestigkeit."

für den Durchmesser des kreisförmigen Querschnitts:

6). . . . $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi s}}$

für die Seite des quadratischen Querschnitts:

7). . . . $a = \sqrt{\frac{P}{s}}$

für die Seiten b und h des rechteckigen Querschnitts:

8). . . . $b = \frac{P}{sh}$

oder:

$h = \frac{P}{sb}$

für die Tragfähigkeit:

9). . . . $P = FS$

oder:

10). . . . $F = \frac{P}{S}$

oder:

11). . . . $S = \frac{P}{F}$

für die rückwirkende Festigkeit mit Rücksicht auf das Eigengewicht des Körpers:

12). . . . $(P + G) = Fs$

oder:

13). . . . $P = F(s - L\gamma)$

14). . . . $F = \frac{P}{s - L\gamma}$

15). . . . $S = \frac{P}{F} + L\gamma$

16). . . . $P = Fs - G_0 L$

für den veränderlichen Querschnitt:

17). . . . $F_x = \left(\frac{P}{s}\right) e^{\left(\frac{\gamma}{s}\right) x}$

für die Arbeits- oder Wirkungsgrösse:

18). . . . $W = \frac{1}{2}\left(\frac{s^2}{E}\right) V$

oder:

19). . . . $W = \frac{1}{2}\left(\frac{S^2}{E}\right) V$

b). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 42. Welche Verkürzung erleidet eine 3 m hohe Säule aus Gusseisen, wenn der Quadratcentimeter Querschnittsfläche mit 400 kg belastet ist und eine Biegung nicht stattfindet a). ohne Rücksicht auf das Eigengewicht, b). mit Rücksicht auf das Eigengewicht der Säule.

Auflösung. a). Nach Tabelle auf Seite 38 ist der Elasticitätsmodulus E = 1000000 pro Quadratcentimeter und nach der vorstehenden Formel 1). ist die Verkürzung

$$\lambda = \frac{PL}{FE}$$

oder die entsprechenden Zahlengrössen und zwar die Masse durchweg in Centimeter eingesetzt:

$$\lambda = \frac{400 \,.\, 300}{1 \,.\, 1000000}$$

oder:

$\lambda = 1{,}2$ mm (siehe Hilfsrechn. 1)

b). Unter Berücksichtigung des Eigengewichts ist die Verkürzung nach obiger Formel 2).:

$$\lambda = \frac{L}{FE}\left(P + \frac{1}{2} G\right)$$

Hilfsrechnungen.

1). . . $\frac{400 . 300}{1000000} = \frac{12}{100}$ cm oder 1,2 mm

2). . . $\frac{2,34}{2} = 1,17;\quad 1,17 + 400 = 401,17$

$$\frac{300 . 401,17}{1000000} = \frac{3 . 401,17}{10000} \text{ oder } \frac{1203,51}{10000}$$

oder 0,120351 cm oder 1,2035 mm

Nehmen wir das spez. Gewicht von Gusseisen zu 7,8 an, so ist bei 3 m Höhe das Eigengewicht pro □Centimeter Querschnitt

$$G = 300 . 1 . 7,8 \text{ Gramm}$$

oder:

$$G = 2,34 \text{ kg}$$

Setzen wir in die obige Bestimmungsgleichung die entsprechenden Zahlenwerte, so ist:

$$\lambda = \frac{300}{1 . 1000000}\left(400 + \frac{2,34}{2}\right)$$

oder:

$$\lambda = 1,2035 \text{ mm}$$ (siehe Hilfsrechn. 2)

Aufgabe 43. Wie gross ist der Elasticitätsmodulus eines Körpers von 100 qcm Querschnitt und 25 cm Höhe, wenn derselbe durch 2000 kg Belastung um $^1/_{400}$ mm oder $^1/_{4000}$ cm zusammengedrückt wird?

Hilfsrechnung.

$$\frac{2000 . 25 . 4000}{100} = 20 . 25 . 4000 = 500 . 4000 = 2000000$$

Auflösung. Aus Formel 1). in Antwort auf Frage 44 ergibt sich für den Elasticitätsmodulus

$$E = \frac{PL}{F\lambda}$$

Setzen wir in diese Gleichung die entsprechenden Zahlenwerte, so ist

$$E = \frac{2000 . 25}{100 \cdot \frac{1}{4000}}$$

oder:

$$E = 2000000 \text{ pro } \square\text{cm}$$

(siehe Hilfsrechnung).

Aufgabe 44. Wie stark ist ein Würfel aus Gusseisen belastet, dessen Kantenlänge 10 cm beträgt und der eine Verkürzung von $^1/_{40}$ mm oder $^1/_{400}$ cm erleidet?

Hilfsrechnung.

$$\frac{1000000 . 100}{10 . 400} = \frac{100000}{4} = 25000$$

Auflösung. Nach der in der Lösung der vorigen Aufgabe benutzten Gleichung ist:

$$P = \frac{EF\lambda}{L}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte und aus Tabelle auf Seite 38 für E = 1000000 eingesetzt:

$$P = \frac{1000000 . 10 . 10 \cdot \frac{1}{400}}{10}$$

oder:

$$P = 25000 \text{ kg}$$ (siehe Hilfsrechnung).

Aufgabe 45. Welche Last ist nötig, um einen Granitblock von 105 cm Länge und 65 cm Breite zu zermalmen, wenn der Festigkeitsmodulus pro □cm 1731 kg beträgt?

Hilfsrechnung.

```
105 . 65 . 1731
 525
630
6825 . 1731
      6825
    20475
   47775
   6825
  11814075
```

Auflösung. Nach der in Antwort der Frage 44 gegebenen Gleichung 3). ist:

$$P = Fs$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = 105 . 65 . 1731$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$P = 11814075 \text{ kg}$$

d. h. es würde zum Zermalmen des Granitblocks die ansehnliche Last von ca. 12 Millionen Kilogramm oder 12000 Tonnen nötig sein.

Aufgabe 46. Welche Kantenlänge muss ein Fundament von quadratischem Querschnitt, aus hartem Kalkstein bestehend, erhalten, wenn dasselbe 36000 Zentner mit 10facher Sicherheit tragen soll?

Auflösung. Nach Formel 7). in Antwort auf Frage 44 ist:

$$a = \sqrt{\frac{P}{S}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt, und zwar aus Erkl. 53 für $s = 3{,}064$ pro Quadratmillimeter oder $s = 306$ pro Quadratcentimeter, also da bei 10facher Sicherheit $S = \frac{1}{10}s$, für $S = 30{,}6$ ergibt:

$$a = \sqrt{\frac{36000 \, . \, 50}{30{,}6}}$$

oder:

$$a = \sqrt{58500} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 1)}$$

oder:

$$a = \text{ca. } 240 \text{ cm oder } 2{,}4 \text{ m}$$

Hilfsrechnungen.

1). $\frac{36000 \, . \, 50}{30{,}6}$

$= 18000000 : 306 = \text{ca. } 58500$
1530
2600
2448
1520
1530

2). $\sqrt{5|85|00} = 242$
4
4|185
176
48|900

Aufgabe 47. Welchen Durchmesser muss eine cylindrische Säule a). aus Tannenholz, b). aus Gusseisen erhalten, wenn dieselbe auf 30000 kg Last in Anspruch genommen und im ersteren Fall $S = \frac{1}{10}s$, im zweiten Fall $S = \frac{1}{14}s$ gerechnet wird?

Auflösung. a). Nach Erkl. 57 ist $s = 4{,}628$ pro Quadratmillimeter oder: $s = \text{ca. } 460$ pro Quadratcentimeter, also: $S = 46$. Nach Formel 6). in Antw. auf Frage 44 ist aber:

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi S}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$d = \sqrt{\frac{4 \, . \, 30000}{3{,}14 \, . \, 46}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$d = 28{,}8 \text{ cm}$$

b). Nach der auf Seite 38 gegebenen Tabelle ist für bestes Gusseisen der Koefizient für rückwirkende Festigkeit $s = 7150$ und somit:

$$S = \frac{7150}{14} \text{ oder ca. } 510$$

$$F = \frac{P}{S}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$F = \frac{30000}{510} = 58{,}82$$

und

$$d = \sqrt{\frac{4 \, . \, 58{,}82}{3{,}14}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$d = 8{,}7 \text{ cm}$$

Hilfsrechnungen.

1). . . $\frac{4 \, . \, 30000}{3{,}14 \, . \, 46} = \frac{30000}{1{,}57 \, . \, 23} = \frac{30000}{36{,}11}$

1,57
23
471
314
36,11

$3000000 : 3611 = 830{,}8$
28888
11120
10833
28700

$\sqrt{8|30,|8} = 28{,}8$
4
4|430
384
56|4680
4544
576|13600

2). $3000 : 51 = 58{,}82$; $\frac{4 \, . \, 58{,}82}{3{,}14} = \frac{2 \, . \, 58{,}82}{1{,}57}$
255
450
408
420
408
120

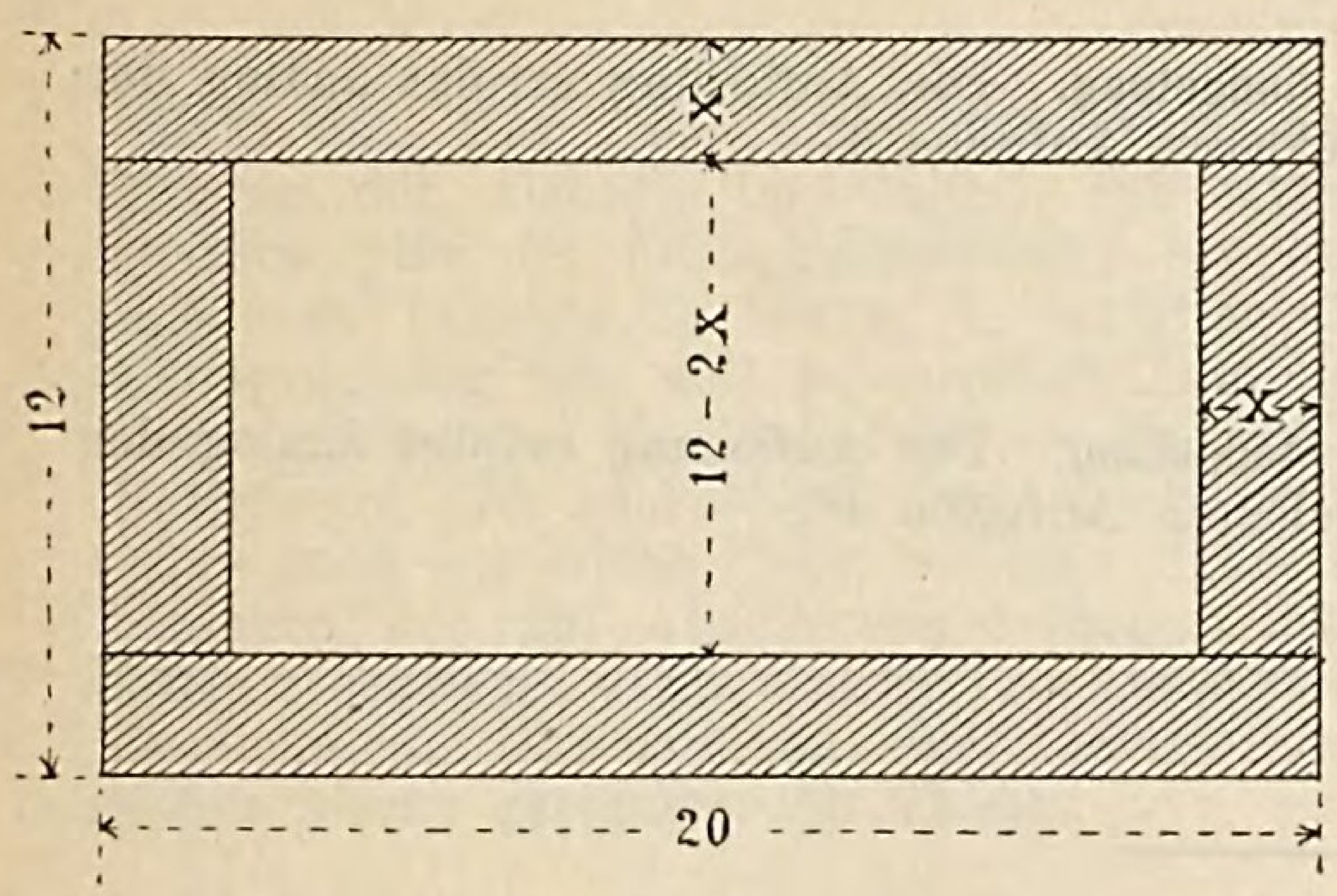
$2 \, . \, 58{,}82 = 117{,}64$

$11764 : 157 = \text{ca. } 75$
1099
774
785

$\sqrt{75} = \text{ca. } 8{,}7$
64
16|1100
1169

Aufgabe 48. Wie dick müssen bei 20-facher Sicherheit die aus gutem hartem Kalkstein aufgeführten Grundmauern eines aussen 20 m langen und 12 m breiten Gebäudes genommen werden, wenn die Mauern einen Druck von 8 000 000 kg zu ertragen haben?

Figur 40.



Hilfsrechnung.

$$64x - 4x^2 = \frac{160}{3}$$

Jedes Glied durch 4 geteilt:

$$16x - x^2 = \frac{40}{3}$$

Alle Vorzeichen umgedreht:

$$x^2 - 16x = -13\frac{1}{3}$$

Das Quadrat durch $\left(\frac{16x}{2x}\right)^2 = 64$ ergänzt:

$$x^2 - 16x + 64 = 64 - 13\frac{1}{3}$$

$$\sqrt{x^2 - 16x + 64} = \sqrt{50\frac{2}{3}}$$

$$x - 8 = \pm\sqrt{50\frac{2}{3}} \qquad \sqrt{50{,}67} = 7{,}12$$

$$x = 8 \pm 7{,}12$$

14 | 167
141
142 | 2600

Da das ganze Gebäude nur 12 m Breite hat, so kann die Mauer unmöglich $8 + 7{,}12 = 15{,}12$ m dick sein, und somit ist hier nur der negative Wert von 7,12 m in Rechnung zu bringen:

$$8 - 7{,}12 = 0{,}88 \text{ m oder } 88 \text{ cm.}$$

Auflösung. Nennt man die Mauerdicke x, so besteht nach Fig. 40 der ganze Querschnitt der Grundmauern aus vier Rechtecken, von denen zwei eine Länge von 20 m und zwei eine solche von $(12 - 2x)$ m, alle aber eine Breite von x m haben.

Somit ist der ganze Querschnitt:

$$F = 2 . 20x + 2(12 - 2x)x$$

oder:

$$F = 40x + 24x - 4x^2 = 64x - 4x^2$$

Da nun nach Erkl. 53 für harten Kalkstein

$$s = 306{,}4 \text{ pro Quadratcentimeter}$$

also $S = \frac{1}{20} \cdot 306{,}4$

oder $S = $ ca. 15 kg pro Quadratcentimeter
oder 150000 kg pro Quadratmeter

beträgt und

$$FS = P$$

ist, so erhält man:

$$150000(64x - 4x^2) = 8000000$$

oder:

$$3(64x - 4x^2) = 160$$

oder:

$$64x - 4x^2 = \frac{160}{3}$$

und hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$x = 88 \text{ cm}$$

c). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 49. Welche Verkürzung erleidet eine 4 mm hohe Säule aus Eichenholz ($\gamma = 0{,}65$) in einem Bruchteil ihrer ursprünglichen Länge ausgedrückt, wenn dieselbe bei 45 cm Durchmesser mit 3000 Zentner belastet ist, a). ohne Rücksicht auf ihr Eigengewicht, b). mit Rücksicht auf ihr Eigengewicht?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 42.

Aufgabe 50. Wie gross ist der Elasticitätsmodulus eines cylindrischen Körpers, der bei 4 m Länge und 20 cm Durchmesser mit 125 600 kg belastet eine Verkürzung von 1,6 mm erleidet?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 43.

Aufgabe 51. Welche Last ist nötig, um einen Ziegelstein zu zermalmen, dessen Breite 25 cm, dessen Dicke 12 cm und dessen Höhe 6,5 cm beträgt, je nachdem derselbe auf die drei verschiedenen Flächen aufgesetzt wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 45.

Aufgabe 52. Welche Kantenlänge muss ein Porphyrwürfel erhalten, wenn derselbe bei zehnfacher Sicherheit 2478000 kg tragen soll?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 46.

Aufgabe 53. Welchen Durchmesser muss man einer cylindrischen Säule aus Sandstein ($s = 180$ pro □cm) geben, wenn dieselbe bei 15facher Sicherheit 8500 kg tragen soll und eine Biegung derselben nicht zu befürchten ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 47.

Aufgabe 54. Wie dick müssen die aus bestem Sandstein ($s = 300$) aufzuführenden Grundmauern eines 10 m langen und 13 m tiefen Gebäudes genommen werden, wenn dieselben einen Druck von 100 000 Zentner bei 15facher Sicherheit zu tragen haben?

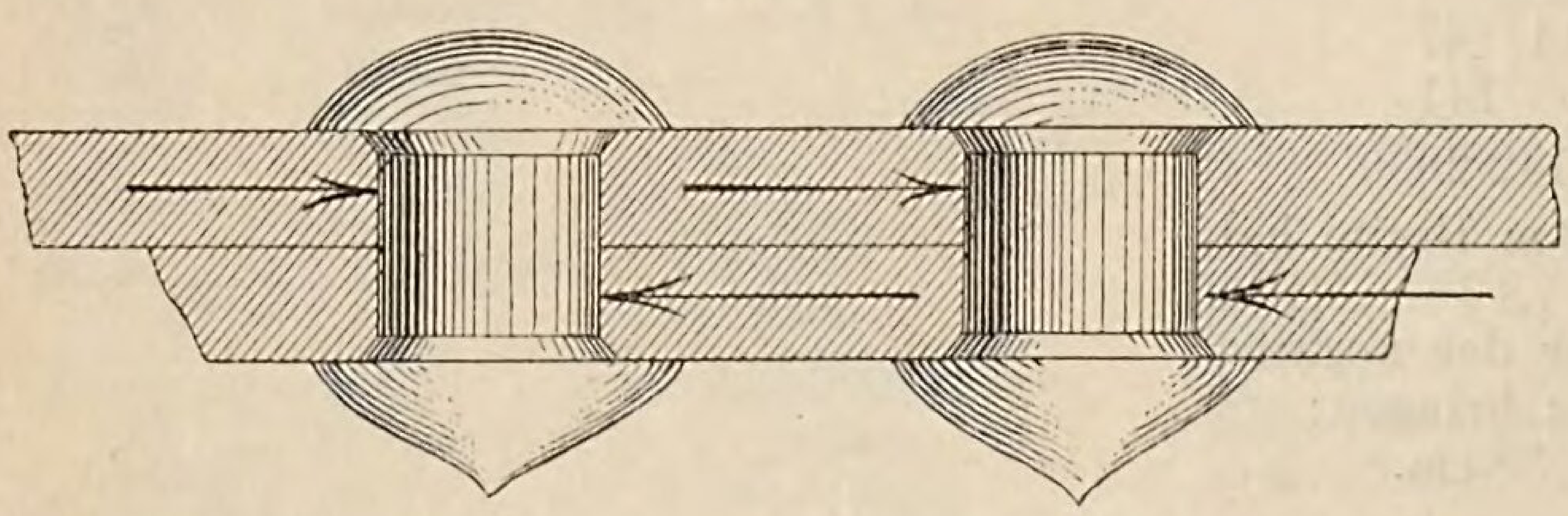
Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 48.

IV. Die Schub- oder Abscherungsfestigkeit.

a). Gesetze der Schub- oder Abscherungsfestigkeit.

Frage 45. Unter welchen Umständen wird ein Körper auf Schub- oder Abscherungsfestigkeit in Anspruch genommen?

Figur 41.



Antwort. Ein Körper wird auf Schub- oder Abscherungsfestigkeit in Anspruch genommen, wenn man ihn mittels einer Schere durchschneidet, wie z. B. die Eisenbarren und Bleche, welche mittels der Luppenschere und Blechschere eine Trennung ihrer Teilchen erfahren. Es bildet hierbei der eine Backen der Schere eine feste Fläche und der andere enthält die scherende Kraft. Ebenso werden die Nietbolzen einer Blechverbindung (s. Fig. 41) oder wird der Keil einer Stangenverbindung auf Schub- und Scherfestigkeit in Anspruch genommen, wenn eine hinreichend grosse Kraft in der Ebene der Bleche etc. senkrecht gegen die Nieten wirksam ist. Es entstehen alsdann in den Flächenelementen Schub- oder Tangentialspannungen s. Ein Verbiegen des Körpers ist infolge der geringen Länge desselben nicht möglich, daher muss bei zu grosser Belastung eine Zerteilung des Körpers in seinem Querschnitt F erfolgen. Die Ebene, in der der Körper festgehalten wird und diejenige, in welcher die Kraft wirkt, sind parallel zu einander und liegen einander unendlich nahe.

Frage 46. Wie lautet das Gesetz über die Schub- oder Scherfestigkeit?

Erkl. 59. Für s ist in den nebenstehenden Formeln der Sicherheitsmodulus, der Tragmodulus oder der Festigkeitsmodulus aus den gegebenen Tabellen zu setzen, je nachdem die Beanspruchung sein soll entsprechend der zulässigen Belastung, der Belastung an der Elasticitätsgrenze oder dem Bruch; denn die Formeln gelten auch für solche Fälle, wo eine wirkliche Trennung der auf Abscherung beanspruchten Flächen bezweckt wird, also für das Abscheren, Abschneiden, Durchstossen und Durchbohren mittels hierzu geeigneter Maschinen.

Antwort. Das Gleichgewicht zwischen der beanspruchenden Kraft und der Festigkeit des betreffenden Körpers gegen Abscheren stellt sich für gewöhnlich in derselben Weise dar, wie für Druck und Zug, d. h. es ist die Widerstandsfähigkeit eines auf Schub- oder Scherfestigkeit beanspruchten Körpers direkt proportional dem Querschnitt. Der Modulus dieser Festigkeit ist nahezu gleich dem Modulus der absoluten Festigkeit, deshalb kann man bei wirklichen Berechnungen diesen letzteren oder bei genauerer Berechnung als Erfahrungswert $^4/_5$ des letzteren anwenden.

Ist der Inhalt des fraglichen Querschnitts $=$ F und die Spannung pro Flächeneinheit desselben $= s$, so ergibt sich die Gleichung:

1). $P = Fs$

oder es ist der Flächeninhalt:

2). $F = \frac{P}{s}$

Diese Gleichung kann auch benützt werden zur Bestimmung der erforderlichen Querschnittsflächen der Niete bei Blechverbindungen.

Ist der Querschnitt wie in Fig. 41 ein Kreis vom Durchmesser d, so ist

$$F = \frac{d^2\pi}{4}$$

also

3). $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi s}}$

Ist der Querschnitt aber ein Rechteck von den Seiten b und h, so ist

$$F = bh$$

und folglich

4). . . $b = \frac{P}{sh}$ oder $h = \frac{P}{sb}$

b). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 55. Welche Kraft muss aufgewendet werden, wenn ein Schmiedeeisenbarren von 4 cm Dicke und 12 cm Breite mittels der Luppenschere durchgeschnitten werden soll?

Hilfsrechnung.

$$4 \,.\, 12 \,.\, 3300 = 48 \,.\, 3300$$

```
 144
 144
158400
```

Auflösung. Nach Tabelle auf Seite 38 ist der Modulus der absoluten Festigkeit für dickere Stäbe aus Schmiedeeisen $s =$ 3300 pro Quadratcentimeter; nehmen wir nun die obige Gleichung 1). $P = Fs$ zu Hilfe und setzen die gegebenen Werte ein, so ist, da $F = 4 \,.\, 12$ cm beträgt:

$$P = 4 \,.\, 12 \,.\, 3300$$

oder: $P = 158400$ kg.

Aufgabe 56. Es sollen zwei Blechplatten nach der in Fig. 41 angegebenen Weise durch drei gleich starke Niete verbunden werden. Welchen Durchmesser erhalten dieselben, wenn die in Richtung der Blechplatten wirksame Abscherungskraft 5100 kg beträgt?

Hilfsrechnung.

$$\frac{1700}{400} = \frac{17}{4} = 4{,}25$$

$$\sqrt{\frac{4 \,.\, 4{,}25}{3{,}14}} = 2\sqrt{\frac{425}{314}}; \quad 425 : 314 = 1{,}353$$

```
425 : 314 = 1,353
314
----
1110
 942
----
1680
1590
----
1110
```

$$\sqrt{1{,}35|3} = 1{,}17$$

```
√1,|35|3 = 1,17
 1
 --
 2|35
   21
 ----
22|1430
   1489
```

Auflösung. Denken wir uns die abscherende Kraft auf alle drei Nieten gleichmässig verteilt, so kommt auf jede die Belastung

$$P = \frac{5100}{3} \text{ oder } 1700 \text{ kg}$$

nach der obigen Formel 2). ist nun:

$$F = \frac{P}{s}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte und aus Tabelle Seite 32 für $s = 400$ kg pro Quadratcentimeter (siehe unter Schub c. Gussstahl) eingesetzt:

$$F = \frac{1700}{400} \text{ oder } 4{,}25$$

und somit

$$d = \sqrt{\frac{4 \,.\, 4{,}25}{3{,}14}}$$

oder:

$$d = 2{,}34 \text{ cm}$$

(siehe nebenstehende Hilfsrechnung).

NB. Selbstverständlich ist in allen Fällen, wo mehrere in einer Reihe befindliche Niete an dem Widerstand gegen die abscherende Kraft sich beteiligen, für P derjenige Bruchteil der ganzen Kraft in Rechnung zu bringen, welcher bei der Verteilung auf das einzelne Niet fällt.

Aufgabe 57. Bis zu welcher Stärke kann man Eisenbleche mit dem Stempel einer Durchstoss- oder Lochmaschine lochen, wenn der grösste Stempel der Maschine 3 cm Durchmesser hat und mit einem Druck von 50 000 kg abwärts bewegt wird und der Widerstand gegen das Lochen erfahrungsmässig 4300 kg pro Quadratcentimeter ist?

Hilfsrechnung.

$$\frac{50000}{3{,}14 \,.\, 3 \,.\, 4300} = \frac{500}{3{,}14 \,.\, 3 \,.\, 43}$$

```
  3,14 . 3 . 43
= 3,14 . 129
  ----------
    2826
   3768
  ----------
   405,06
```

```
50000 : 40506 = 1,234
40506
-----
 94940
 81012
------
 139280
 121518
 ------
 177620
```

Auflösung. Wenn in ein Blech ein kreisrundes Loch geschlagen wird, so ergibt sich als Begrenzung desselben eine cylindrische Fläche vom Stempeldurchmesser d und der Höhe oder Blechstärke δ, das ist im vorliegenden Fall der fragliche Bruchquerschnitt:

$$F = \pi d \delta$$

und wenn wir diesen Wert in die Formel

$$P = F s$$

einsetzen, so ergibt sich:

$$P = \pi d \delta s$$

oder da nach der Blechstärke gefragt ist:

$$\delta = \frac{P}{\pi d s}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte und für $s = 4300$ eingesetzt:

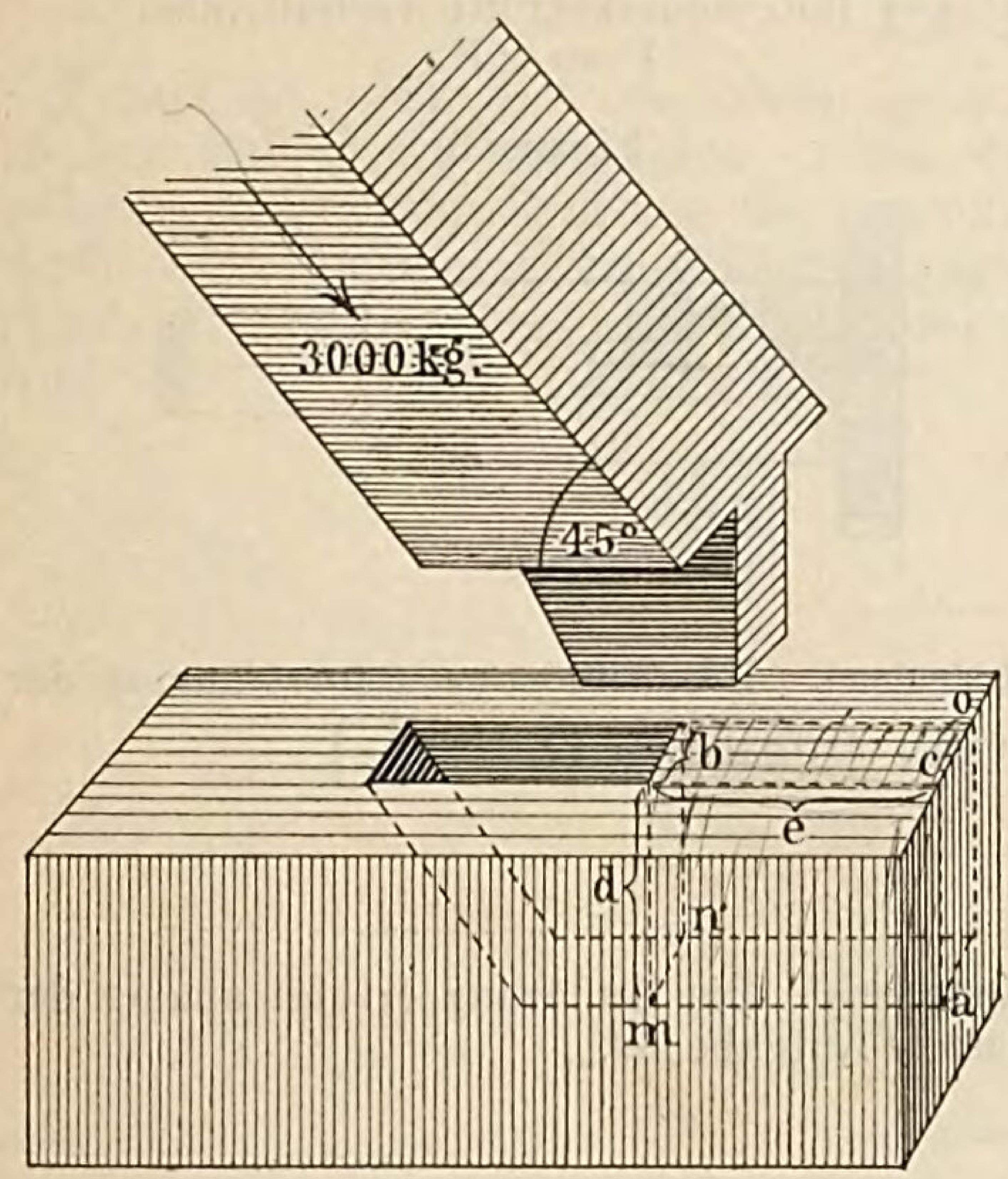
$$\delta = \frac{50000}{3{,}14 \,.\, 3 \,.\, 4300}$$

oder:

$$\delta = 1{,}234 \text{ cm}$$ (siehe Hilfsrechn.)

Aufgabe 58. Wie weit muss man das Loch eines Zapfens, welches $b = 5$ cm breit und $d = 8$ cm tief ist, vom Balkenende abstehen lassen, damit der vorhandene Druck, in der um 45° geneigten hölzernen Strebe, $P = 3000$ kg nicht ein Herausschieben des stehen bleibenden Holzes verursacht und wenn man die zulässige Beanspruchung für Fichtenholz $s = 7$ kg pro Quadratcentimeter annehmen kann?

Figur 42.



Hilfsrechnungen.

1). . . $3000 . \cos 45^0 = \log 3000 + \log \cos 45^0$

$$\begin{aligned} \log 3000 &= 3{,}4771213 \\ \log \cos 45^0 &= 9{,}8494850-10 \\ \hline \log P &= 3{,}3266063 \end{aligned}$$

mithin: num-log P oder $P = 2121{,}3$ kg

2). . . $\frac{2121}{(5+16).7} = \frac{2121}{21.7} = \frac{101}{7}$ ca. $14^1/_2$

Auflösung. Es sind in dem vorliegenden Fall drei Abscherungsflächen, eine wagerechte na und zwei senkrechte on und cm vorhanden (siehe Fig. 42). Bezeichnen wir die gesuchte Entfernung mit e, so ist der Inhalt der horizontalen Fläche $= be$ und der Inhalt der beiden vertikalen Flächen $= 2de$ oder

$$F = be + 2de$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung

$$P = Fs$$

so ergibt sich:

$$P = e(b + 2d)s$$

oder für die gesuchte Grösse:

$$e = \frac{P}{(b + 2d)s}$$

Nun ist bei einem Winkel von 45° die auf Abscherung wirkende Horizontalkraft:

$$P = 3000 . \cos 45^0$$

oder: $P = 2121$ kg (siehe Hilfsrechn. 1)

setzen wir in die obige Bestimmungsgleichung für P den soeben berechneten Wert und für die übrigen Grössen die entsprechenden Zahlenwerte, so erhalten wir:

$$e = \frac{2121}{(5 + 2.8)7}$$

oder:

$$e = 14^1/_2 \text{ cm}$$

(siehe Hilfsrechn. 2).

Aufgabe 59. Durch eine Blechtafel von 1,2 cm Dicke soll ein Loch von 1,6 cm Durchmesser gestossen werden. Welche Kraft ist dazu erforderlich?

Hilfsrechnung.

3,14 . 1,6	.	1,2 . 4300
1884		5160
314		
5,024		

Auflösung. Wie schon bei Aufgabe 57 bemerkt wurde, ist der Widerstand gegen das Lochen 4300 kg pro Quadratcentimeter und die abzuscherende Fläche:

$$F = \pi d \delta$$

also, da

$$P = Fs$$

oder:

$$P = \pi d \delta s$$

5,024 . 5160
30144
5024
25120
25923,84

ist, so ergibt sich unter Einsetzung der gegebenen Zahlenwerte:

$$P = 3{,}14 \,.\, 1{,}6 \,.\, 1{,}2 \,.\, 4300$$

oder:

$$P = 25924 \text{ kg}$$ (siehe Hilfsrechn.)

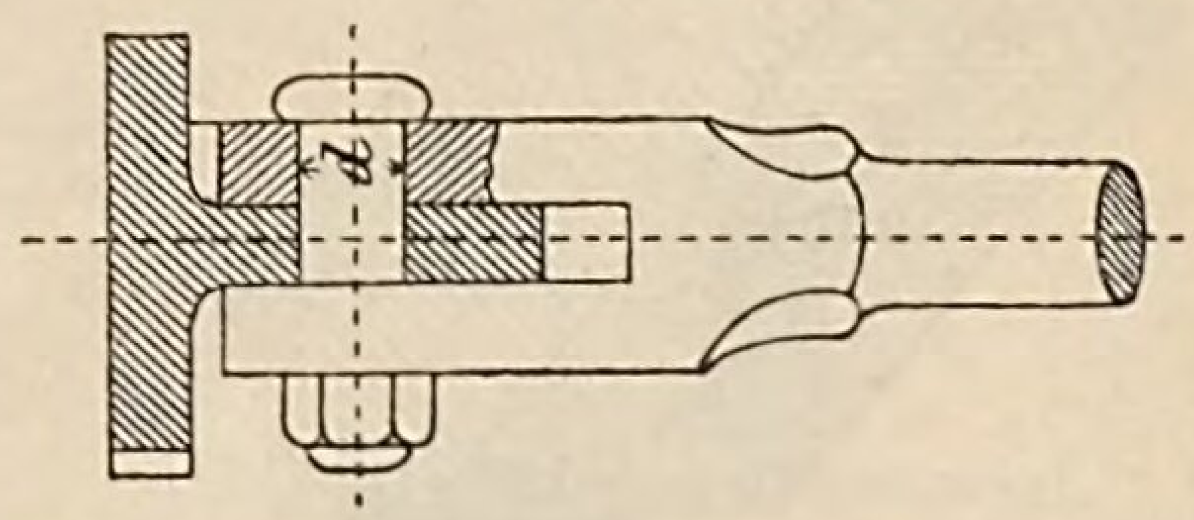
c). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 60. Welche Schubbelastung kann ein nach Art der Fig. 43 angeordneter Charnierbolzen von 5,5 cm Durchmesser mit Sicherheit tragen, wenn er an beiden Enden festgehalten gedacht wird und die Spannung $s = \frac{4}{5} \,.\, 800$ oder $s = 640$ kg pro Quadratcentimeter angenommen wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 55 und ist zu berücksichtigen, dass sich in diesem Fall die abscherende Kraft auf zwei Bolzenquerschnitte verteilt, also

$$P = 2 F s$$

Figur 43.



Aufgabe 61. Welchen Durchmesser erhält der in Fig. 43 dargestellte Bolzen, wenn er einer Kraft von 12 000 kg sicher widerstehen soll und s nur zu 400 kg pro Quadratcentimeter in Rechnung gebracht werden soll?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 56 $\left(F = \frac{P}{2s}\right)$

Aufgabe 62. In einer hölzernen Strebe, die um 30° geneigt ist, ist ein Druck von 5000 kg vorhanden. Es soll berechnet werden, wie gross der Abstand des Zapfens vom Ende des horizontalen Balkens sein muss, damit das vom Zapfen erfasste Stück des letzteren nicht ausgeschert wird ($s = 7$ kg pro Quadratcentimeter), das Zapfenloch habe 6 cm Breite und 6 cm Tiefe?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 58.

Aufgabe 63. Welche Kraft ist nötig zum Lochen eines 1 cm starken Bleches, bei 2 cm Lochdurchmesser (s sei 3500 kg pro Quadratcentimeter)?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 59.

V. Die relative oder Biegungselasticität und -Festigkeit.

a). Theorie der relativen Elasticität und Festigkeit.

Frage 47. Was versteht man unter relativer oder respektiver Festigkeit der Körper und wie gelangt man im allgemeinen zur Kenntnis derselben?

Antwort. Relative oder respektive Festigkeit der Körper nennt man diejenige Stärke derselben, mit welcher sie einer auf ihre Längenachse normal wirkenden Kraft entgegenstreben. Nimmt man hierbei in gleicher Weise Körper von gegebenen Di-

mensionen, und beschwert sie mit einer Last in Kilogramm ausgedrückt so lange bis sie zerbrechen, so gibt das hierzu angewandte Gewicht das Maximum[1]) ihrer relativen Festigkeit. Da dieser Gegenstand auf gleiche Weise und wohl noch mehr von praktischem Nutzen ist als die Kenntnis der absoluten Festigkeit, so hat man sich bemüht, ihn durch theoretische Untersuchungen und praktische Erfahrungen genau zu ergründen.

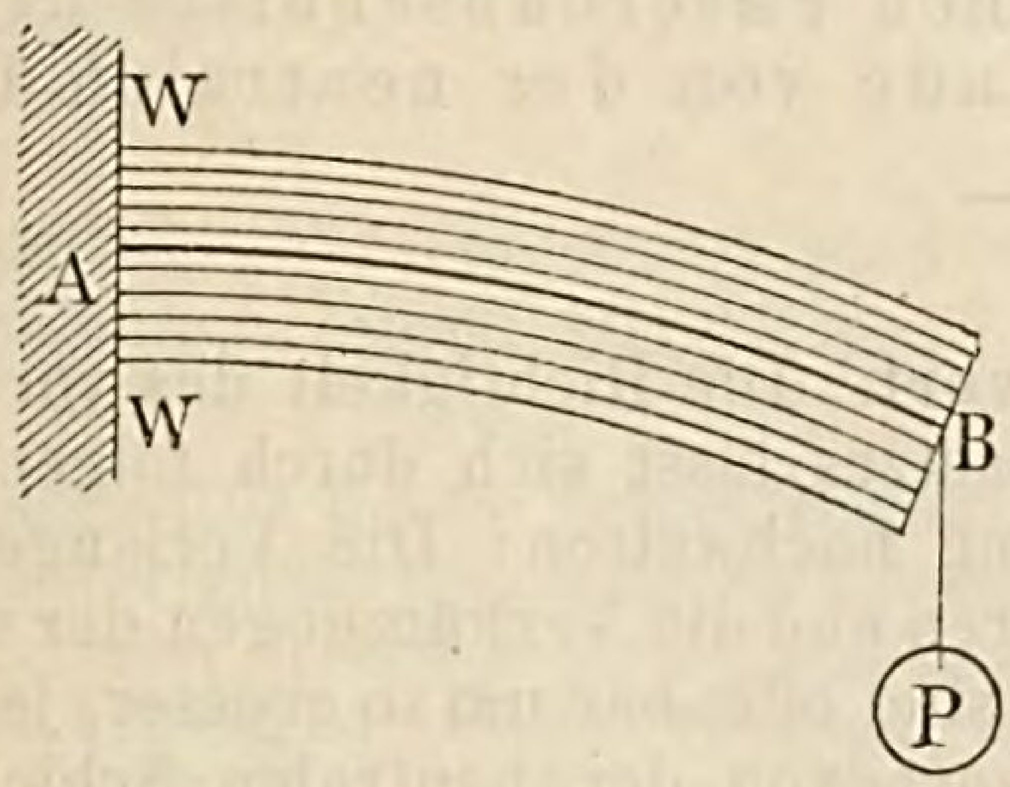
[1]) Siehe Erkl. 60.

Erkl. 60. Das Maximum lat. (Superlativ oder höchste Steigerungsstufe von magnus = gross) das Grösste, Höchste, die grösste Menge, das grösste Gewicht, die höchste Zahl, im Gegensatz von

Minimum (Superlativ von minor, d. i. kleiner, geringer, weniger), das Kleinste oder Geringste, Mindeste; besonders das kleinste Mass, der geringste oder niedrigste Grad einer Grösse.

Frage 48. Was ist an einem prismatischen Balken zu beobachten, wenn derselbe in horizontaler Richtung mit dem einen Ende unveränderlich befestigt, am entgegengesetzten Ende durch ein Gewicht belastet wird?

Figur 44.



Antwort. Wenn man das eine Ende eines prismatischen Balkens in horizontaler Lage einspannt, z. B. in eine senkrechte Wand WW einmauert und das andere freie Ende desselben mit einem Gewicht belastet, so wird durch diese Belastung eine Biegung des Balkens hervorgebracht; der vorher geradlinige Balken nimmt eine krummlinige Form an, deren auswärts gewölbte oder konvexe Seite nach oben gerichtet ist (siehe Fig. 44).

Frage 49. Was versteht man unter der neutralen Faserschicht oder der elastischen Fläche?

Antwort. Stellt man sich vor, dass der Balken aus lauter parallelen, in unverschiebbarer Lage aneinander befestigten Längsfasern, sog. Kohäsionsbändern, bestehe (ganz abgesehen davon, ob die Zusammensetzung seiner Teile, sein Gefüge oder seine Struktur im physikalischen Sinn wirklich faserig ist oder nicht), so sieht man sofort, dass bei eintretender Biegung die oberen Fasern ausgedehnt, die unteren zusammengedrückt werden. Zwischen der obersten und untersten Faserschicht muss irgendwo eine mittlere Faserschicht sich befinden, welche weder eine Verlängerung noch eine Verkürzung erleidet; diese mittlere Faserschicht AB (Fig. 44) wird die neutrale Faserschicht oder die elastische Fläche genannt.

Frage 50. Durch die Verlängerungen resp. Verkürzungen der einzelnen Faserschichten kommt die Elasticität des Balkens in welcher Art und Weise zur Wirkung?

Antwort. Durch die Verlängerungen resp. Verkürzungen der einzelnen Faserschichten

Erkl. 61. In der Regel sind alle Körper mehr oder weniger elastisch und werden sich daher unter der drückenden Last erst biegen, ehe sie zerbrechen. Dieses Biegen ist aber mit einem Herabsinken der gedrückten Teile verbunden, wozu eine gewisse Zeit erfordert wird. Hört dann der Druck der Last früher auf, oder geht derselbe zu einer anderen Stelle über, ehe der tragende Teil so tief herabgesunken ist, dass seine Fasern oder Fibern zerreissen, so wird er über seine Tragkraft belastet werden können. Anwendungen hiervon gibt das Laufen über dünne Bretter, über dünnes Eis etc.

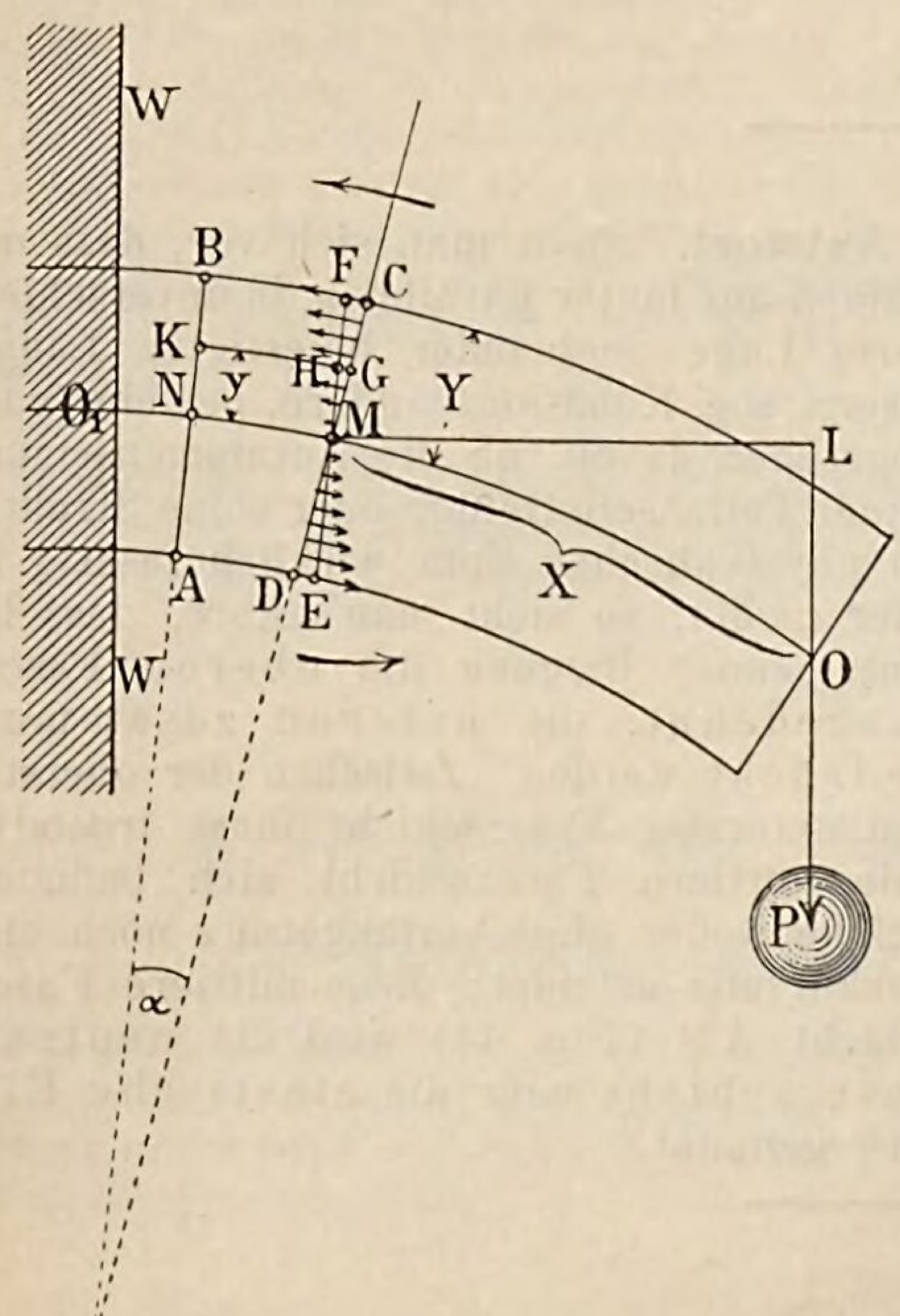
treten infolge der Elasticität in jeder derselben Spannungen auf, welche der Formveränderung entgegenwirken und den Balken wieder gerade strecken, sobald die biegende Kraft aufhört (vorausgesetzt, dass letztere den Balken nur innerhalb der Elasticitätsgrenze beansprucht hat).

Frage 51. Welches Gesetz gilt über die Längenveränderungen resp. über die Spannungen der einzelnen Faserabschnitte?

Antwort. Die Längenänderungen der einzelnen Fasernabschnitte verhalten sich wie ihre Abstände von der neutralen Faser, und da nach dem Elasticitätsgesetz die Spannung der Längenveränderung proportional ist, so verhalten sich auch die Spannungen der einzelnen Fasernabschnitte wie ihre Abstände von der neutralen Faser.

Frage 52. Aus welcher Betrachtung ergibt sich die Richtigkeit des vorstehenden Gesetzes?

Figur 45.



Antwort. Die Richtigkeit des vorstehenden Gesetzes lässt sich durch folgende Betrachtung nachweisen: Die Verlängerungen der oberen und die Verkürzungen der unteren Fasern sind offenbar um so grösser, je weiter die Fasern von der neutralen Schicht entfernt liegen. Nehmen wir an, dass die einzelnen Querschnittsebenen des Balkens, welche vor dem Eintreten der Biegung rechtwinklig zur horizontalen Achse des Balkens standen, auch nach eingetretener Biegung noch ihre ebene Form und ihre rechtwinklige Lage zu der nunmehr gekrümmten Achsenlinie des Balkens beigehalten, so werden die beiden, sehr nahe bei einander liegenden Querschnittsebenen $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ (siehe Fig. 45), welche vorher einander parallel waren, beim Eintreten der Biegung die gegeneinander geneigten oder konvergierenden Lagen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ annehmen. Die zwischen diesen beiden Querschnittsebenen liegenden Fasern-Abschnitte hatten vor dem Eintreten der Biegung sämtlich die gleiche Länge $\overline{MN} = \overline{AE} = \overline{BF}$, während die zwischen den beiden Ebenen $\overline{EF}$ und $\overline{CD}$ liegenden Teilchen die Längenveränderungen der einzelnen Fasernabschnitte bei eingetretener Biegung darstellen. Nach Fig. 45 ist aber

$$\overline{HG} : \overline{FC} = \overline{MG} : \overline{MC} \text{ [1]}$$

[1]). Siehe Erkl. 62.

Erkl. 62. Ein Lehrsatz aus der Planimetrie sagt, dass sich die Peripherien verschiedener Kreise zu einander verhalten wie ihre Radien, folglich verhalten sich auch die Längen der Kreisbögen, welche zu gleichen Zentriwinkeln gehören, wie die zugehörigen Radien. Denkt man sich nun die Biegung eines freien elastischen Stabes (z. B. von Kautschuk) so lange fortgesetzt, bis beide Enden zusammenstossen, so bilden die Aussen- und Innenfläche zwei konzentrische Kreise und erhalten folglich ungleiche Längen. Die äussere Fläche hat eine Dehnung erlitten, und ihr Widerstand gegen diese bedingt einen Zentraldruck, durch welchen der innere Raum eine Verdichtung und somit die konzentrische Innenfläche des Stabs eine Verkürzung erfahren muss. Die Kraft, welche dieses letztere herbeiführt, ist der dehnenden Kraft an der Oberfläche gleich.

Aehnliche Einwirkungen zeigen sich begreiflich bei jedem Bogenstück eines gebogenen elastischen Stabs und müssen verhältnismässig auch an dem an einem Ende festgeklemmten, am andern Ende belasteten Stab zum Vorschein kommen.

oder, wenn man mit s die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnitts) für die im Abstand $\overline{MG} = y$ von der Neutralen befindliche Faser $\overline{GH}$ bezeichnet, und mit S die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnitts) für die im Abstand $\overline{MC} = Y$ befindliche Faser $\overline{FC}$, so ist:

$$s : S = y : Y$$

oder:

$$1). \quad \ldots \quad s = \frac{S y}{Y}$$

d. h. die Grösse der Spannung in einer Faser ist proportional dem Abstand dieser von der neutralen Schicht, was dem vorerwähnten Gesetz entspricht.

Frage 53. Wie bestimmt man die totale Spannung irgend einer Faser?

Erkl. 63. Die durch nebenstehende Formel ausgedrückte totale Spannung ist als eine Zugspannung oder positive Spannung anzusehen, wenn die betreffende Faser oberhalb der neutralen Schicht NM liegt, als eine Druckspannung oder negative Spannung dagegen, wenn dieselbe unterhalb der neutralen Schicht MN liegt. Der nebenstehende Ausdruck kann daher als allgemein giltiger Ausdruck für die Spannung irgend einer im Abstand y von der Neutralen befindlichen Faser betrachtet werden.

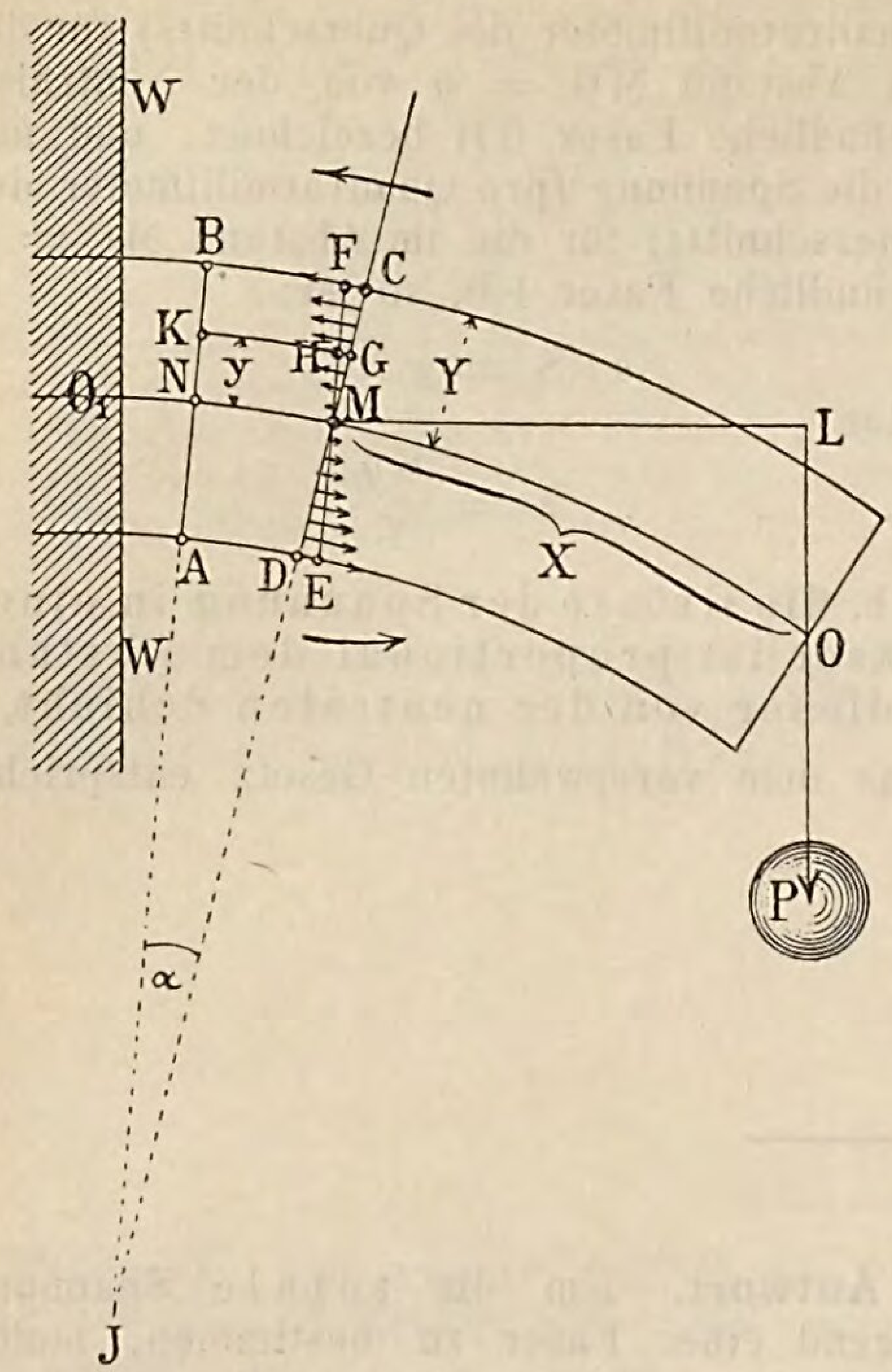
Antwort. Um die totale Spannung irgend einer Faser zu bestimmen, multipliziert man die pro Quadratmillimeter ihrer Querschnittsfläche gefundene Spannung mit der Anzahl der Quadratmillimeter, welche ihre Querschnittsfläche enthält. Bezeichnet man also mit f den Flächeninhalt der Querschnittsfläche des in der Entfernung y von der Neutralen befindlichen Streifens GH (siehe Fig. 45), so ist die totale Spannung der in der Entfernung y von der Neutralen NM liegenden Faserschicht:

$$2). \quad \ldots \quad sf = S \cdot \frac{y}{Y} \cdot f$$

Frage 54. Setzen wir voraus, die Kraft P sei nur so gross, dass eine schwache Biegung innerhalb der Elasticitätsgrenze erfolgt, so wird der Balken eine neue Gleichgewichtslage annehmen. Aus welcher Betrachtung ergeben sich die Bedingungen dieser neuen Gleichgewichtslage?

Antwort. Um die Bedingungen des Gleichgewichts zu ermitteln, denken wir uns, es stelle Fig. 46 den Längendurchschnitt des ursprünglich prismatischen Stabs vor, der bei WW in eine Wand eingemauert und an seinem freien Ende O durch ein Gewicht P gebogen sei. Die Linie O_1NMO bezeichnet die Lage seiner neutralen Schicht. Ein beliebig kleiner Abschnitt des Stabes hatte vor der Biegung die Gestalt ABFE, welche sich infolge der Biegung in ABCD veränderte. Die oberste Faserschicht erfuhr dadurch auf die Strecke $\overline{BF}$ die Dehnung $\overline{FC}$, die unterste Faser-

Figur 46.



Erkl. 64. Oberhalb der Neutralen $\overline{WV}$ (siehe Fig. 47) wirken die Spannungswiderstände von rechts nach links, unterhalb derselben von links nach rechts. Die Summe dieser Kräfte muss somit gleich Null sein Nach der in Antw. auf Frage 53 gegebenen Gleichung ist also:

3). $\Sigma\left(\frac{S}{Y} \cdot yf\right) = 0$

oder wenn man die Grösse $\frac{S}{Y}$ als gemeinschaftlichen Faktor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder fortlässt, so erhält man:

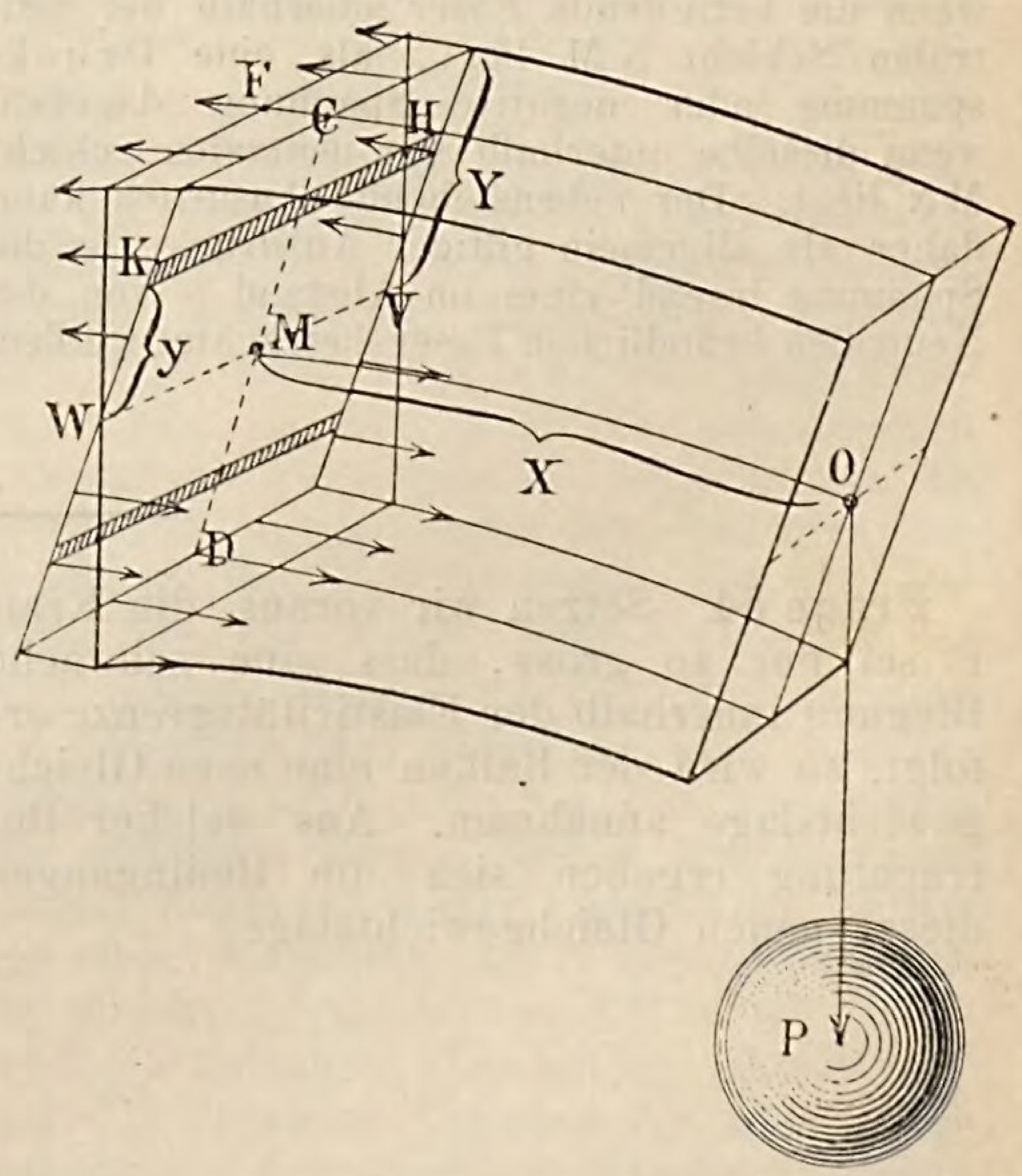
4). $\Sigma(fy) = 0$

Erkl. 65. Die obenstehende Gleich. 4). zeigt, dass die Momentensumme sämtlicher Flächenteilchen der Querschnittsfläche in Bezug auf den in der neutralen Faserschicht liegenden Horizontaldurchmesser VW, welcher die neutrale Achse genannt wird, gleich Null ist, d. h. es ist kein Bestreben zur Verschiebung des betreffenden Querschnitts nach der Längenrichtung des Balkens vorhanden.

Nach der Lehre vom Schwerpunkt (siehe *R. Klimpert*, Lehrbuch der Statik) kann statt dieser Momentensumme auch das Produkt aus der ganzen Querschnittsfläche und dem Abstand ihres Schwerpunkts von jener Achse gesetzt werden, und da dieses Produkt gleich Null ist, so folgt daraus, dass der Schwerpunkt der Querschnittsfläche in der neutralen Achse VW (Fig.

schicht $\overline{AE}$ dagegen eine gleich grosse Zusammendrückung $\overline{DE}$, während die neutrale Schicht $\overline{NM}$ weder eine Verlängerung noch eine Verkürzung erlitt, so, dass wir die Biegung an dieser Stelle als eine Drehung des Querschnitts $\overline{EF}$ um die durch M gelegte Horizontallinie $\overline{WV}$ (siehe Fig. 47) als Drehungsachse auffassen können, deren Grösse gleich dem Winkel α ist, welcher (siehe Fig. 46) entsteht, wenn die beiden konvergierenden Linien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ bis zu ihrem Durchschnitt verlängert werden. Damit sind wir nun auch im stande, die Gleichgewichtsbedingung für den gebogenen Stab aufzustellen. Diese Bedingung ist, dass dem gedrehten Querschnitt durch die elastischen Kräfte ein ebenso grosses Drehungsmoment nach rückwärts erteilt wird, als ihm durch das Gewicht P nach entgegengesetzter Richtung (Uhrzeigerrichtung) gegeben wird. Wir können nun CMO als einen Winkelhebel ansehen, an dessen einem Arm $\overline{MO} = x$ (siehe Fig. 47 und 48) in O das Gewicht oder die biegende Kraft P angreift, und dessen anderer Arm durch den Querschnitt CMD gegeben ist, an dessen sämtlichen Punkten Kräfte angreifen, welche ihn in seine frühere Lage zurückzuziehen suchen.

Figur 47.

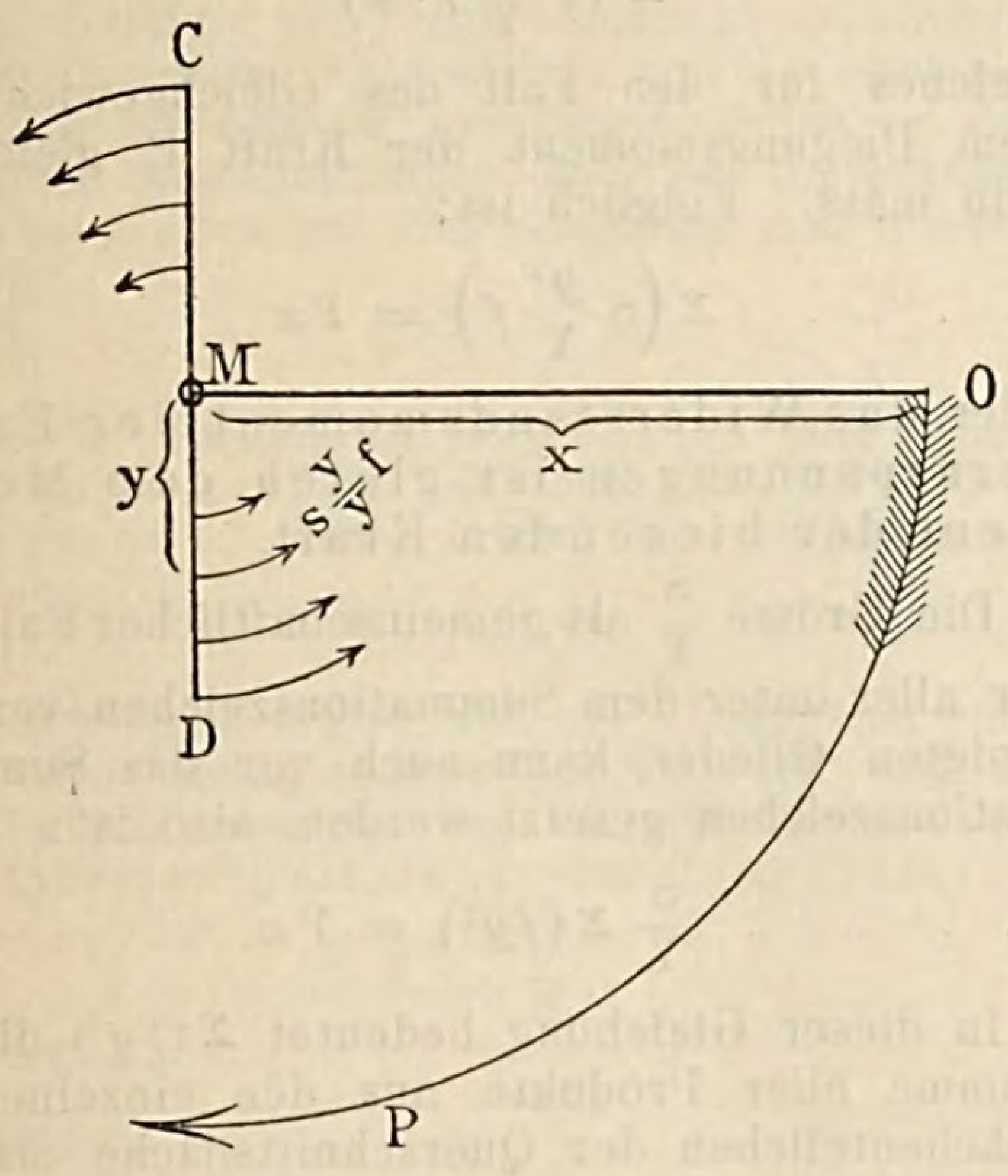


Aus dem in Antw. auf Frage 51 gegebenen Gesetz folgt, dass irgend eine beliebige Faserschicht, irgend ein Kohäsionsband in der Entfernung y (z. B. die Faserschicht KH,

47) liegt. Durch obenstehende Gleichung 3). wird also die Lage der neutralen Achse bestimmt; diese Gleichung drückt aus:

dass die neutrale Faserschicht diejenige ist, welche durch die Schwerpunkte sämtlicher Querschnittsflächen hindurchgeht.

Figur 48.



Erkl. 66. Zur vorläufigen Erklärung des hier auftretenden Begriffs des Trägheitsmoments, welcher in dem Lehrbuch der „Dynamik“ dieser Encyklopädie eingehender erörtert wird, diene folgendes:

Wenn ein Körper eine fortschreitende Bewegung ausführt, so haben seine sämtlichen Punkte gleiche Geschwindigkeiten, d. h. sie durchlaufen in gleichen Zeiten gleiche Wege. Bei einer drehenden Bewegung eines Körpers dagegen sind die Geschwindigkeiten seiner einzelnen Punkte sehr ungleich, und wenn wir uns ein sich drehendes Schwungrad denken, so sind offenbar die Geschwindigkeiten der von der Achse am entferntesten liegenden Teilchen am grössten, und die Geschwindigkeiten der der Achse am nächsten liegenden Teilchen am kleinsten. Da nun, wie in der Lehre von der Dynamik nachgewiesen wird, die einem Körper von der Masse m und der Geschwindigkeit v innewohnende lebendige Kraft oder sein Bewegungsvermögen

$$k = \frac{1}{2} m v^2$$

beträgt, so muss man, um die gesamte lebendige Kraft eines rotierenden Körpers zu ermitteln, die lebendige Kraft eines jeden seiner materiellen Punkte von der Masse m und der Ge-

Fig. 47) von der Mitte M, weniger gedehnt wird als die äusserste Faserschicht, welche sich in der Entfernung Y von der Mitte M befindet, und bezeichnen wir die Verlängerung der äussersten Faserschicht mit λ_1, so ist ganz allgemein $\frac{\lambda_1 y}{Y}$ die Verlängerung der Faserschicht KH (Fig. 47) in der Entfernung y von der Mitte M. Dasselbe gilt für die untere Hälfte des Stabes, sobald man den Wert λ_1 als die der äussersten Faserschicht zugehörige Verkürzung ansieht.

Da nun nach Antw. auf Frage 51 der Spannungswiderstand S der Längenveränderung λ_1 proportional ist, so folgt daraus, dass derselbe im Verhältnis der Grösse von $\frac{Sy}{Y}$ gegen die Mitte hin sich vermindert (siehe Gleich. 1). in Antw. auf Frage 52).

Für die Dehnung λ_1, die der Längeneinheit entspricht, ist der elastische Widerstand, bezogen auf 1 qmm Querschnittsfläche:

$$S = \lambda_1 E$$

denn durch die dehnende Kraft E, den Elasticitätsmodulus, würde eine Dehnung = 1 erzielt werden müssen. Die Dehnung $\frac{\lambda_1 y}{Y}$ bezogen wie vorher auf die Längeneinheit und 1 qmm Querschnitt, entspricht also ganz allgemein dem Spannungswiderstand:

$$\frac{Sy}{Y} = \frac{\lambda_1 E y}{Y}$$

Dies gilt für jeden Punkt der Querschnittsfläche des gebogenen Stabs von M bis C (Fig. 47 und 48) aufwärts, sowie von M bis D abwärts, wenn man im letzteren Fall statt Dehnung sagt Zusammendrückung.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen erfordern nun, dass die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher auf das vom ganzen Balken abgetrennte Stück MO wirkenden Kräfte in Bezug auf die neutrale Achse VW (Fig. 47) gleich Null ist. Es muss also das statische Moment der Kraft P, welche an dem Hebelarm $MO = x$ wirkt und für sich allein eine Drehung in Richtung der Uhrzeiger hervorbringen würde, siehe Fig. 48, gleich der Summe der statischen Momente aller Spannungswiderstände sein, deren jeder für sich allein an dem Hebelarm $y_1, y_2 \ldots y_n$ etc. eine der Uhrzeigerrichtung entgegengesetzte Drehung um M hervorbringen würde.

Die Kraft P bildet mit ihrem Arm x das „Biegungsmoment“:

$$M_1 = Px$$

schwindigkeit v summieren und erhält auf diese Weise:

$$L = \Sigma \left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

Wenn sich nun der Körper mit einer Geschwindigkeit umdreht, so dass ein Punkt in der Entfernung von 1 Meter von der Drehachse eine Geschwindigkeit von W besitzt, und W z. B. = 2 Meter angenommen wird, so ist die Geschwindigkeit eines in der Entfernung r von der Drehachse befindlichen Punktes offenbar $v = r\,W$ (oder wenn $r = 2, 3, 4, \ldots n$ Meter beträgt, dann ist $v = 2.2,\ 2.3,\ 2.4, \ldots 2n$ Meter) und wenn man in analoger Weise die Geschwindigkeit eines jeden der übrigen materiellen Punkte durch seine Entfernung von der Drehachse und die sog. Winkelgeschwindigkeit W in der Entfernung „eins" von der Drehachse ausdrückt, so erhält man für die lebendige Kraft des rotierenden Körpers einen Ausdruck von der Form:

$$L = \Sigma \left(\frac{1}{2} m r^2 W^2\right)$$

Die Grösse $\frac{1}{2} W^2$ ist gemeinschaftlicher Faktor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder und kann deshalb vor das Summationszeichen gesetzt werden; es ist also:

$$L = \frac{1}{2} W^2 . \Sigma (m r^2)$$

Der Ausdruck $\Sigma (m r^2)$ bedeutet die Summe der Produkte aus allen einzelnen Massenteilchen des Körpers in die Quadrate ihrer Abstände von der Drehachse und wird das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf diese Drehachse genannt; bezeichnet man letzteres mit T, dann ist:

$$L = \frac{1}{2} W^2 . T$$

Erkl. 67. Die Form des Ausdrucks für das Trägheitsmoment:

$$T = \Sigma (f y^2)$$

lässt erkennen, dass dasselbe von der Anzahl der Flächenelemente f und von ihrer Anordnung zur neutralen, durch den Schwerpunkt der Fläche gehenden Achse abhängt. Das ist wohl zu beachten, da es für die Wahl der Querschnittsform eines auf Biegung beanspruchten Körpers von Wichtigkeit ist.

Erkl. 68. In der nebenstehenden Gleichung 7). bedeutet S die Spannung pro Quadratmillimeter des Querschnitts für die im Abstand Y von der neutralen Schicht befindliche Faser, also, wenn man, wie hier angenommen wurde, unter Y die Entfernung der am weitesten von der Neutralen entfernt liegenden Faser versteht, so bezeichnet

8). $$S = \frac{P x . Y}{T}$$

die stärkste Spannung, welche in der ganzen Querschnittsfläche vorkommt. Letztere ist eine Zugspannung, wenn die beiden Grössen Px und Y beide positiv oder beide negativ sind, eine Druckspannung dagegen, wenn von den beiden Grössen Y und Px die eine positiv, die andere negativ ist.

und die in sämtlichen Flächenelementen auftretenden Spannungen:

$$S \frac{y_1}{Y} f, \quad S \frac{y_2}{Y} f, \quad S \frac{y_n}{Y} f \quad \text{etc.}$$

bilden, an den zugehörigen Hebelarmen y_1, $y_2 \ldots y_n$ (d. h. in den Entfernungen $y_1, y_2 \ldots y_n$ von dem Drehpunkt M) wirkend, das Spannungsmoment:

$$\Sigma \left(S \frac{y}{Y} f \cdot y\right)$$

welches für den Fall des Gleichgewichts dem Biegungsmoment der Kraft P gleich sein muss. Folglich ist:

5). . . . $$\Sigma \left(S \frac{y^2}{Y} f\right) = P x$$

oder das Widerstandsmoment der Fasernspannungen ist gleich dem Moment der biegenden Kraft.

Die Grösse $\frac{S}{Y}$ als gemeinschaftlicher Faktor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder kann auch vor das Summationszeichen gesetzt werden, also ist:

6). $$\frac{S}{Y} \Sigma (f y^2) = P x$$

In dieser Gleichung bedeutet $\Sigma (f y^2)$ die Summe aller Produkte aus den einzelnen Flächenteilchen der Querschnittsfläche mal dem Quadrat ihres Abstandes von der Drehachse (d. h. von der neutralen Achse). Diesen Ausdruck bezeichnet man mit dem Namen Trägheitsmoment der Querschnittsfläche und bezeichnet ihn mit T, und so nimmt die Gleich. 6). die einfachere Form an:

7). $$\frac{S}{Y} T = P x$$

Dieser Ausdruck zeigt, bis zu welcher Stärke die absolute Festigkeit des Stabes an der Stelle, an welcher die Einwirkung die grösste war, in Anspruch genommen worden ist.

Frage 55. Was ist aus der vorstehenden Gleichung 7). resp. 8 in Bezug auf die in den verschiedenen Querschnitten herrschenden Spannungen ersichtlich, und wie lautet das Gesetz des Gleichgewichts bei einem auf Biegung in Anspruch genommenen Körper?

Erkl. 69. Fasst man den Quotient $\frac{T}{Y}$, d. h. den Quotient aus Trägheitsmoment und Abstand der äussersten Faserschicht von der neutralen Achse als eine für prismatische Stäbe von derselben Querschnittsform konstante (unveränderliche) Grösse auf und bezeichnet man dieselbe mit

10). $Q = \frac{T}{Y}$

das ist Querschnittsmodulus oder Querschnittskoeffizient oder Widerstandsmoment, dann heisst die nebenstehende Formel 9).:

11). $P l = Q S$

und hieraus ergibt sich nun, wenn man unter S den Sicherheitskoeffizienten der relativen Festigkeit versteht resp. einsetzt, die grösste zulässige Belastung oder Tragkraft:

$$P = \frac{S T}{Y l}$$

oder:

11a). $P = \frac{Q S}{l}$

Diejenige Stelle des Balkens, für welchen das Biegungsmoment den grössten Wert erhält, nennt man dessen Bruchstelle, und den zugehörigen Querschnitt den gefährlichen Querschnitt.

Antwort. Aus Gleichung 7). resp. 8). ergibt sich, dass die in einem Querschnitt vorkommende grösste Spannung an den verschiedenen Stellen des Balkens verschiedene Grössen hat, denn die Grösse S hängt ab von dem Moment der biegenden Kraft und wird um so kleiner, je kleiner der Hebelarm x wird, d. h. je näher der Querschnitt dem Angriffspunkt O der Kraft P liegt, dagegen wird S um so grösser, je grösser der Hebelarm x, d. h. je weiter die Querschnittsfläche vom Angriffspunkt der Kraft entfernt ist, und erreicht seinen grössten Wert in demjenigen Querschnitt, welcher mit der Befestigungsstelle zusammenfällt. Es ist alsdann der Arm der biegenden Kraft der Länge des gebogenen Körpers gleich, also

$$x = l$$

und setzen wir diesen Wert in die vorige Gleichung 7)., so erhält man:

9). $\frac{S}{Y} T = P l$

d. h.: Bei einem auf Biegung beanspruchten Körper findet Gleichgewicht statt, wenn das Produkt aus Normalkraft und deren Hebelarm gleich ist dem Trägheitsmoment des betreffenden Querschnitts, dividiert durch den Abstand der am stärksten gespannten (am weitesten von der Neutralachse entfernten) Faser von der neutralen Faserschicht und multipliziert mit der kleineren der beiden zulässigen Belastungen gegen Zug resp. Druck.

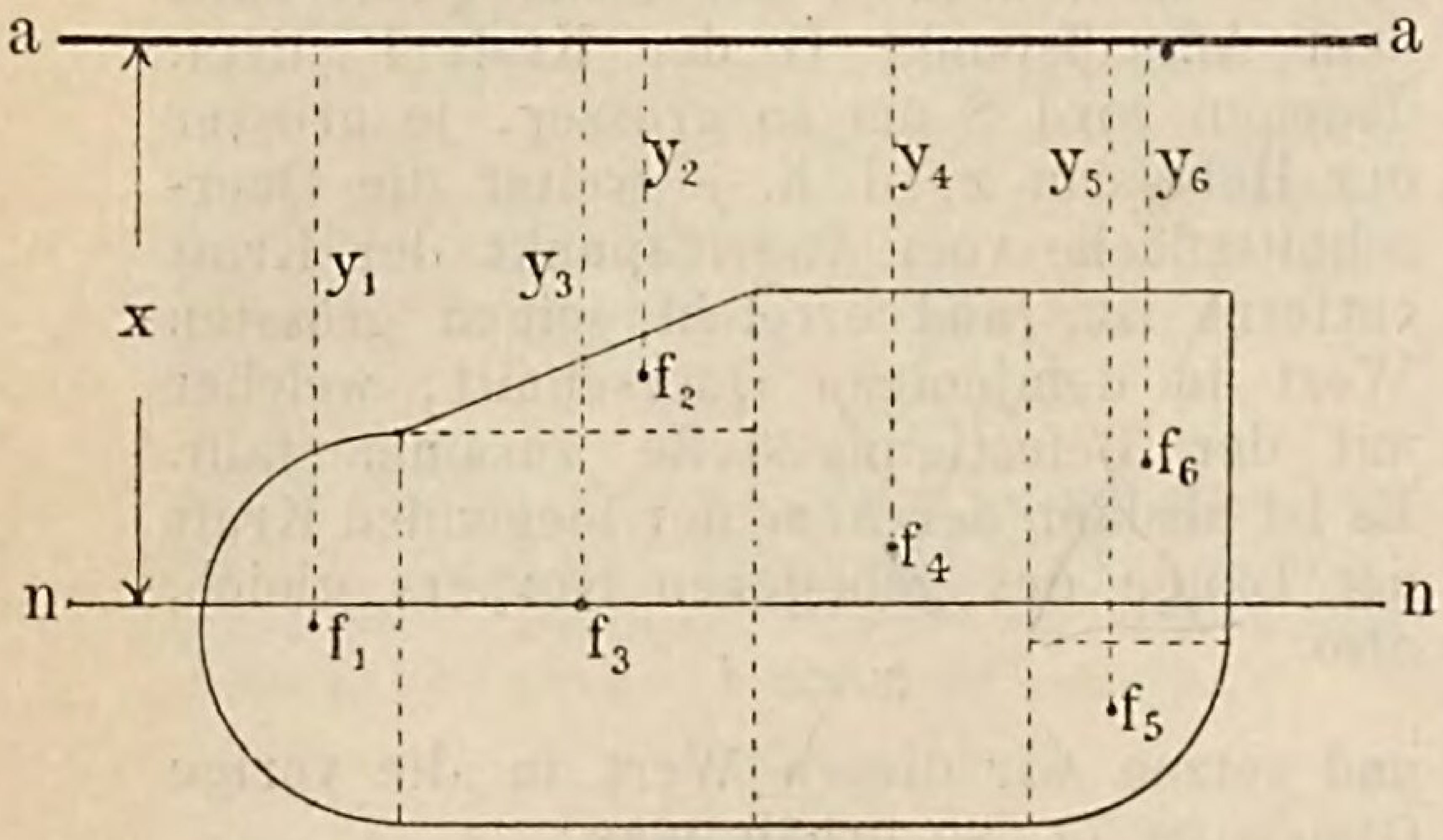
b). Bestimmung der Trägheits- und Widerstandsmomente der wichtigsten Querschnittsformen.

Frage 56. Was muss bekannt sein, wenn man irgend einen Körper auf seinen Biegungswiderstand berechnen will?

Antwort. Zur Berechnung eines Körpers auf Biegung muss zunächst die Bestimmung der Lage der neutralen Achse und die Bestimmung des Trägheits- und Widerstandsmoments bekannt sein.

Frage 57. Wie ermittelt man die Lage der neutralen Achse eines Körpers auch wenn derselbe in seiner Querschnittsfläche keine regelmässige Form zeigt?

Figur 49.



Erkl. 70. „Moment" kommt vom latein. momentum, entstanden aus movimentum, von movēre, bewegen. Moment bedeutet demnach „das Bewegende, Entscheidende."

Erkl. 71. Unter dem statischen Moment einer Kraft P in Bezug auf einen beliebigen festen Punkt O versteht man das Produkt, bestehend aus der Kraft P und dem senkrechten Abstand MO ihrer Richtungslinie von dem festen Drehpunkt O. Oder, da man die senkrechte Entfernung der Angriffslinie einer Kraft von ihrem festen Unterstützungspunkt den Hebelarm oder kurz den Arm der Kraft nennt, so kann das statische Moment auch definiert werden als das Produkt aus Kraft mal Hebelarm. Bezeichnet man die Länge des Hebelarms mit l, die Kraft mit P und ihr Moment mit M, so ist:

$$M = Pl$$

Da dieses Produkt zugleich ein Mass für das Drehungsbestreben der betreffenden Kraft P ist, so nennt man dasselbe wohl auch das Drehungsmoment der Kraft.

Antwort. Zur Bestimmung der Lage der neutralen Achse zerlegt man im allgemeinen die Querschnittsfläche in einzelne Teile: f_1, f_2, f_3 etc., deren Schwerpunkte bekannt oder nach den in *R. Klimpert*, Lehrbuch der Statik, gegebenen Regeln leicht zu bestimmen sind, und sind y_1, y_2, y_3 . . . die Abstände der Schwerpunkte von einer beliebigen Geraden aa, so ist der Abstand der mit der Geraden parallel laufenden Schwerlinie nn:

$$12). \ . \ . \quad x = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 \cdots +}{f_1 + f_2 + f_3 \cdots +}$$

denn es ist das statische Moment der ganzen Fläche:

$$M = x\,(f_1 + f_2 + f_3 + \cdots)$$

und die Summe der statischen Momente der Flächenteile:

$$M = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \cdots$$

beide sind gleich und daraus folgt der Abstand des Schwerpunkts der ganzen Fläche:

$$x = \frac{\text{Summe der stat. Momente d. einzelnen Flächen}}{\text{Summe der einzelnen Flächen.}}$$

Die neutrale Achse ist dann die Gerade durch den Schwerpunkt, die senkrecht zur Kraftrichtung oder senkrecht zur Ebene des Moments steht.

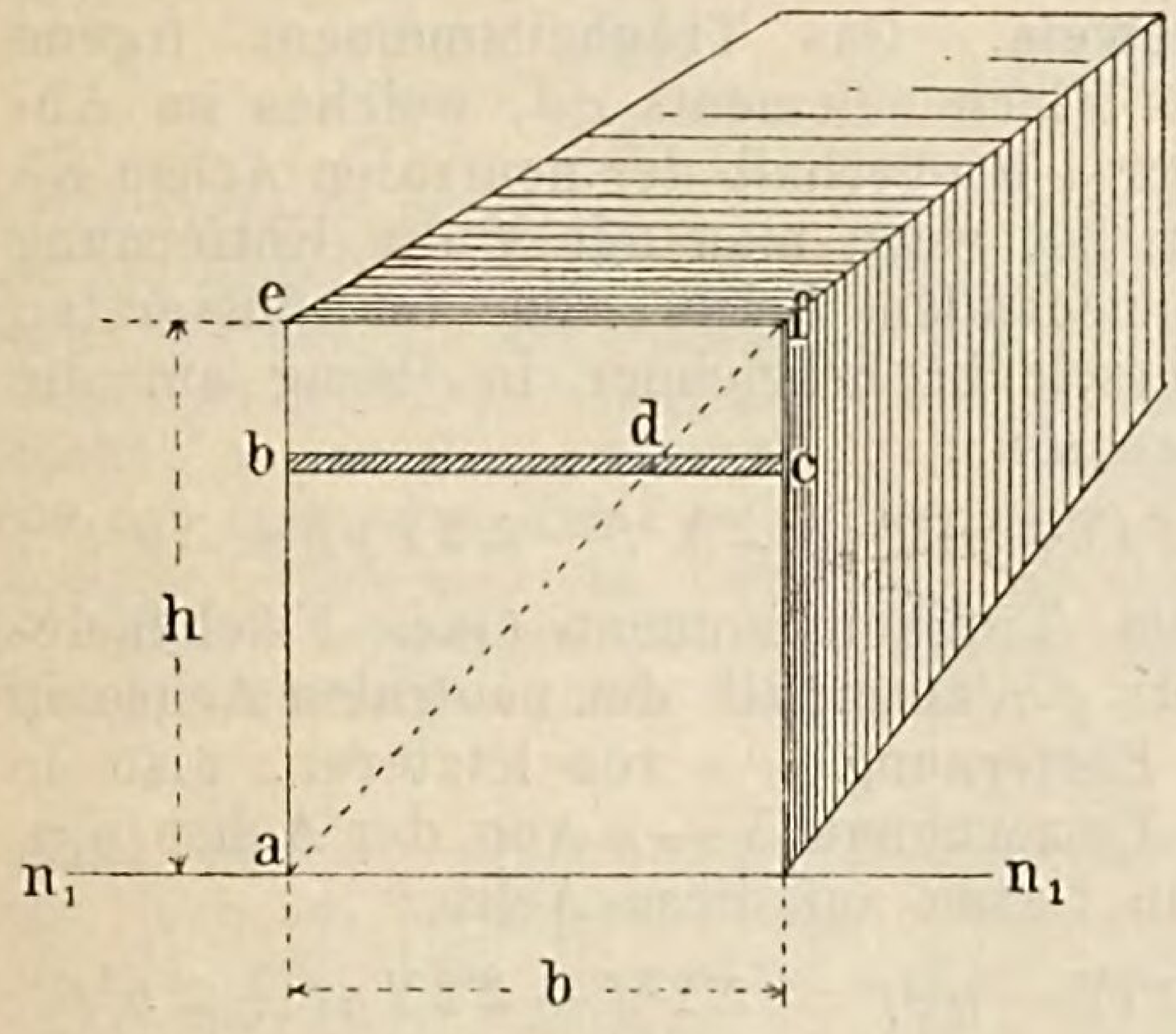
Legt man die Gerade aa in diese Richtung, so ist die zu aa parallele Gerade nn im Abstand x die neutrale Achse.

Sind einzelne Flächenteile aus der ganzen Fläche herausgeschnitten, so kommen die zugehörigen Glieder fy und f mit negativem Vorzeichen in die Formel für x.

α). Trägheitsmoment des Rechtecks, auf eine Seite als Achse bezogen.

Frage 58. Wie gross ist das Trägheitsmoment eines Rechtecks von der Höhe h und der Basis b, wenn man eine der beiden Seiten bb als Achse ansieht?

Figur 50.



Antwort. Das Trägheitsmoment T_1 eines Rechtecks von der Höhe h und der Breite b ist, wenn man die Seite b des Rechtecks als Drehachse ansieht:

$$13). \quad . \; . \; . \; . \; T_1 = \frac{bh^3}{3}$$

Beweis. Nach der gegebenen Erklärung über das Trägheitsmoment ist, wenn man mit T_1 das auf eine Seite des Rechtecks bezogene Trägheitsmoment bezeichnet, T_1 = der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen sehr schmal gedachten Flächenstreifen bc (siehe Fig. 50), deren Fläche wir mit f bezeichnen wollen. Es ist also, wenn Σ die „Summe" bedeutet und wenn y der Abstand des Streifens bc von der Geraden $n_1 n_1$ ist, nach Erkl. 66:

$$T_1 = \Sigma y^2 f$$

Bezeichnet man das Stück $\overline{bd}$ des Streifens mit f_1, so ist, da

$$\triangle abd \sim \triangle aef$$

also

$$\overline{ef} : \overline{bd} = \overline{ea} : \overline{ba}$$

und

$$\overline{ef} = \overline{bc}$$

ist, auch

$$f : f_1 = h : y$$

und

$$f = \frac{f_1 h}{y}$$

Mit Einsetzung dieses Wertes in die Gleichung für T_1 erhält man:

$$T_1 = \Sigma y^2 \cdot \frac{f_1 h}{y}$$

oder:

$$T_1 = \Sigma y \cdot f_1 h$$

$\Sigma y f_1$ ist aber das statische Moment des Dreiecks aef bezogen auf die Gerade $n_1 n_1$, d. h. das Produkt aus Dreiecksfläche und Abstand des Schwerpunkts derselben von $n_1 n_1$; die Dreiecksfläche beträgt aber $^1/_2\, bh$ und der Abstand des Schwerpunkts $^2/_3\, h$ und demnach ist das statische Moment des Dreiecks

$$\Sigma y f_1 = \frac{1}{2} bh \cdot \frac{2}{3} h$$

oder:

$$\Sigma y f_1 = \frac{1}{3} bh^2$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung von T_1 ein, so ist:

$$T_1 = \frac{1}{3} bh^2 . h$$

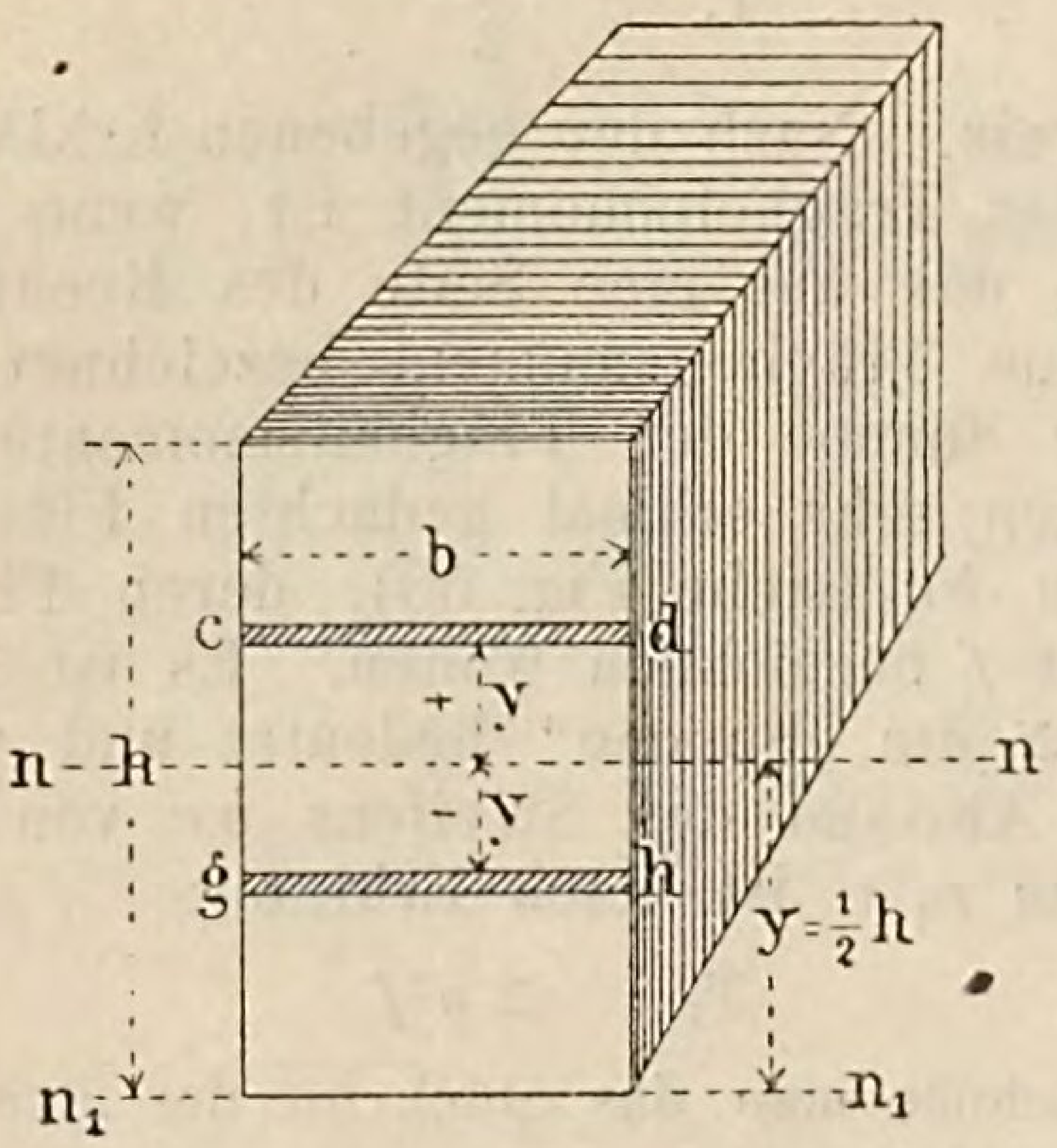
oder:

$$T_1 = \frac{1}{3} bh^3$$

β). Trägheitsmoment des Rechtecks bezogen auf die neutrale Achse.

Frage 59. Wie gross ist das Trägheits- und Widerstandsmoment sowie die Tragkraft eines Rechtecks von der Höhe h und der Breite b bezogen auf die neutrale Achse?

Figur 51.



Erkl. 72. Aus der nebenstehenden Formel 16). ist ersichtlich, dass die Tragfähigkeit P eines Balkens von rechtwinkligem Querschnitt in demselben Verhältnis wie die Breite b, dagegen im quadratischen mit der Höhe h wächst. Ein doppelt, dreifach, vierfach so breiter Balken trägt also auch doppelt, dreifach, vierfach so viel als ein im übrigen gleicher Balken von einfacher Breite; ein doppelt, dreifach, vierfach so hoher Balken vermag aber beziehungsweise viermal, neunmal, sechszehnmal so viel zu tragen, als ein sonst gleicher Balken von einfacher Höhe. Nehmen wir an, dass h die grössere und b die kleinere Seite des rechteckigen Querschnitts ist, so entspricht die obige Formel für P derjenigen Lage, bei welcher der Balken mit der kleineren Seite b horizontal liegt. Wird aber der Balken auf die grössere Seite h gelegt und so zur Breite gemacht, was vorher Höhe war, so ist in der obigen Formel h mit b zu vertauschen und man erhält:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b^2 h s}{l}$$

Dieser Wert ist für gleiche Spannungen s kleiner als der, welcher der ersten Lage entspricht, weil er sich zu jenem verhält wie

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{b^2 h s}{l} : \frac{1}{6} \cdot \frac{b^2 h s}{l} = b : h$$

und weil b kleiner als h vorausgesezt wurde. Es empfiehlt sich also den Träger auf die schmale Seite zu legen, oder wie man sagt „hochkantig“ anzuwenden.

Ueberhaupt ist bei zwei Balken, die gleichen Flächeninhalt im Querschnitt und ungleiche Di-

Antwort. Das Trägheitsmoment T eines Rechtecks von der Höhe h und der Breite b ist in Bezug auf die neutrale Achse:

14) $T = \frac{1}{12} b h^3$

das Widerstandsmoment Q oder W desselben Rechtecks ist:

15). . . . Q oder $W = \frac{1}{6} b h^2$

und die Tragkraft:

16). $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^2 s}{l}$

Beweis. Das Trägheitsmoment irgend eines Flächenelements cd, welches im Abstand $+y$ oberhalb der neutralen Achse nn liegt, ist, wenn man mit Y die Entfernung der neutralen Achse von der äussersten Faserschicht bezeichnet in Bezug auf die Achse $n_1 n_1$:

$$\Sigma (Y + y)^2 f = \Sigma Y^2 f + \Sigma 2 Y y f + \Sigma y^2 f$$

Das Trägheitsmoment eines Flächenelements gh unterhalb der neutralen Achse in der Entfernung $-y$ von letzterer, also in der Entfernunge $Y - y$ von der Achse $n_1 n_1$ ist in Bezug auf diese Achse:

$$\Sigma (Y - y)^2 f = \Sigma Y^2 f - \Sigma 2 Y y f + \Sigma y^2 f$$

folglich ist das Trägheitsmoment der Rechtecksfläche in Bezug auf die Achse $n_1 n_1$:

$$T_1 = Y^2 \Sigma f \pm 2 Y \Sigma y f + \Sigma y^2 f$$

Σf, d. h. die Summe aller Flächenelemente ist gleich der Rechtecksfläche F, und $\Sigma y^2 f$ ist nach Erkl. 66 u. 67 das Trägheitsmoment T bezogen auf die neutrale Achse, und $\Sigma y f$ ist das statische Moment der Fläche, bezogen auf die neutrale Achse, und da dieses nach Erkl. 64 gleich Null ist, so erhalten wir unter Einsetzung aller dieser Werte:

$$T_1 = Y^2 F + T$$

oder:

17). . . . $T = T_1 - Y^2 F$

Diese Gleichung gilt für alle Querschnittsformen.

Für das Rechteck ist nach Gleichung 13).:

$$T_1 = \frac{1}{3} b h^3$$

Y entspricht der halben Höhe $= \frac{1}{2} h$ des Rechtecks, folglich ist:

$$Y^2 = \frac{1}{4} h^2$$

mensionen haben, derjenige im allgemeinen der bessere Träger, welcher die grössere Höhe hat. Hohle Balken tragen vorzüglicher als massive; rechteckige, auf die schmale Kante gestellt, mehr als quadratische, wenn die Querschnitte gleichen Inhalt haben. Uebrigens wirkt eine Vergrösserung der Höhe und entsprechende Verkleinerung der Breite nur bis zu einer gewissen Grenze günstig. Ist mit einer bedeutenden Höhe eine gar zu kleine Breite verbunden, so läuft der Träger Gefahr zu zerknicken.

Erkl. 73. Aus der in nebenstehender Antwort entwickelten Gleichung 16).:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^2 s}{l}$$

folgt für die grösste in dem Balken vorkommende Spannung der Wert:

$$s = \frac{6 P l}{b h^2}$$

Dieser Wert ist unabhängig von der Beschaffenheit des Materials. Bei einer Vergleichung desselben mit der für das betreffende Material als zulässig zu betrachtenden Spannung findet man alsdann, ob die Widerstandsfähigkeit des Balkens der biegenden Kraft gegenüber eine hinreichende Grösse hat, oder umgekehrt, wie gross die letztere höchstens sein darf, wenn jene Grenze nicht überschritten werden soll.

Erkl. 74. Die nebenstehende Formel für P passt auch auf diejenigen Fälle, in denen ein Balken in der Mitte unterstützt und an beiden Enden mit Lasten beschwert ist, wie z. B. der Wagebalken oder Balancier der Dampfmaschinen etc. Es ist hierbei nicht nötig, dass der Balken überall gleiche Dicke habe, vielmehr ist es besser, wenn er an dem befestigten Ende stärker ist. Als Regel hierfür gilt, dass derselbe an demjenigen Ende, worauf die Last wirkt, eine der Breite gleiche Höhe habe, am befestigten Ende aber diejenige Höhe, welche aus der nebenstehenden Formel für h gefunden wird, und dann in gerader Linie von hier bis an's Ende hin abnimmt. (Siehe den Abschnitt „Ueber die Bestimmung der Körperformen von gleicher relativer Festigkeit".)

und die Rechtecksfläche

$$F = b h$$

Setzen wir alle diese Werte in Gleichung 17). ein, so erhalten wir:

$$T = \frac{1}{3} b h^3 - \frac{1}{4} h^2 . b h$$

oder:

$$T = \frac{1}{3} b h^3 - \frac{1}{4} b h^3$$

oder:

$$T = \frac{1}{12} b h^3$$

was zu beweisen war.

Der Querschnittsmodulus Q, oder was dasselbe ist, das Widerstandsmoment W ist nach Erkl. 69:

$$Q \text{ oder } W = \frac{T}{Y}$$

Y ist aber in diesem Fall $= \frac{1}{2} h$, folglich:

$$Q = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{\frac{1}{2} h}$$

oder:

$$Q = \frac{1}{6} b h^2 \quad \text{(siehe Gleichung 15)}$$

Nach Gleichung 11). in Erkl. 69 ist endlich die grösste zulässige Belastung, wenn s den Sicherheitskoeffizient der relativen Festigkeit bezeichnet, oder die Tragkraft des Balkens von der Länge l und rechteckigem Querschnitt:

$$P = \frac{Q . s}{l}$$

oder, aus Gleichung 15). den Wert für Q eingesetzt:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^2 s}{l} \quad \text{(siehe Gleich. 16)}$$

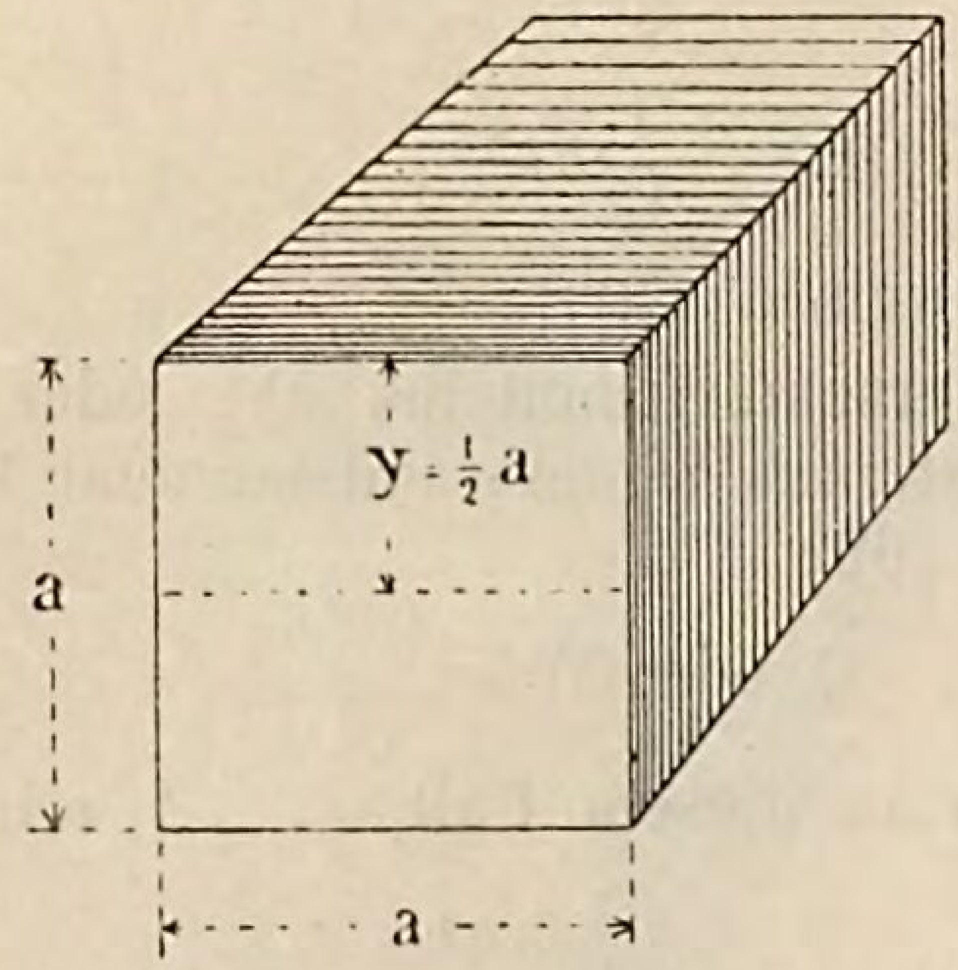
Frage 60. Welches Gesetz lässt sich aus der Gleichung 16). für die Tragfähigkeit oder relative Festigkeit zweier parallelepipedischer Balken von einerlei Material ableiten?

Antwort. Aus der vorstehenden Gleichung für P folgt das Gesetz:

Die relativen Festigkeiten zweier parallelepipedischer Balken von einerlei Material verhalten sich wie die Breiten, die Quadrate ihrer Höhen und umgekehrt wie ihre Längen

Frage 61. Welche Werte ergeben sich für das Trägheitsmoment, den Querschnittsmodulus und die grösste zulässige Belastung eines Balkens von quadratischem Querschnitt, wenn eine Seite des letzteren horizontal liegt?

Figur 52.



Antwort. Betrachten wir die quadratische Querschnittsfläche von der Seite a als ein Rechteck, bei welchem in diesem Fall die Höhe $h = a$ und die Breite b ebenfalls $= a$ ist, so ergibt sich aus den in den Gleichungen 14—16 gegebenen Werten für das Trägheitsmoment

$$T = \frac{1}{12} a \cdot a^3$$

oder:

$$18). \quad . \quad . \quad . \quad T = \frac{1}{12} a^4$$

für den Querschnittsmodulus

$$Q = \frac{1}{6} a \cdot a^2$$

oder:

$$19). \quad . \quad . \quad . \quad Q = \frac{1}{6} a^3$$

und für die zulässige Belastung oder Tragfähigkeit

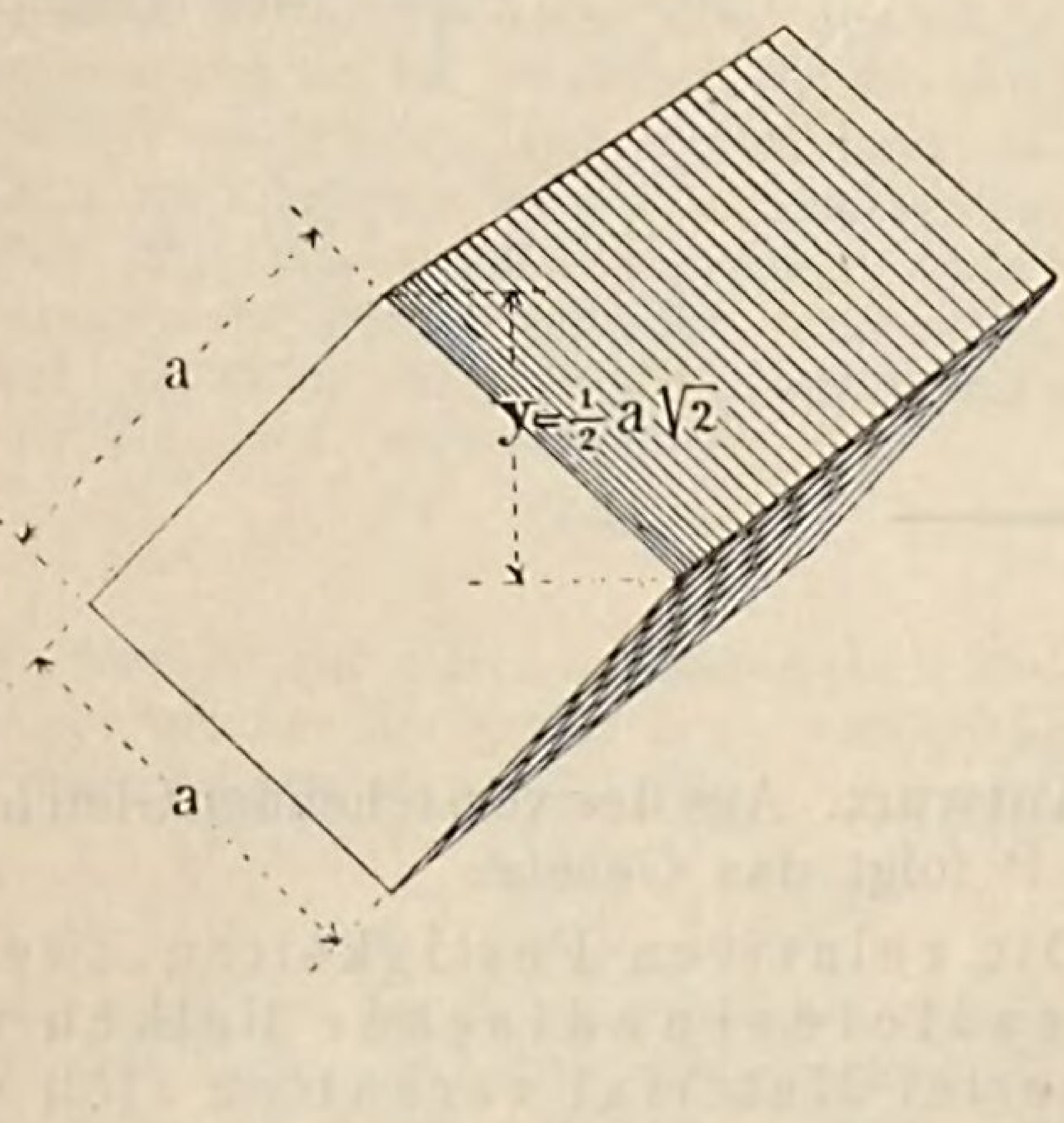
$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{a \cdot a^2 \cdot s}{l}$$

oder:

$$20). \quad . \quad . \quad . \quad P = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3 s}{l}$$

Frage 62. Welche Werte ergeben sich für das Trägheitsmoment, den Querschnittsmodulus und die grösste zulässige Belastung eines Balkens von quadratischem Querschnitt, wenn eine Diagonale des letzteren horizontal liegt?

Figur 53.



Antwort. Das Trägheitsmoment ist in diesem Fall das nämliche wie oben, also:

$$21). \quad . \quad . \quad . \quad T = \frac{1}{12} a^4$$

Die Entfernung der äussersten Faser von der neutralen Achse ist dagegen eine andere als im vorigen Fall, und wie ein Blick auf die nebenstehende Figur zeigt, ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz:

$$2 Y^2 = a^2$$

oder:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2} a^2}$$

oder:

$$Y = \frac{a}{2} \sqrt{2}$$

somit ist das Widerstandsmoment oder der Querschnittsmodulus:

$$Q = \frac{T}{Y}$$

oder:

$$Q = \frac{\frac{1}{12} a^4}{\frac{1}{2} a \sqrt{2}}$$

oder:

$$22). \quad . \quad . \quad . \quad Q = \frac{a^3}{6 \sqrt{2}}$$

oder:

$$Q = \frac{a^3}{6 \,.\, 1{,}4142}$$

oder:

$$Q = \frac{a^3}{8{,}4852}$$

oder:

22a). . . . $Q = 0{,}118\,a^3$

die Tragfähigkeit P ist nach Gleichung 11).:

$$P = \frac{Q\,s}{l}$$

also im vorliegenden Fall:

$$P = \frac{\frac{a^3}{6\sqrt{2}} \cdot s}{l}$$

oder:

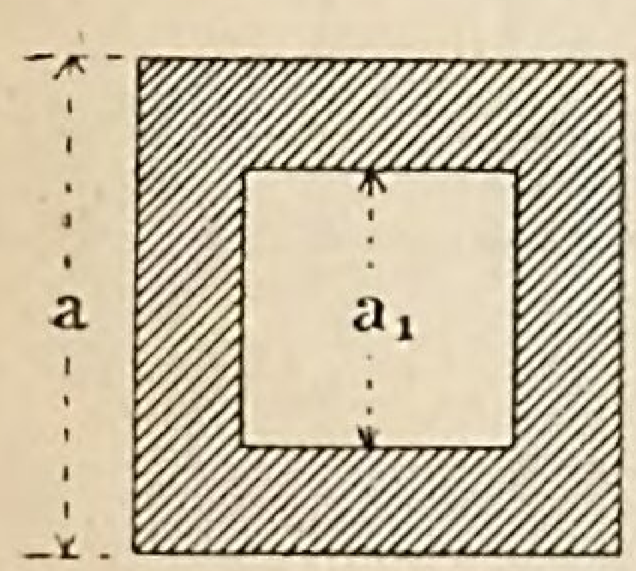
23). . . . $P = \dfrac{a^3 s}{6\sqrt{2}\,l}$

oder:

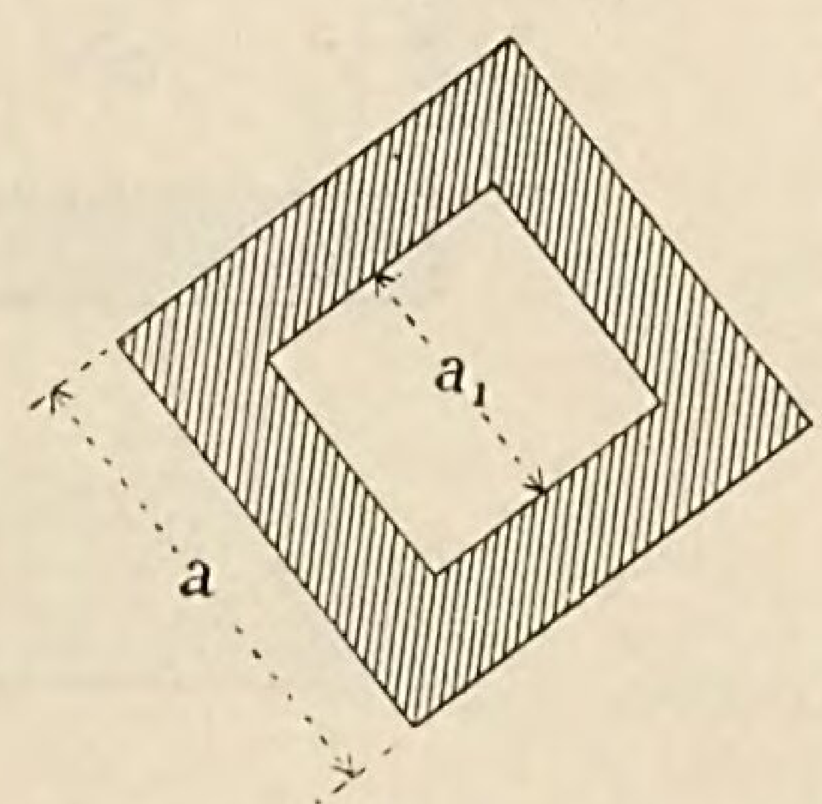
23a). . . . $P = \dfrac{0{,}118\,a^3 s}{l}$

Frage 63. Welche Werte ergeben sich für T, Q und P, wenn der Querschnitt ein hohles Quadrat bildet und das einemal eine Seite, das anderemal eine Diagonale desselben horizontal liegt?

Figur 54.



Figur 55.



Antwort. In gleicher Weise wie man die Flächeninhalte der nebenstehenden Figuren 54 und 55 geometrisch durch Subtraktion der kleineren von der grösseren Fläche berechnet, in derselben Weise hat man im vorliegenden Fall nur anstatt der Formeln für Flächeninhalte die für die betreffenden Trägheitsmomente zu nehmen und erhält so aus Gleichung 21 für

$$T = \frac{1}{12}\left(a^4 - a_1^4\right)$$

sowohl für Fig. 54 als auch für Fig. 55 giltig.

In Fig. 54 ist $Y = \frac{1}{2}a$, in Fig. 55: $Y = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, folglich, da

$$\frac{T}{Y} = Q$$

so erhält man mit Bezug auf Fig. 54 für

$$Q = \frac{\frac{1}{12}(a^4 - a_1^4)}{\frac{1}{2}a}$$

oder:

24). . . . $Q = \dfrac{\frac{1}{6}(a^4 - a_1^4)}{a}$

und mit Bezug auf Fig. 55:

$$Q = \frac{\frac{1}{12}(a^4 - a_1^4)}{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$$

oder:

25). . . . $Q = \dfrac{\frac{1}{6}(a^4 - a_1^4)}{a\sqrt{2}}$

Erkl. 75. In gleicher Weise erhält man für ein hohles hochkantig stehendes Rechteck (siehe Fig. 56) von der äusseren und inneren Höhe h und h_1 und der äusseren und inneren Breite b und b_1 nach Gleichung 14 (Antw. a. Fr. 59):

26a). . . . $T = \dfrac{1}{12}\left(b h^3 - b_1 h_1^3\right)$

und da $Y = \frac{1}{2}h$, so ist:

$$Q = \frac{\frac{1}{12}(b h^3 - b_1 h_1^3)}{\frac{1}{2}h}$$

oder:

26b). . . $Q = \dfrac{\frac{1}{6}(b h^3 - b_1 h_1^3)}{h}$

und

26c). . . $P = \dfrac{\frac{1}{6}(b h^3 - b_1 h_1^3)\,s}{h\,l}$

Bildet aber der Querschnitt ein Rechteck ohne Mittelwand und ist derselbe zu dem vertikalen Druck so gestellt, dass seine beiden horizontal liegenden Teile sich einander nicht näher können (siehe Fig. 57), so ist die Breite b für das äussere und innere Rechteck dieselbe, und somit nach Gleichung 26a).:

$$T = \frac{1}{12}\left(b h^3 - b h_1^3\right)$$

oder b als gemeinschaftlichen Faktor vor die Klammer gesetzt:

27a). . . . $T = \frac{1}{12} b \left(h^3 - h_1^3\right)$

Diese Grösse durch $Y = \frac{1}{2} h$ geteilt, gibt den Querschnittsmodulus:

$$Q = \frac{\frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3)}{\frac{1}{2} h}$$

oder:

27b). . . $Q = \frac{1}{6} b \frac{(h^3 - h_1^3)}{h}$

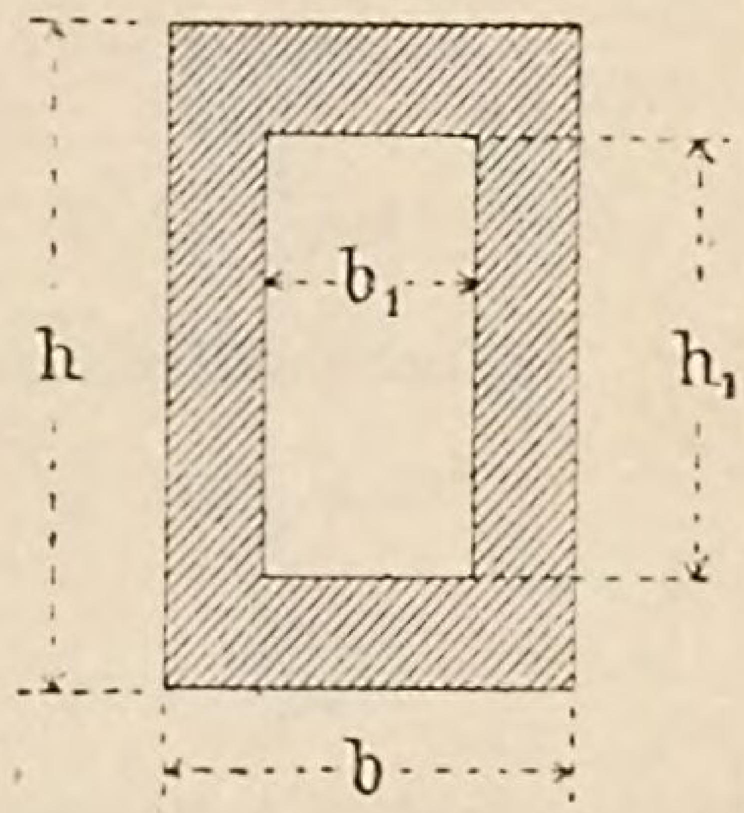
und diese Grösse mit $\frac{s}{l}$ multipliziert, gibt die Tragfähigkeit:

27c). . . $P = \frac{1}{6} b \frac{(h^3 - h_1^3) \cdot s}{h l}$

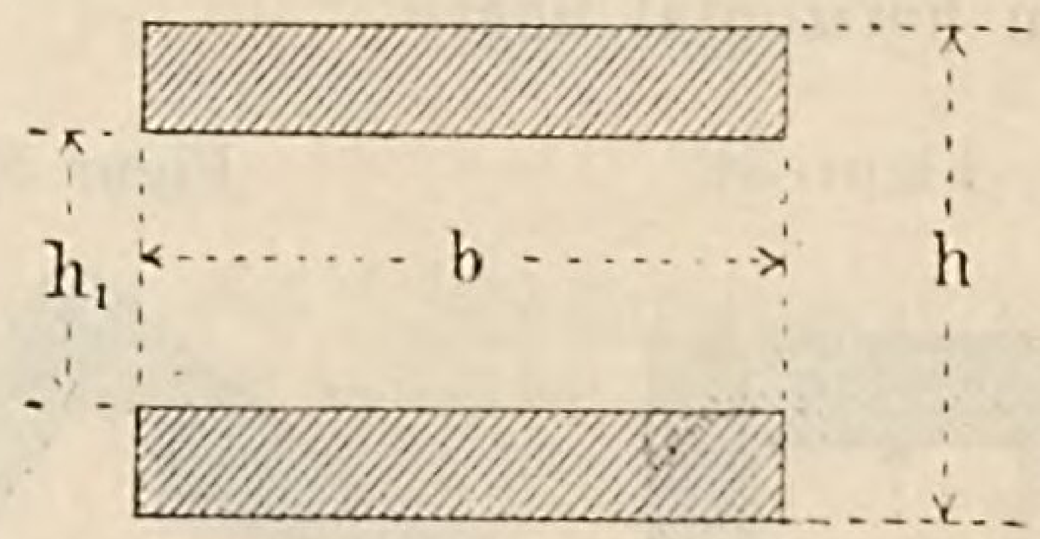
Bei derselben Länge und demselben Materialaufwand trägt ein gusseiserner Tragbalken in Form eines hohlen Parallelepipedon eine grössere Last, als ein massiver Balken aus dem gleichen Material. (Ausführliches hierüber findet sich in Antwort auf Frage 71) Ebenso gibt man Trägern von Eisen die sog. T oder doppelte T Form, und immer kommt es dabei darauf an, das für einen Träger bestimmte Material (z. B. Gusseisen) so zu verteilen, dass es von der neutralen Achse möglichst entfernt und dabei ein Querschnitt gewählt werde, bei welchem sowohl die am meisten ausgedehnten als die am stärksten zusammengedrückten Fasern mit ihren ihnen von der Natur des Materials zukommenden Maximalwerten in Anspruch genommen werden.

Multipliziert man jeden der beiden Werte Q mit $\frac{s}{l}$ (Sicherheitskoeffizient durch Länge) so erhält man für jeden der beiden Fälle die zulässige Belastung oder Tragfähigkeit.

Figur 56.



Figur 57.

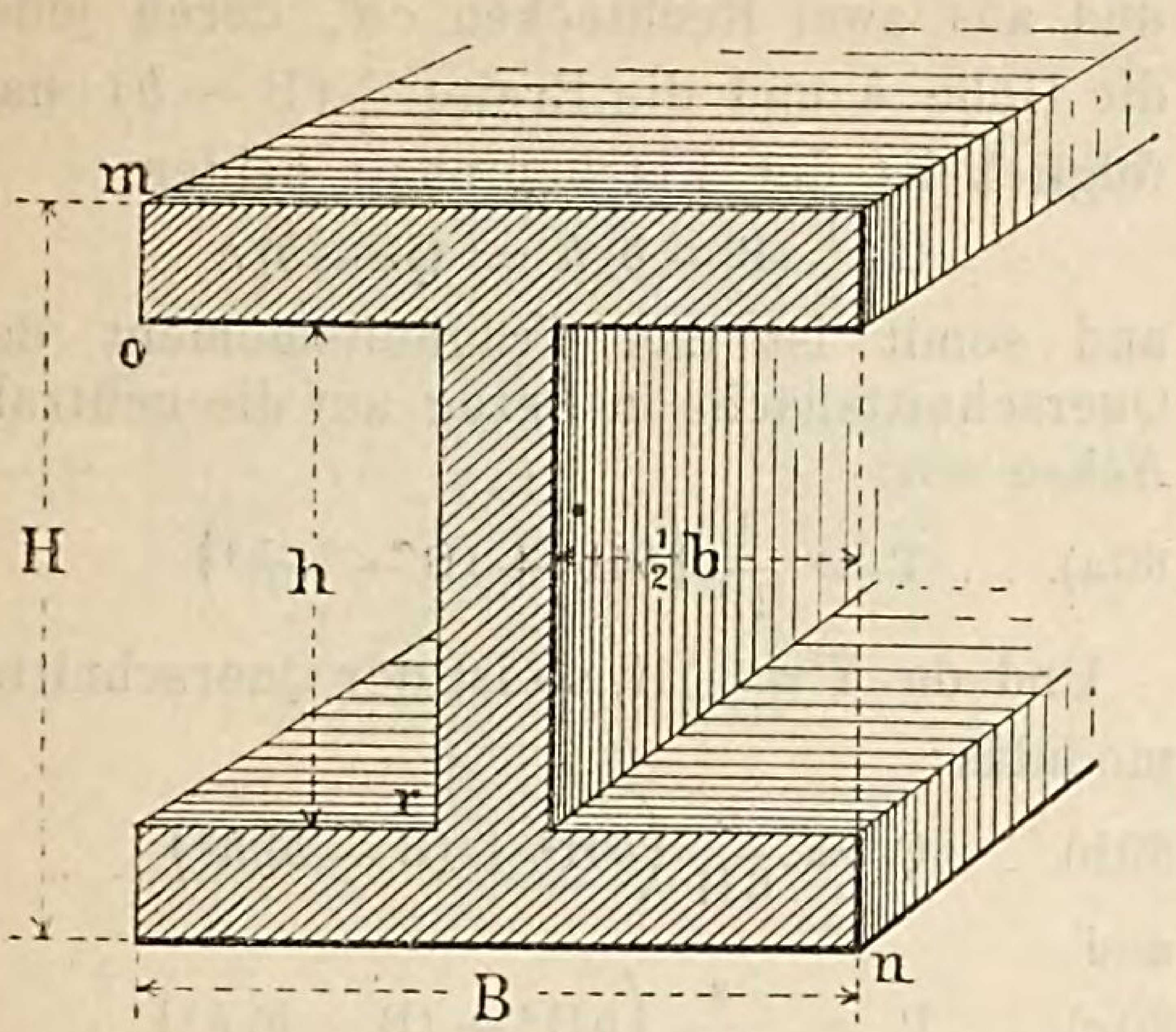


Frage 64. Wie ermittelt man Trägheitsmoment, Querschnittsmodulus und Tragfähigkeit aller derjenigen symmetrischen Querschnitte, welche man sich aus Rechtecken zusammengesetzt denken kann, auf einfache Weise?

Antwort. Sind für irgend einen symmetrischen[1]) aus einzelnen Rechtecken zusammengesetzten Querschnitt Trägheitsmoment, Querschnittsmodulus und Tragfähigkeit zu berechnen, so berechnet man zunächst die Trägheitsmomente der einzelnen oder Partial-Rechtecke und ermittelt dann durch Addition oder Subtraktion (je nachdem das eine oder das andere auf

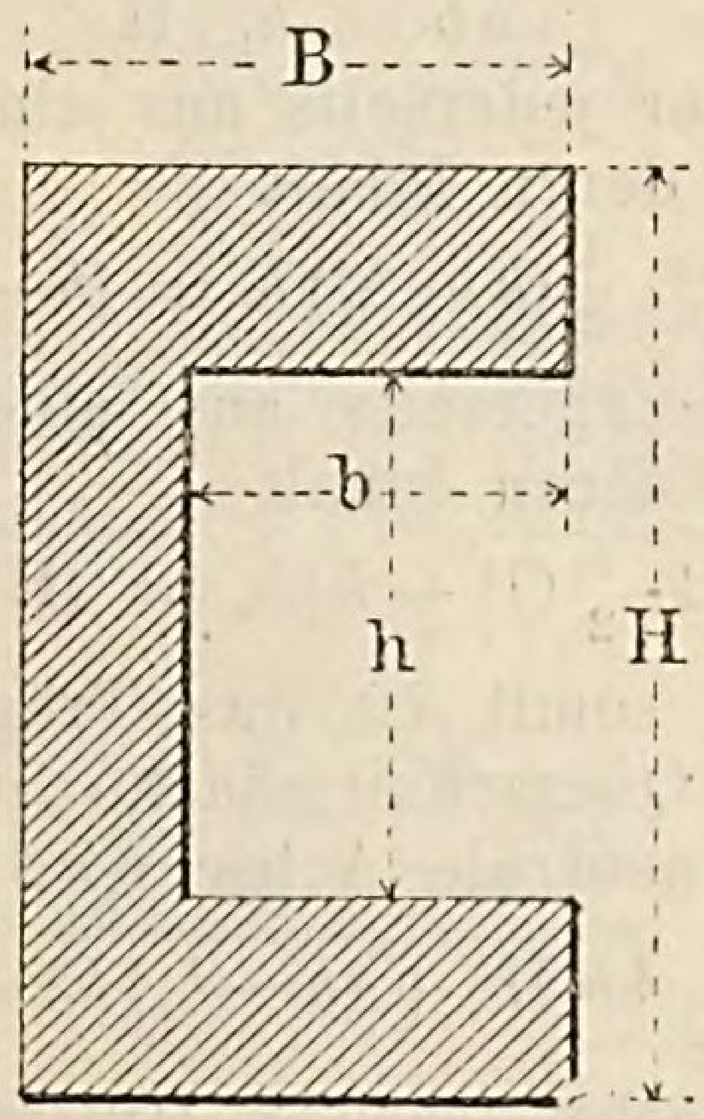
[1]) Siehe Erkl. 77.

Figur 58.



Erkl. 76. Dieselben Werte wie in Gleichung 28 a, b, c, ergeben sich für die Querschnittsfläche Fig. 59.

Figur 59.



Erkl. 77. Symmetrisch (griech. symmetros, von syn und métron, Mass) heisst soviel wie ebenmässig, verhältnismässig, übereinstimmend in der Anordnung der Teile. Das Eigentümliche einer symmetrischen Figur besteht darin, dass dieselbe aus zwei gleichen Hälften zusammengesetzt ist, die einander in den einzelnen Teilen, aber in umgekehrter Ordnung gleich sind, sich also zu einander verhalten wie das Spiegelbild zu seinem Gegenstand. Die Gerade, durch welche die symmetrische Figur in zwei gleiche Hälften zerlegt wird, heisst Symmetrieachse.

Hilfsrechnung.

$$\frac{1}{12}\left(BH^3 - (B-b)\,h^3 - b\,h_1{}^3\right) =$$

$$\frac{1}{12}\left(BH^3 - Bh^3 + bh^3 - b\,h_1{}^3\right) =$$

$$\frac{1}{12}\left(B\,(H^3 - h^3) + b\,(h^3 - h_1{}^3)\right)$$

kürzestem Weg zum Ziel führt) das Trägheitsmoment des gesamten Querschnitts, wie es im folgenden an einigen Beispielen gezeigt ist:

Die Querschnittsfläche Fig. 58 besteht zunächst aus einem Rechteck von der Höhe H und der Breite B, davon muss aber zweimal ein Rechteck von der Höhe h und der Breite $\frac{1}{2}b$ subtrahiert werden.

Nach Gleichung 14). ist das Trägheitsmoment der Rechtecksfläche mn:

$$T_1 = \frac{1}{12}BH^3$$

das Trägheitsmoment der Rechtecksfläche or:

$$T_2 = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}b\,h^3$$

und da zwei solcher Rechtecksflächen zu subtrahieren sind, so ergibt sich für das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche:

$$T = \frac{1}{12}BH^3 - 2\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}b\,h^3$$

oder:

$$28\text{a}).\;.\;.\;T = \frac{1}{12}\left(BH^3 - b\,h^3\right)$$

Da die Entfernung $Y = \frac{1}{2}H$ beträgt, so ist:

$$Q = \frac{\frac{1}{12}(BH^3 - b\,h^3)}{\frac{1}{2}H}$$

oder:

$$28\text{b}).\;.\;.\;Q = \frac{1}{6}\left(BH^2 - \frac{b\,h^3}{H}\right)$$

und

$$28\text{c}).\;.\;.\;P = \frac{1}{6}\cdot\frac{s}{l}\left(BH^2 - \frac{bh^3}{H}\right)$$

Die Querschnittsfläche Fig. 60 besteht aus dem Rechteck ac = BH weniger zweimal dem Rechteck $df = 2\cdot\frac{1}{2}(B-b)h = (B-b)h$ weniger dem Rechteck $ik = bh$, und somit ist das Trägheitsmoment dieser Querschnittsfläche:

$$T = \frac{1}{12}BH^3 - \frac{1}{12}(B-b)\,h^3 - \frac{1}{12}b\,h_1{}^3$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$29\text{a}).\;.\;.\;T = \frac{1}{12}\left(B\,(H^3 - h^3) + b\,(h^3 - h_1{}^3)\right)$$

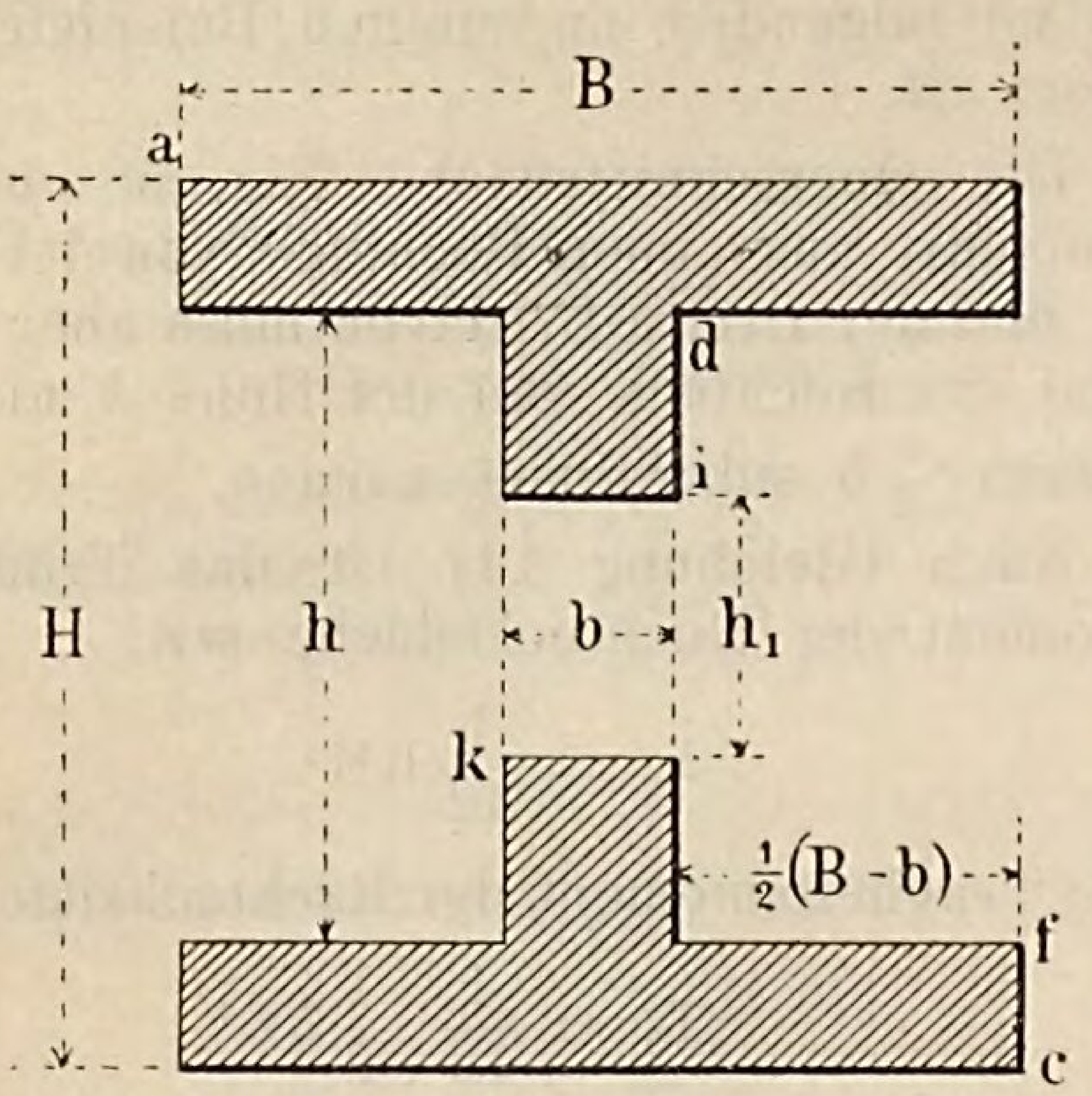
Und da $Y = \frac{1}{2}H$, so ist:

$$29\text{b}).\;.\;.\;Q = \frac{1}{6H}\left(B\,(H^3 - h^3) + b\,(h^3 - h_1{}^3)\right)$$

und

$$29\text{c}).\;.\;.\;P = \frac{s}{6Hl}\left(B\,(H^3 - h^3) + b\,(h^3 - h_1{}^3)\right)$$

Figur 60.



Die Querschnittsfläche Fig. 61 besteht aus einem Rechteck nm von dem Inhalt b H und aus zwei Rechtecken cd, deren jedes die Höhe h und die Breite $\frac{1}{2}(B - b)$ hat, folglich ist der Flächeninhalt beider:

$$2 \cdot \frac{1}{2}(B - b)h = (B - b)h$$

und somit ist das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in Bezug auf die neutrale Achse nn:

$$30a). \ldots T = \frac{1}{12}\left(bH^3 + (B - b)h^3\right)$$

Und da $Y = \frac{1}{2}H$, so ist der Querschnittsmodulus:

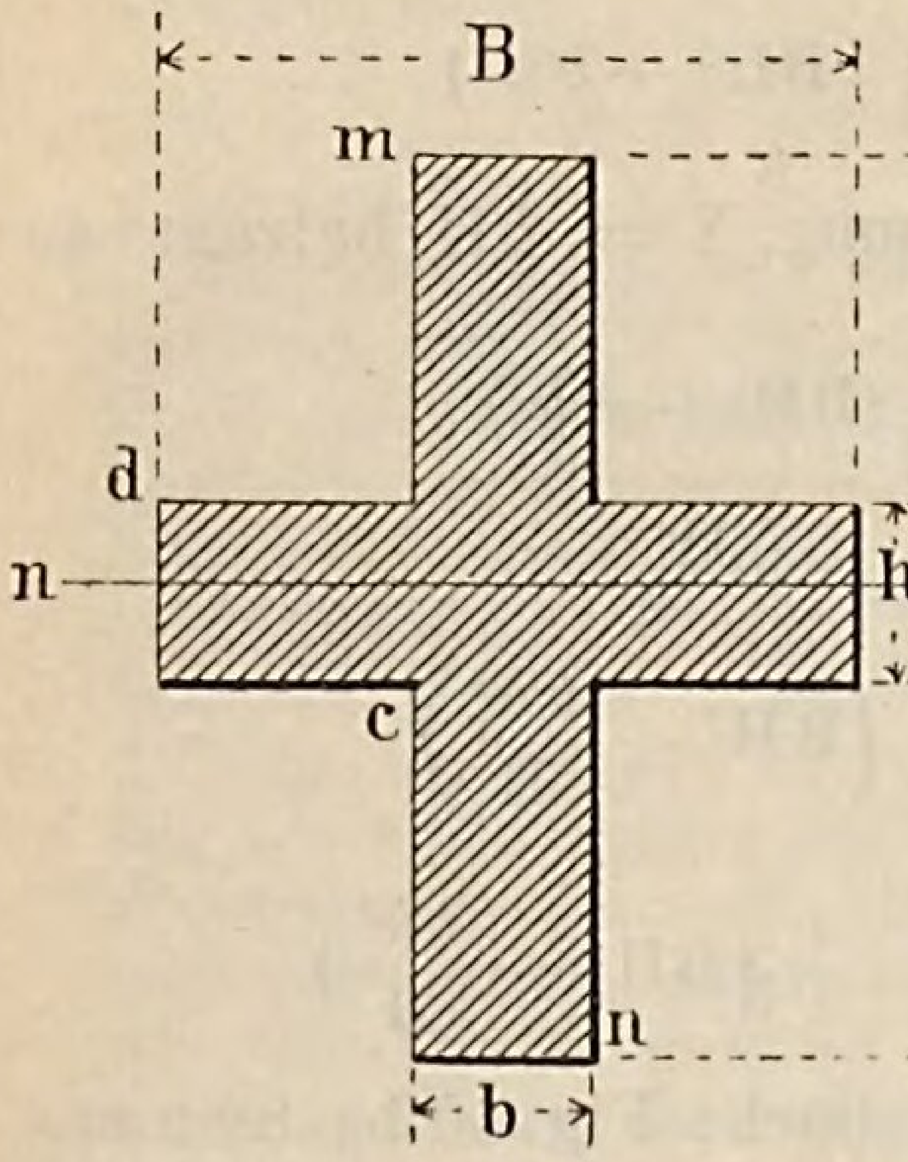
$$30b). \ldots Q = \frac{1}{6H}\left(bH^3 + (B - b)h^3\right)$$

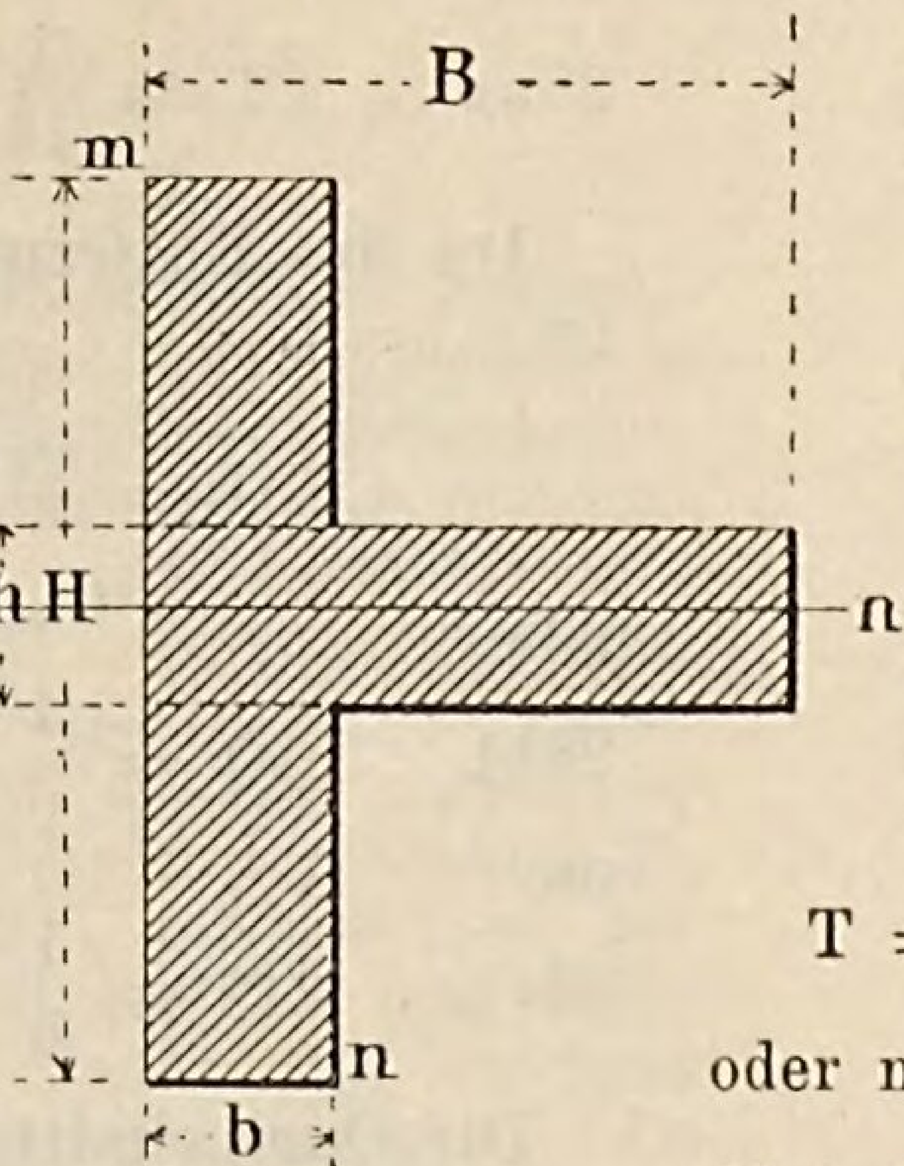
und

$$30c). \ldots P = \frac{s}{6Hl}\left(bH^3 + (B - b)h^3\right)$$

Dieselben Formeln 30 a, b und c gelten auch für die Querschnittsfläche Fig. 62.

Figur 61. Figur 62.





Die in Fig. 63 dargestellte Querschnittsfläche besteht aus einem Rechteck

$$ab = h_1 . H$$

ferner jederseits aus einem Rechteck cd, deren Inhalt

$$2 \cdot \frac{1}{2}(h - h_1)h = (h - h_1)h$$

und jederseits aus einem Rechteck mo, deren Inhalt

$$2 \cdot \frac{1}{2}(H - h)h_1 = (H - h)h_1$$

und somit ist das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in Bezug auf die neutrale Achse nn:

$$T = \frac{1}{12}\left(h_1 H^3 + (h - h_1)h^3 + (H - h)h_1{}^3\right)$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$31a). \ T = \frac{1}{12}\left(h^4 + h_1(H^3 - h^3) + h_1{}^3(H - h)\right)$$

ferner ist:

$$31b). \ Q = \frac{1}{6H}\left(h^4 + h_1(H^3 - h^3) + h_1{}^3(H - h)\right)$$

und

$$P = \frac{s}{6Hl}\left(h^4 + h_1(H^3 - h^3) + h_1{}^3(H - h)\right)$$

Hilfsrechnung.

$$\frac{1}{12}\left(h_1 H^3 + (h - h_1)h^3 + (H - h)h_1{}^3\right) =$$

$$\frac{1}{12}(h_1 H^3 + h^4 - h^3 h_1 + H h_1{}^3 - h h_1{}^3) =$$

$$\frac{1}{12}\left(h^4 + h_1(H^3 - h^3) + h_1{}^3(H - h)\right)$$

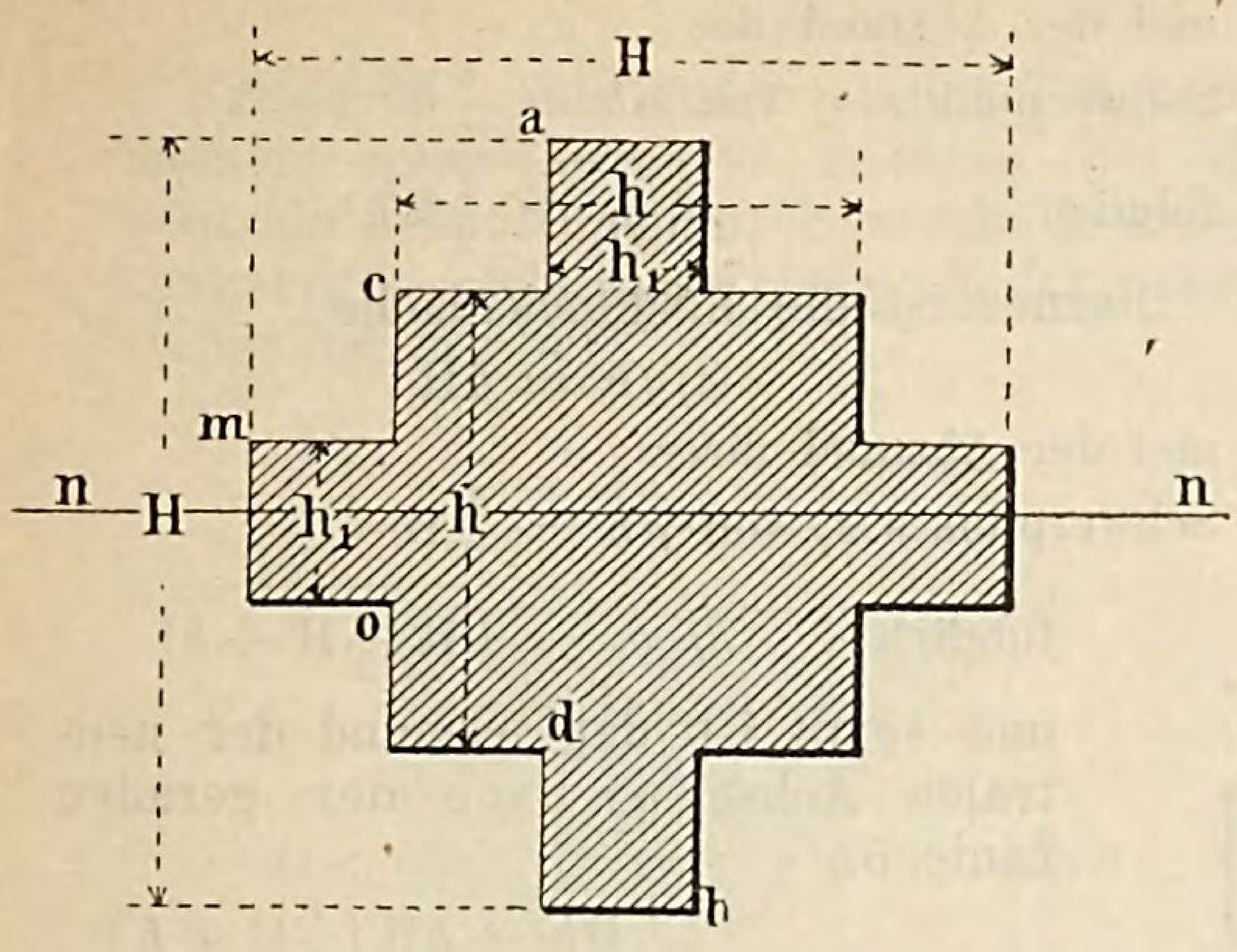
Das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche Fig. 64 findet man, indem man zunächst das Trägheitsmoment des Rechtecks $abcd$ berechnet. Dasselbe beträgt nach Gleichung 14). in Bezug auf die eingeschriebenen Dimensionen:

$$T_1 = \frac{1}{12}B h_1{}^3$$

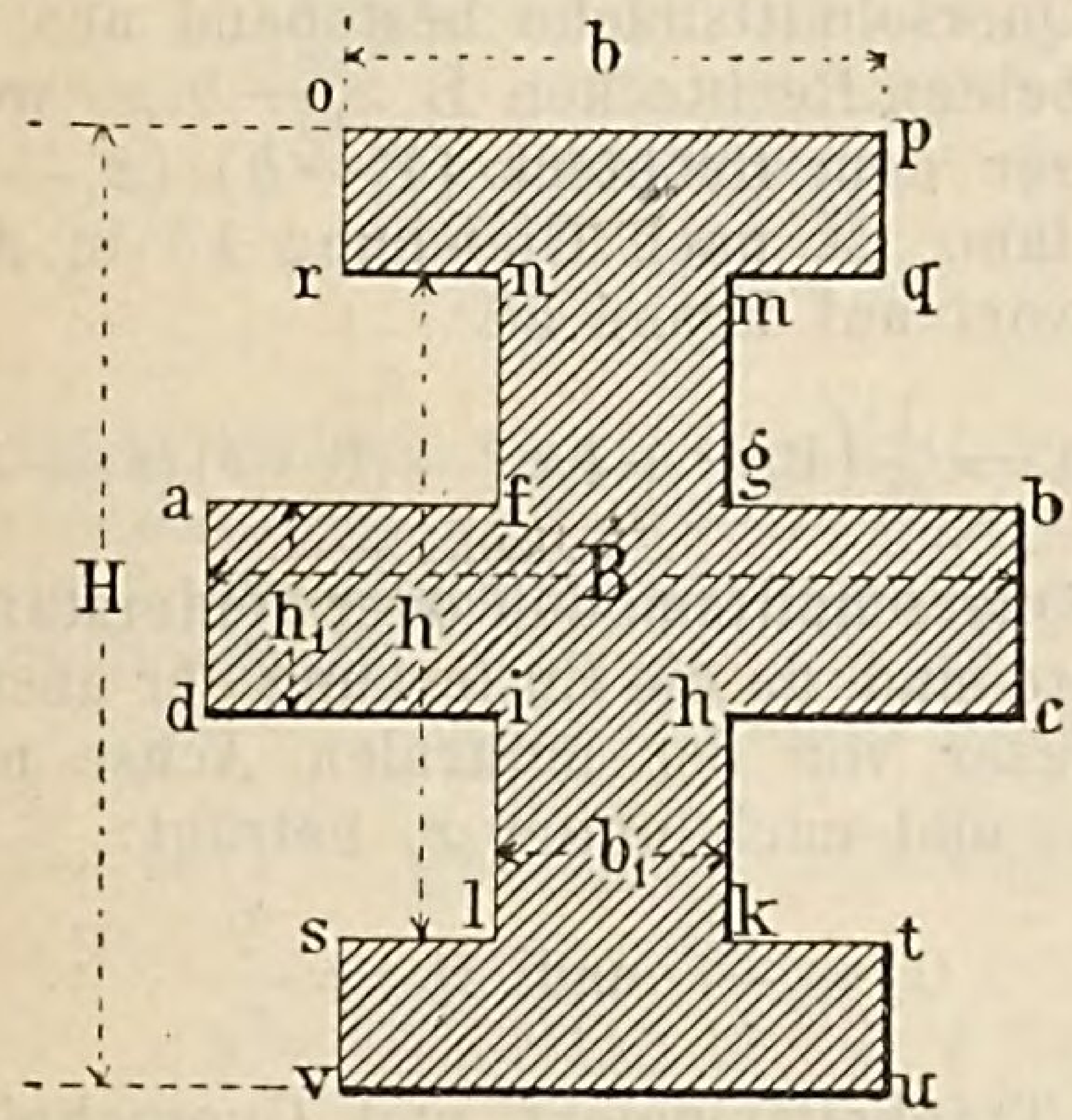
Ferner ist das Trägheitsmoment des Rechtecks $nmkl$ =

$$\frac{1}{12}b_1 h^3$$

Figur 63.



Figur 64.



davon ist jedoch das schon beim ersten Rechteck mitberechnete Rechteck *fghi* zu subtrahieren, und das Trägheitsmoment dieses letzteren beträgt $\frac{1}{12} b_1 h_1^3$, somit bleibt als Trägheitsmoment für die beiden Rechtecke *nmgf* und *ihkl*

$$T_2 = \frac{1}{12} b_1 h^3 - \frac{1}{12} b_1 h_1^3$$

oder:

$$T_2 = \frac{1}{12} b_1 (h^3 - h_1^3)$$

Endlich ist noch das Trägheitsmoment der beiden Rechtecke *opqr* und *stuv* zu berechnen. Diese beiden denken wir uns bestehend aus dem Rechteck *opuv* — *rqtv*, folglich ist das Trägheitsmoment von *opqr* + *stuv*

$$T_3 = \frac{1}{12} b H^3 - \frac{1}{12} b h^3$$

oder:

$$T_3 = \frac{1}{12} b (H^3 - h^3)$$

und somit das Trägheitsmoment der gesamten Querschnittsfläche

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

oder:

32a). . $$T = \frac{1}{12} \left(B h_1^3 + b_1 (h_3 - h_1^3) + b (H^3 - h^3)\right)$$

Die Entfernung der äussersten Faser von der neutralen Schicht beträgt $Y = \frac{1}{2} H$, folglich

32b). . $$Q = \frac{1}{6H} \left(B h_1^3 + b_1 (h^3 - h_1^3) + b (H^3 - h^3)\right)$$

und

32c). . $$P = \frac{s}{6Hl} \left(B h_1^3 + b_1 (h^3 - h_1^3) + b (H^3 - h^3)\right)$$

Frage 65. Auf welche Weise ermittelt man die Lage der neutralen Achse und hieraus das Trägheitsmoment, den Querschnittsmodulus und die Tragfähigkeit bei allen denjenigen unsymmetrischen Querschnitten, welche man sich aus Rechtecken bestehend denken kann?

Antwort. Zur Bestimmung der Lage der neutralen Achse bei den nebenstehenden unsymmetrischen Querschnitten Fig. 65 u. 66 benutzen wir die in Antwort auf Frage 57 gegebene Gleichung 12)., wonach der Abstand x der neutralen Achse von einer beliebig angenommenen Geraden durch

$$x = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 \cdots + f_n y_n}{f_1 + f_2 \cdots + f_n}$$

ausgedrückt wird.

Nehmen wir als beliebige Gerade die Seite $\overline{ab}$ an, so ist die Rechtecksfläche

$$abcd = Bh$$

und der Abstand des Schwerpunkts s_1 von $\overline{ab} = \frac{1}{2}h$

folglich: $$f_1 y_1 = \frac{1}{2}Bh^2$$

Ferner ist die Rechtecksfläche

$$efgh = bH$$

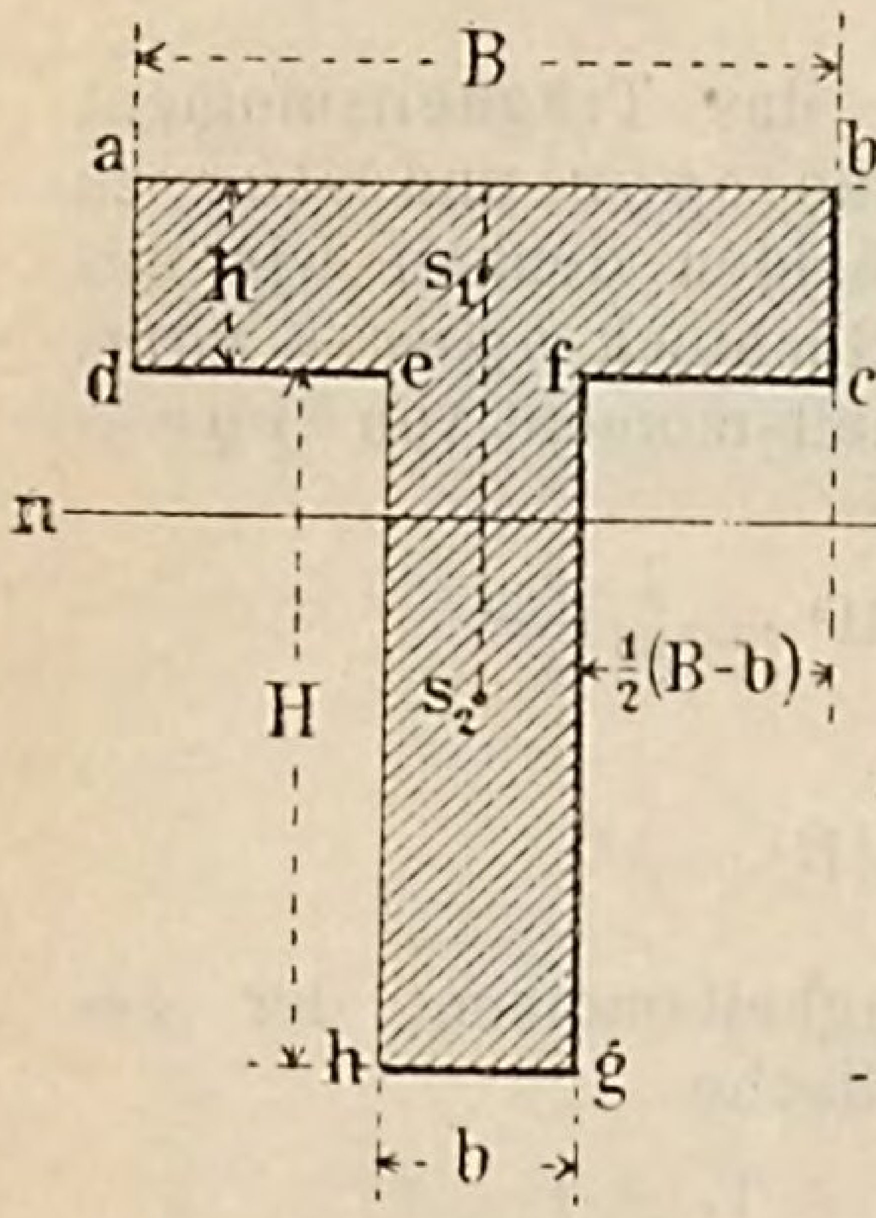
und der Abstand ihres Schwerpunkts s_2 von $\overline{ab} = \frac{1}{2}H + h$

folglich $$f_2 y_2 = bH\left(\frac{1}{2}H + h\right)$$

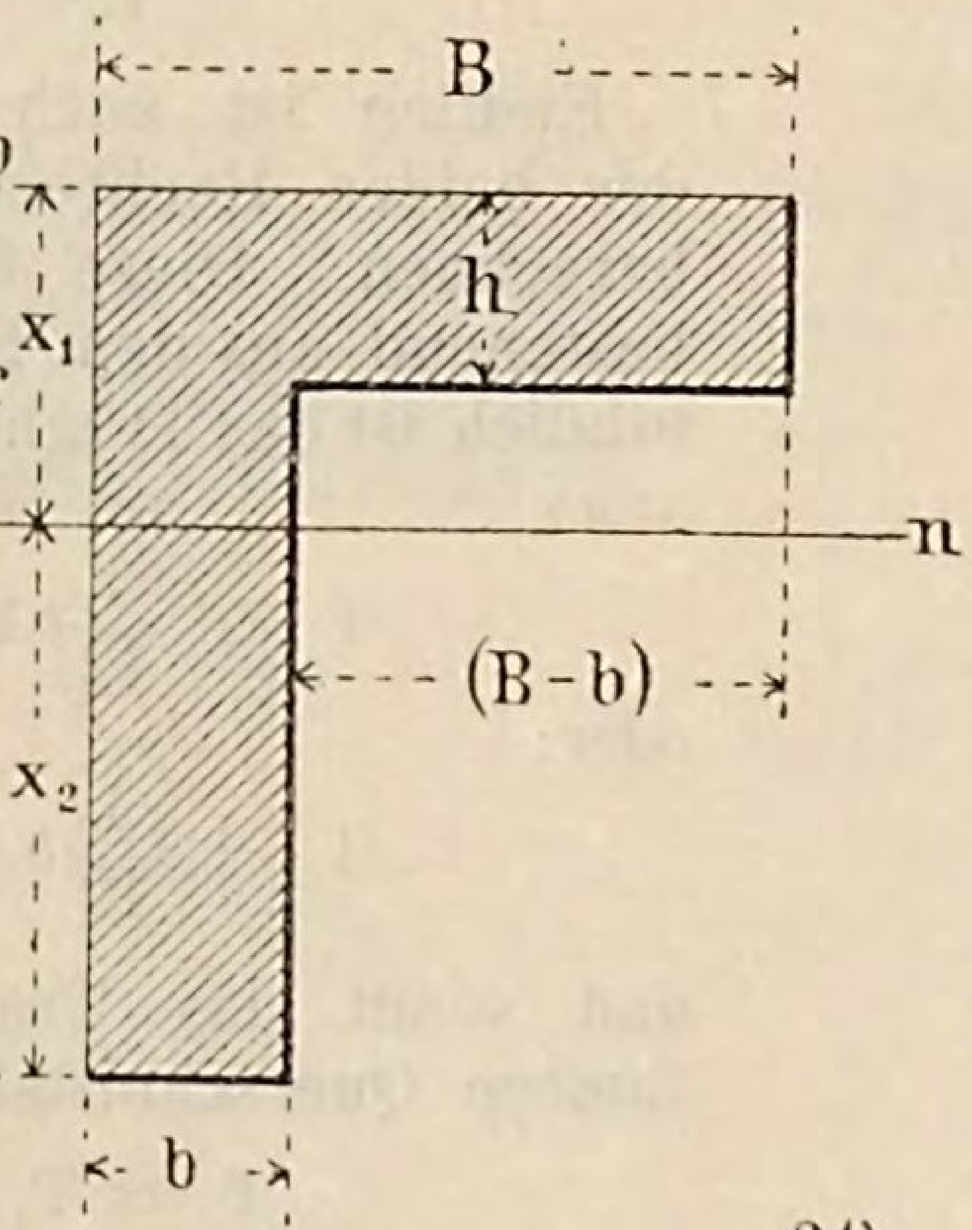
und somit ist der Abstand der neutralen Achse $\overline{nn}$ von der geraden Linie $\overline{ab}$

$$33). \ldots x_1 = \frac{\frac{1}{2}Bh^2 + bH\left(\frac{1}{2}H + h\right)}{Bh + bH}$$

Figur 65.



Figur 66.



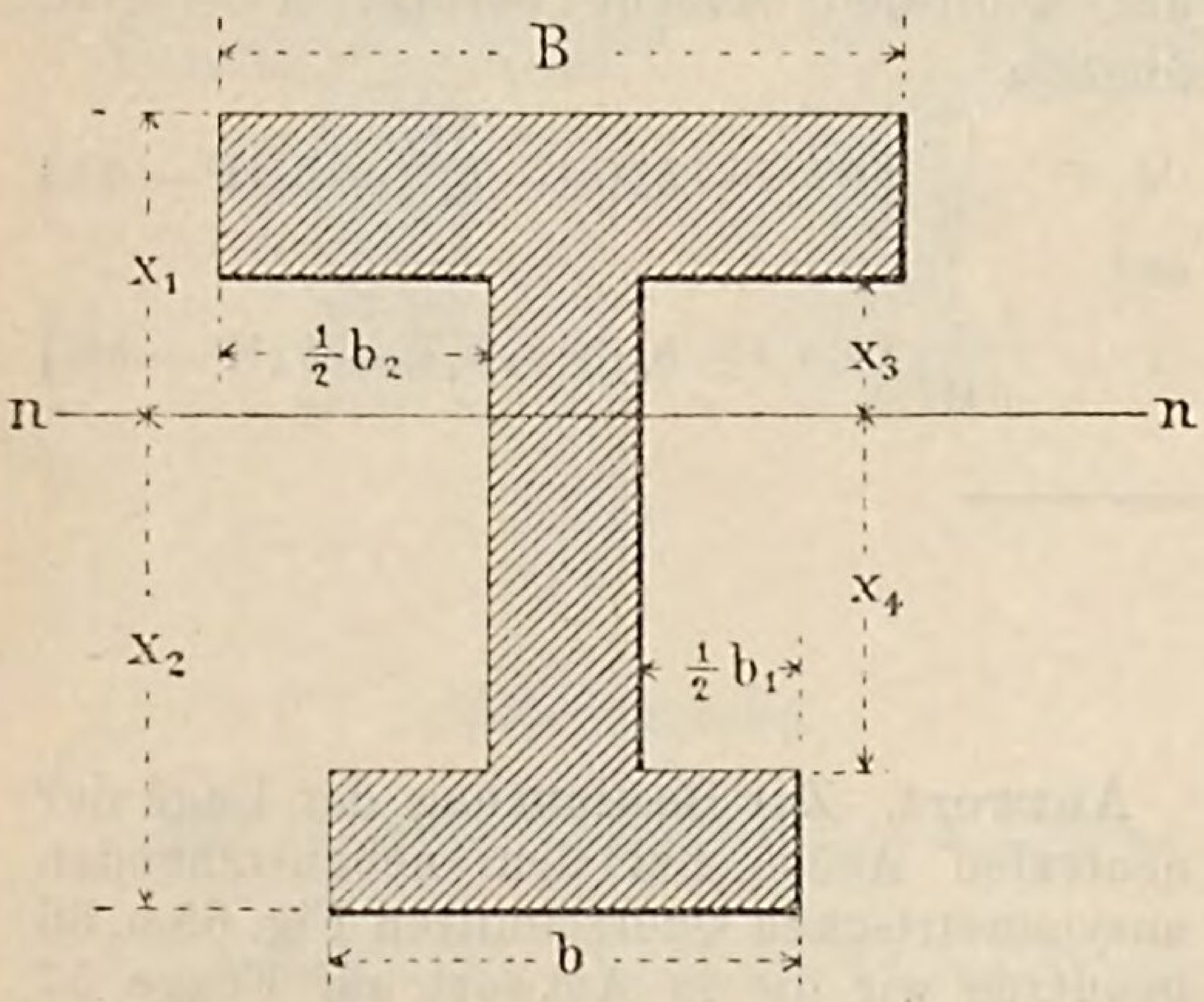
Zur einfachen Bestimmung des Trägheitsmoments denke man sich die ganze Querschnittsfläche bestehend aus den beiden Rechtecken $B.x_1 + b.x_2$ weniger dem Rechteck $(B - b).(x_1 - h)$, dann ist nach Gleichung 13 in Antwort auf Frage 58:

$$34). \; . \; T = \frac{1}{3}\left(Bx_1^3 + bx_2^3 - (B - b)(x_1 - h)^3\right)$$

Die Querschnittsmoduli oder Widerstandsmomente sind, da die Entfernung der äussersten Faser von der neutralen Achse nach oben x_1 und nach unten x_2 beträgt:

$$35). \; . \; . \; . \; Q_1 = \frac{T}{x_1} \text{ und } Q_2 = \frac{T}{x_2}$$

Figur 67.



Um Trägheitsmoment und Querschnittsmodulus von der in Fig. 67 dargestellten Querschnittsfläche zu ermitteln, denken wir uns zunächst wieder die neutrale Achse $\overline{nn}$, also die Abstände x_1, x_2, x_3 und x_4 derselben in obiger Weise berechnet, so sind zur Ermittelung des Trägheitsmoments in diesem Fall vier Rechtecke in Betracht zu ziehen und zwar besteht der ganze Querschnitt aus

$$Bx_1 - b_2 x_3 + b x_2 - b_1 x_4$$

und somit ist nach Gleichung 13). in Antw. auf Frage 58 das Gesamtträgheitsmoment:

$$36). \; . \; . \; T = \frac{1}{3}\left(Bx_1^3 - b_2 x_3^3 + bx_2^3 - b_1 x_4^3\right)$$

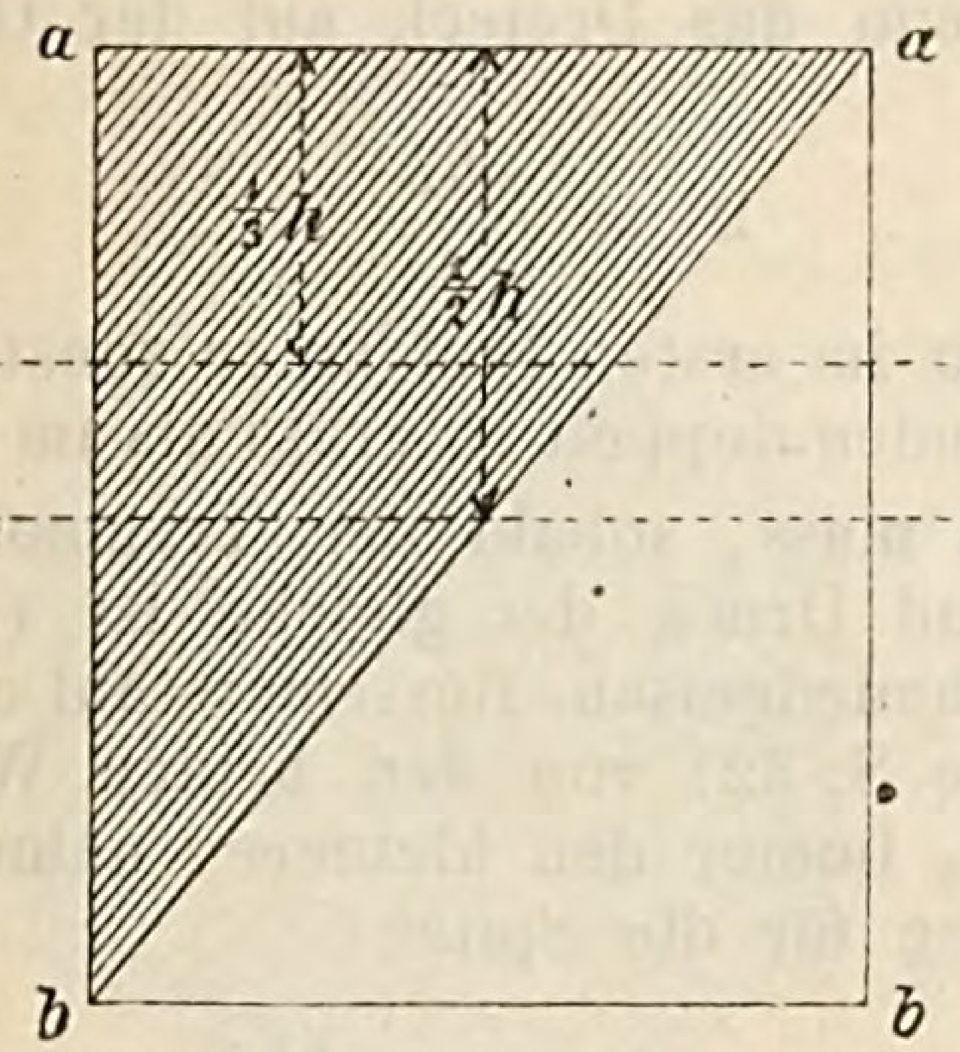
und die Querschnittsmoduli oder Widerstandsmomente sind

$$37). \; . \; . \; . \; Q_1 = \frac{T}{x_1} \text{ und } Q_2 = \frac{T}{x_2}$$

γ). Trägheitsmoment des Dreiecks.

Frage 66. Wie gross ist das Trägheitsmoment eines Dreiecks bezogen auf die neutrale Achse, und durch welche Betrachtung ergibt sich die Richtigkeit der nebenstehenden Formel?

Figur 68.



Erkl. 78. Bezeichnet man das Trägheitsmoment bezogen auf die Grundlinie *aa* mit T_2, so ist nach Gleichung 17). in Antwort auf Frage 59:

$$T_2 = T + FY^2$$

oder da $T = \frac{1}{36}bh^3$, $F = \frac{1}{2}bh$ und $Y = \frac{1}{3}h$ so ist:

$$T_2 = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{2}bh\left(\frac{1}{3}h\right)^2$$

oder:

$$T_2 = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{18}bh^3$$

oder:

$$41). \quad T_2 = \frac{1}{12}bh^3$$

Bezeichnet man das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch die Spitze gehende Achse *bb* mit T_3, so ist ebenfalls nach Gleichung 17). in Antwort auf Frage 59:

$$T_3 = T + FY^2$$

oder da Y in diesem Fall $= \frac{2}{3}h$, so ist:

$$T_3 = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{2}bh\left(\frac{2}{3}h\right)^2$$

oder:

$$T_3 = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{2}bh \cdot \frac{4}{9}h^2$$

oder:

$$42). \quad T_3 = \frac{1}{4}bh^3$$

Antwort. Für die Dreiecksfläche ist in Bezug auf die neutrale Achse das Trägheitsmoment

$$38). \quad T = \frac{1}{36}bh^3$$

wenn *b* die Grundlinie und *h* die Höhe bezeichnet.

Beweis. Da das Dreieck die Hälfte des Rechtecks von gleicher Grundlinie und Höhe ist, und das Trägheitsmoment des letzteren, bezogen auf die neutrale Achse n_1n_1 nach Gleichung 14).:

$$T = \frac{1}{12}bh^3$$

ist, so ist das Trägheitsmoment der Dreiecksfläche bezogen auf dieselbe Achse n_1n_1:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}bh^3$$

oder:

$$T_1 = \frac{1}{24}bh^3$$

Die Entfernung der wagerechten Schwerlinie des Rechtecks von der Basis beträgt $\frac{1}{2}h$, die Entfernung der wagerechten Schwerlinie des Dreiecks von der Basis nur $\frac{1}{3}h$, folglich ist der Abstand der beiden Schwerlinien:

$$Y = \frac{1}{2}h - \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}h$$

folglich ist nach Gleichung 17). in Antwort auf Frage 59:

$$T = T_1 - Y^2F$$

oder die entsprechenden Werte eingesetzt:

$$T = \frac{1}{24}bh^3 - \left(\frac{1}{6}h\right)^2 \cdot \frac{1}{2}bh$$

oder:

$$T = \frac{1}{24}bh^3 - \frac{1}{72}bh^3$$

oder:

$$38). \quad T = \frac{1}{36}bh^3$$

Da der Abstand der äussersten Faser von der neutralen Achse $nn = \frac{1}{3}h$ resp. $\frac{2}{3}h$ beträgt, so sind die Widerstandsmomente oder Querschnittsmoduli:

$$Q_1 = \frac{\frac{1}{36}bh^3}{\frac{1}{3}h}$$

oder:

$$39a). \quad Q_1 = \frac{1}{12}bh^2$$

und

$$Q_2 = \frac{\frac{1}{36} b h^3}{\frac{2}{3} h}$$

oder:

$$39b). \quad . \quad . \quad . \quad Q_2 = \frac{1}{24} b h^2$$

und die Tragfähigkeit beträgt somit, wenn das Dreieck auf der Spitze steht:

$$40a). \quad . \quad . \quad . \quad P_1 = \frac{s b h^2}{12 l}$$

und wenn das Dreieck auf der Grundlinie steht:

$$40b). \quad . \quad . \quad . \quad P_2 = \frac{s b h^2}{24 l}$$

ist also im ersten Fall unter sonst gleichen Umständen doppelt so gross als im letzteren.

Man muss, sobald der Tragmodulus für Zug und Druck der gleiche ist (wie z. B. bei Schmiedeeisen, Bessemerstahl etc., siehe Tabelle S. 32) von den beiden Werten Q_1 und Q_2 immer den kleineren nehmen, hier also den für die Spitze:

$$Q_2 = \frac{1}{24} b h^2$$

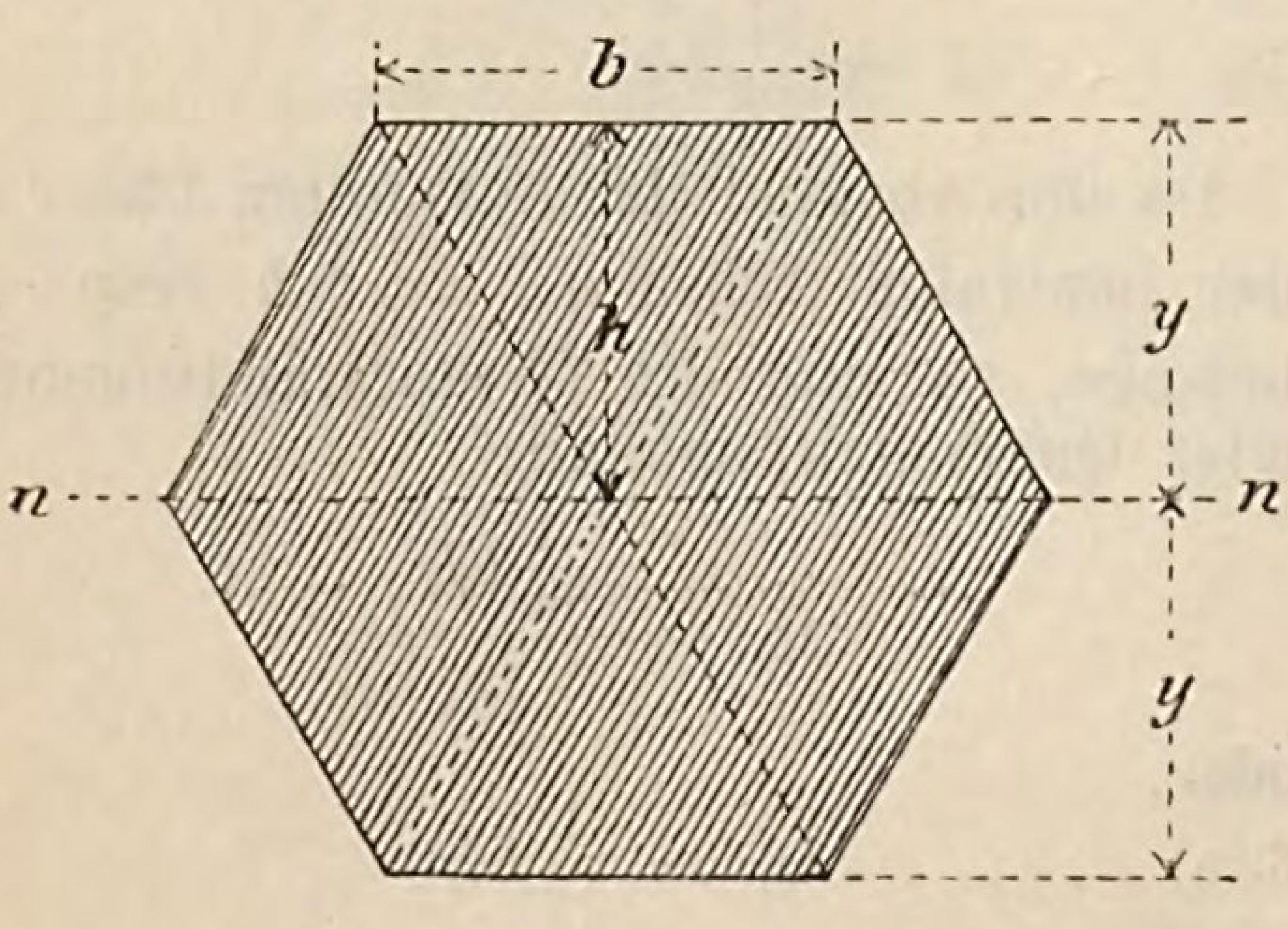
Ist aber der Tragmodulus für Zug ein anderer als für Druck, so hat man den Balken so zu legen, dass dem grösseren Tragmodulus auch der grössere Abstand Y entspricht, und der Rechnung hat man dasjenige Y zu Grunde zu legen, welches, in den Tragmodul dividiert, den kleineren Quotienten gibt.

Erkl. 79. Da nach nebenstehender Gleichung 40b). das auf der Grundlinie stehende rechtwinklige Dreieck im Vergleich zu einem Rechteck von gleicher Höhe und Grundlinie bei der halben Masse des Rechtecks nur den vierten Teil der Tragfähigkeit desselben besitzt, so ergibt sich hieraus, dass dessen Anwendung nicht vorteilhaft ist. Uebrigens hat *Tredgold* aus *Düleau's* Versuchen mit dreikantigen Balken gefolgert, dass ihre Tragkraft in jeder Lage die gleiche sei und sich zu derjenigen eines Rechtecks von gleicher Grundlinie und Höhe verhalte wie 0,339 : 1.

δ). Trägheits- und Widerstandsmoment regulärer Polygone.

Frage 67. Welche Formel drückt das Trägheitsmoment für die reguläre Sechsecksfläche aus und aus welcher Betrachtung ergibt sich die Richtigkeit dieser Formel?

Figur 69.



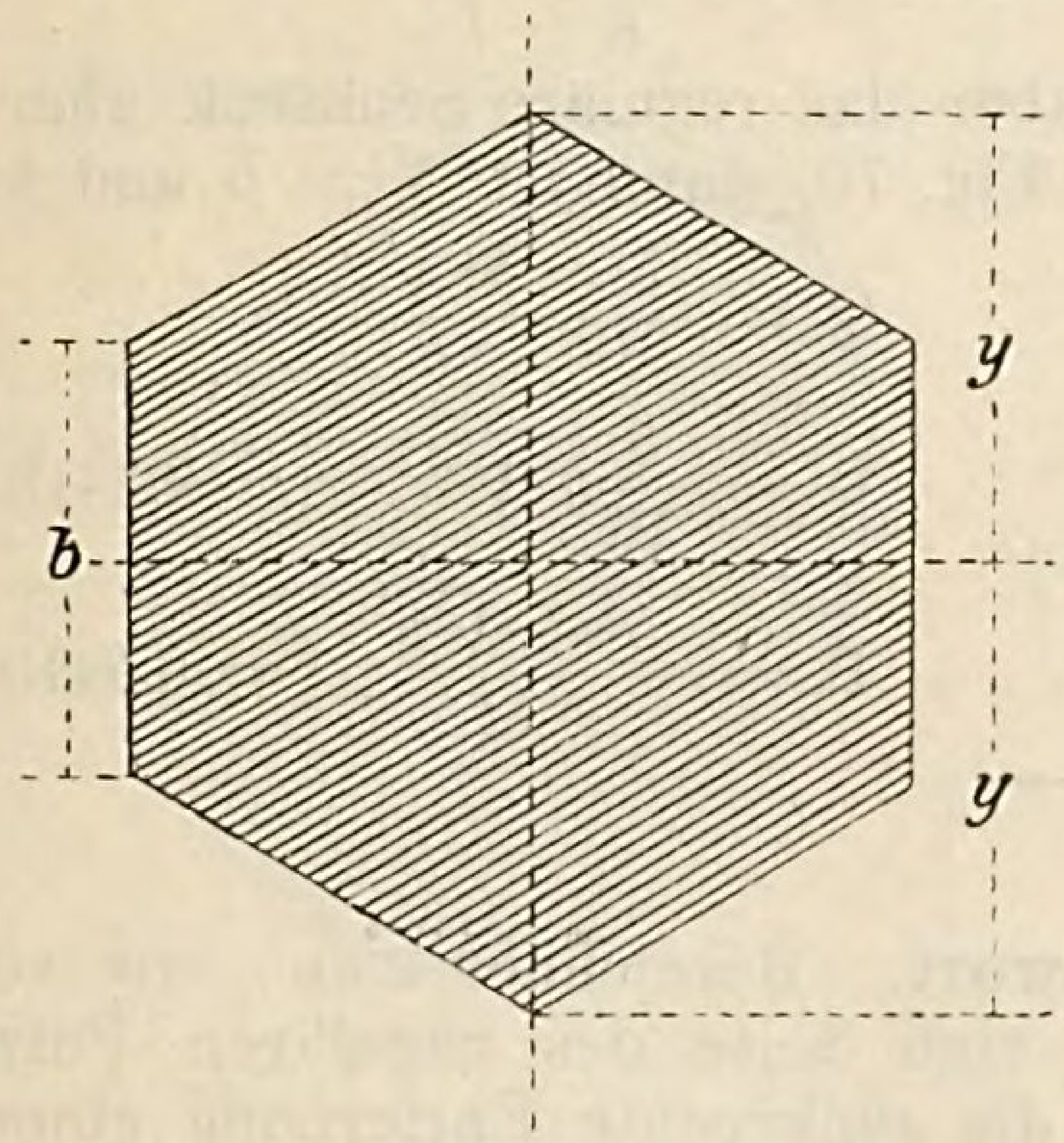
Antwort. Bezeichnet man eine Seite des regulären Sechsecks mit b, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Achse:

$$43). \quad . \quad . \quad . \quad T = \frac{5}{16} b^4 \sqrt{4}$$

Beweis. Betrachten wir die Sechsecksfläche, Fig. 69, und denken wir uns dieselbe aus sechs gleich grossen regulären Dreiecken zusammengesetzt, so geht die neutrale Achse bei zwei Dreiecken durch die Spitze, während sie bei den übrigen Dreiecken mit der Grundlinie derselben zusammenfällt. Nach der oben entwickelten Gleichung 41 ist aber das Trägheitsmoment eines Dreiecks bezogen auf die Grundlinie desselben:

$$T_2 = \frac{1}{12} b h^3$$

Figur 70.



Erkl. 80. Für die nebenstehende Formel 43).:

$$T = \frac{5}{16} b^4 \sqrt{3}$$

kann man auch setzen:

$$T = 0{,}541266\, b^4$$

denn

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508$$

und somit:

$$\frac{5}{16} \cdot 1{,}7320508$$

$$= 16 : 8{,}660254 = 0{,}541266$$

oder da die Höhe eines regulären Dreiecks nach dem pythag. Lehrsatz:

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{1}{2} b\right)^2}$$

oder:

$$h = \frac{1}{2} b \sqrt{3}$$

so ist, wenn wir diesen Wert in die Gleichung für T_2 einsetzen:

$$T_2 = \frac{1}{12} b \left(\frac{1}{2} b \sqrt{3}\right)^3$$

oder:

$$T_2 = \frac{1}{12} b \cdot \frac{1}{8} b^3 . 3 \sqrt{3}$$

oder:

$$T_2 = \frac{b^4 \sqrt{3}}{32}$$

Da aber vier solcher Dreiecke vorhanden sind, bei denen die neutrale Achse mit der Grundlinie zusammenfällt, so ist das Trägheitsmoment dieser vier Dreiecke:

$$T_2 = \frac{1}{8} b^4 \sqrt{3}$$

Das Trägheitsmoment eines Dreiecks in Bezug auf eine durch seine Spitze gehende Achse ist nach der oben entwickelten Gleichung 42).:

$$T_3 = \frac{1}{4} b h^3$$

oder für h wieder $\frac{1}{2} b \sqrt{3}$ eingesetzt:

$$T_3 = \frac{1}{4} b \left(\frac{1}{2} b \sqrt{3}\right)^3$$

oder:

$$T_3 = \frac{1}{4} b \cdot \frac{1}{8} b^3 . 3 \sqrt{3}$$

oder:

$$T_3 = \frac{3}{32} b^4 \sqrt{3}$$

Da aber zwei Dreiecke vorhanden sind, bei denen die neutrale Achse durch die Spitze geht, so ist das Trägheitsmoment derselben:

$$T_3 = \frac{3}{16} b^4 \sqrt{3}$$

und somit ist das Trägheitsmoment der gesamten Sechsecksfläche in Bezug auf die neutrale Achse:

$$T = T_2 + T_3$$

oder:

$$T = \frac{1}{8} b^4 \sqrt{3} + \frac{3}{16} b^4 \sqrt{3}$$

oder:

43). . . . $$T = \frac{5}{16} b^4 \sqrt{3}$$

Diese Formel gilt sowohl für das Sechseck Fig. 69, sowie auch für das Sechseck Fig. 70.

Steht das reguläre Sechseck flach, wie Fig. 69, dann ist $Y = h = \frac{1}{2} b \sqrt{3}$ und somit der Querschnittsmodulus oder das Widerstandsmoment:

$$Q = \frac{\frac{5}{16} b^4 \sqrt{3}}{\frac{1}{2} b \sqrt{3}}$$

oder:

$$44). \quad Q = \frac{5}{8} b^3$$

und somit die Tragfähigkeit, wenn s der Sicherheitskoeffizient und l die Balkenlänge:

$$45). \quad P = \frac{5}{8} \cdot \frac{s b^3}{l}$$

steht aber das reguläre Sechseck über Eck, wie in Fig. 70, dann ist $Y = b$ und somit:

$$46). \quad Q = \frac{5}{16} \cdot \frac{b^4 \sqrt{3}}{b}$$

oder:

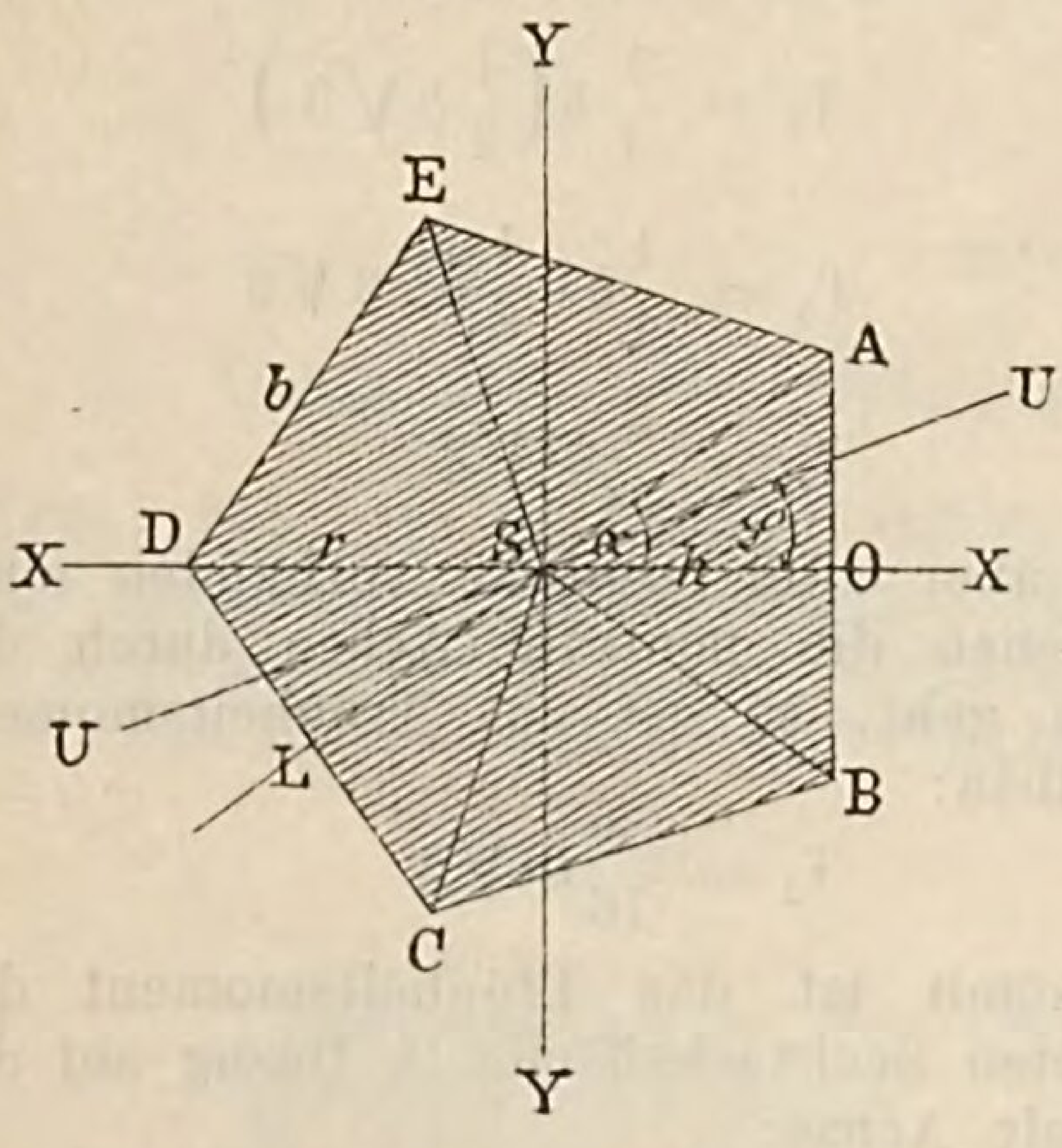
$$Q = \frac{5}{16} b^3 \sqrt{3} \quad (= 0{,}5413\, b^3)$$

und

$$47). \quad P = \frac{5\, s b^3 \sqrt{3}}{16\, l} \quad \left(= 0{,}5413 \frac{s b^3}{l}\right)$$

Frage 68. Welche Formel drückt im allgemeinen das Trägheits- oder Biegungsmoment eines jeden regelmässig polygonalen Querschnitts aus, und aus welcher Betrachtung ergibt sich die Richtigkeit dieser Formel?

Figur 71.



Erkl. 81. Betrachten wir das Dreieck ASB als bestehend aus den beiden Dreiecken ASO und BSO, so ist nach Erkl. 78, Formel 41)., das Trägheitsmoment eines dieser Dreiecke:

$$t_1 = \frac{1}{12} \overline{OS} \cdot (\overline{AO})^3$$

oder, da $\overline{OS} = h$ und $\overline{AO} = \frac{1}{2} b$ also:

$$(\overline{AO})^3 = \frac{1}{8} b^3$$

ist, so ist:

Antwort. Bezeichnet man, wie vorher, mit b eine Seite des regulären Polygons, mit h die senkrechte Entfernung einer solchen Seite vom Mittelpunkt des Polygons und mit F den Flächeninhalt desselben, so erhält man für jede beliebige Achse des regulären Polygons das Mass des Biegungsmoments oder das Trägheitsmoment:

$$1). \quad T = \frac{F}{4} \left(h^2 + \frac{b^2}{12}\right)$$

oder wenn man den Halbmesser des dem Polygon umbeschriebenen Kreises $= r$ nennt

$$2). \quad T = \frac{F\,(r^2 + 2h^2)}{12}$$

Beweis. Da sich jedes reguläre Polygon von seinem Mittelpunkt aus in so viel kongruente Dreiecke zerlegen lässt als das Polygon Seiten hat, so kommt es bei der Bestimmung des Trägheitsmoments vorzüglich darauf an, das Trägheitsmoment eines solchen Dreiecks ASB (siehe Fig. 71) zu ermitteln. Bezeichnet man die Seite $\overline{AB}$ des Polygons oder die Grundlinie (Basis) eines solchen Dreiecks mit b und die Höhe $\overline{SO}$ desselben mit h, so ist sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse XX (welche zugleich Symmetrieachse ist):

$$t_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{h b^3}{12}$$

oder:

$$t_1 = \frac{1}{48} h b^3 \;[1]$$

[1]. Siehe Erkl. 81.

$$t_1 = \frac{1}{12} \cdot h \cdot \frac{1}{8} b^3$$

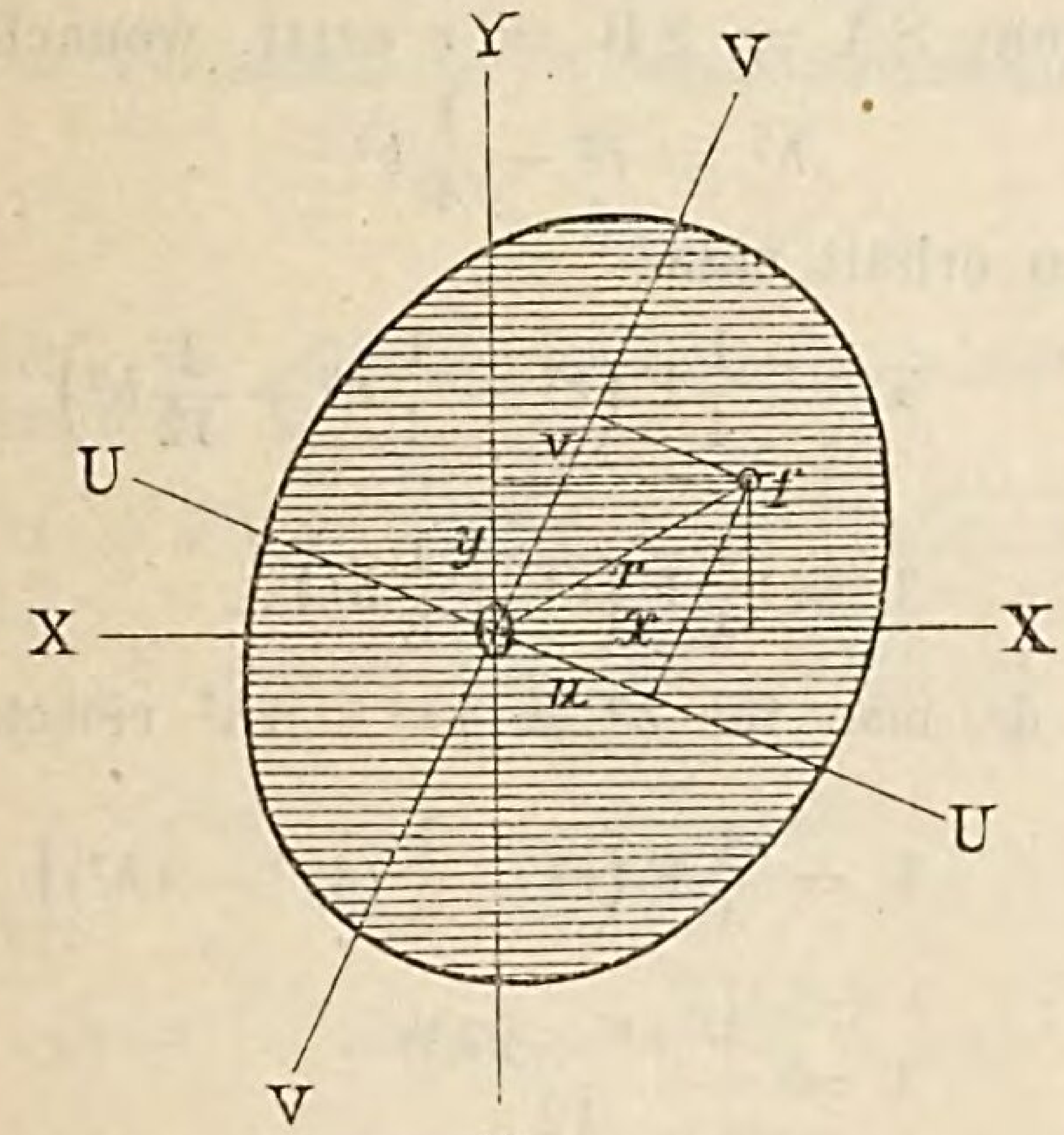
Dasselbe gilt für Dreieck OSB, und somit ist das Trägheitsmoment des Dreiecks ABS mit Bezug auf die XX-Achse:

$$t = 2 \cdot \frac{1}{12} h \cdot \frac{1}{8} b^3$$

oder:

$$t = \frac{1}{48} h b^3$$

Figur 72.



Erkl. 82. Sind x und y die Koordinaten (siehe Erkl. 93) eines Flächenelements f (siehe Fig. 72) in Bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz $\overline{XX}$, $\overline{YY}$, und sind ebenso u und v die Koordinaten dieses Flächenelements in Bezug auf ein anderes rechtwinkliges Achsenkreuz $\overline{UU}$, $\overline{VV}$, und ist endlich r der Abstand des Flächenelements von dem gemeinschaftlichen Nullpunkt 0 beider Achsensysteme, so ist nach dem pythag. Lehrsatz:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

und $r^2 = u^2 + v^2$

also auch $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$

und auch $x^2 f + y^2 f = u^2 f + v^2 f = r^2 f$

Setzen wir nun in diesen Gleichungen statt f nach und nach die Elemente f_1, f_2, f_3 u. s. w. des ganzen Querschnitts und ebenso statt x, y, u und v die entsprechenden Koordinaten x_1, x_2, $x_3 \ldots$, y_1, y_2, $y_3 \ldots$, sowie u_1, u_2, $u_3 \ldots$, v_1, v_2, $v_3 \ldots$ ein, so erhalten wir durch Addition dieser sämtlichen Glieder:

$$\Sigma(x^2 f) + \Sigma(y^2 f) = \Sigma(u^2 f) + \Sigma(v^2 f) = \Sigma(r^2 f)$$

d. h. es ist die Summe der Trägheitsmomente in Bezug auf die beiden Achsen $\overline{XX}$ und $\overline{YY}$ eines rechtwinkligen Achsensystems gleich der Summe der Trägheitsmomente in Hinsicht auf beide Achsen eines anderen ebenfalls rechtwinkligen von demselben Aus-

Dagegen ist das Trägheitsmoment dieses Dreiecks in Bezug auf die durch seine Spitze gehende Achse YY nach Formel 42).:

$$t_2 = \frac{1}{4} b h^3$$

und es ist folglich die Summe beider Momente:

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{48} h b^3 + \frac{1}{4} b h^3$$

oder:

$$t_1 + t_2 = \frac{bh}{4}\left(h^2 + \frac{b^2}{12}\right)$$

Diese Summe gilt nun auch für jedes der übrigen Dreiecke [1]) und es ist daher dieselbe für das Polygon von n Seiten:

$$T_1 + T_2 = \frac{nbh}{4}\left(h^2 + \frac{b^2}{12}\right)$$

oder da der Flächeninhalt eines Dreiecks $= \frac{1}{2} bh$ und somit der Flächeninhalt des Polygons

$$F = n \cdot \frac{1}{2} bh$$

ist, so ist auch

$$T_1 + T_2 = \frac{1}{2} F \left(h^2 + \frac{b^2}{12}\right)$$

Bezeichnen wir den Winkel ASO (Fig. 71) $= \alpha$, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse ASL [2]) $=$

$$T_1 (\sin \alpha)^2 + T_2 (\cos \alpha)^2$$

Dasselbe ist aber auch gleich dem Moment T_2 in Bezug auf die XX-Achse, daher hat man:

$$T_2 = T_1 (\sin \alpha)^2 + T_2 (\cos \alpha)^2$$

oder:

$$T_1 (\sin \alpha)^2 = T_2 - T_2 (\cos \alpha)^2$$

oder:

$$T_1 (\sin \alpha)^2 = T_2 [1 - (\cos \alpha)^2]$$

oder da nach einer goniometrischen Formel

$$(\sin \alpha)^2 = 1 - (\cos \alpha)^2$$

ist, so ist auch

$$T_1 (\sin \alpha)^2 = T_2 (\sin \alpha)^2$$

also

$$T_1 = T_2$$

Für eine Achse UU, welche um einen willkürlichen Winkel φ (s. Fig. 71) von der Symmetrieachse XX abweicht, ist ferner das Moment

$$T = T_1 . \sin \varphi^2 + T_2 . \cos \varphi^2$$

oder, da $T_1 = T_2$

$$T = T_1 (\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2)$$

oder da nach der oben erwähnten goniometrischen Formel

$$\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2 = 1$$

ist, so ist

$$T = T_1$$

[1]) Siehe Erkl. 82.
[2]) Siehe Erkl. 83.

gangspunkt ausgehenden Achsensystems und gleich dem Trägheitsmoment in Bezug auf den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt, d. i. gleich der Summe der Produkte aus den Elementen des Querschnitts und aus den Quadraten ihrer Entfernung von der Achse O.

Erkl. 83. Ist der Querschnitt (Fig. 73) eines gebogenen Körpers eine symmetrische Figur und ist die Achse $\overline{YY}$ rechtwinklig gegen die Symmetrieachse $\overline{XX}$, so findet noch eine Relation zwischen den Biegungs- oder Trägheitsmomenten statt.

Sind $So = x$ und $fo = y$ die Koordinaten des Flächenelements f in Bezug auf das Achsensystem $\overline{XX}$ und $\overline{YY}$, und ist auch $fn = v$ der Abstand desselben Flächenelements f von einer anderen Achse UU, welche um den Winkel $USX = \alpha$ von der Symmetrieachse abweicht, so haben wir für diesen Abstand

$$v = fm - nm$$

oder $v = fm - ol$

oder, da

$$\frac{fm}{fo} = \cos\alpha$$ (denn $\measuredangle mfo = \alpha$ als Winkel, deren Schenkel paarweise zu einander senkrecht stehen)

also $fm = fo \cdot \cos\alpha$

und da ferner

$$\frac{ol}{So} = \sin\alpha, \quad \text{also} \quad ol = So \cdot \sin\alpha$$

so ist, wenn wir diese Werte für fm und ol in die obige Gleichung einsetzen:

$$v = fo \cdot \cos\alpha - So \cdot \sin\alpha$$

oder, da $fo = y$ und $So = x$, so ist:

$$v = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha$$

und auch $v^2 = (y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha)^2$

oder:

$$v^2 = y^2(\cos\alpha)^2 + x^2(\sin\alpha)^2 - 2xy \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

sowie auch

$$fv^2 = fx^2(\sin\alpha)^2 + fy^2(\cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha\, fxy$$

(denn nach einer goniometrischen Formel ist $2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$)

und

$$\Sigma(fv^2) = (\sin\alpha)^2\,\Sigma(fx^2) + (\cos\alpha)^2\,\Sigma(fy^2) - \sin 2\alpha\,\Sigma(fxy)$$

Da wegen der symmetrischen Gestalt der Figur jedem Element $f_1 f_2 \ldots$ ein gleiches Gegenelement zukommt, bei welchem y und folglich auch das ganze Produkt negativ ist, so fällt die Summe der entsprechenden Produkte für je zwei solcher Elemente und folglich auch die ganze Summe $\Sigma(fxy) = 0$ aus, und es ist daher

$$\Sigma(fv)^2 = (\sin\alpha)^2\,\Sigma(fx^2) + (\cos\alpha)^2 \cdot \Sigma(fy^2)$$

oder: $T = (\sin\alpha)^2\, T_1 + (\cos\alpha)^2\, T_2$

wobei T das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine Achse UU, T_2 dasselbe in Bezug auf die Symmetrieachse und T_1 das in Bezug auf die YY-Achse bezeichnen und vorausgesetzt wird, dass sämtliche Achsen durch den Schwerpunkt S der Figur gehen.

Wenn man folglich in der obigen Gleichung:

$$T_1 + T_2 = \frac{1}{2}F\left(h^2 + \frac{b^2}{12}\right)$$

$$T = T_1 = T_2$$

einsetzt, so erhält man für jede beliebige Achse des regulären Polygons das Trägheitsmoment

$$T = T_1 = T_2 = \frac{1}{4}F\left(h^2 + \frac{b^2}{12}\right)$$

oder wenn man noch den Halbmesser des Polygons $SA = SB = r$ setzt, wonach

$$h^2 = r^2 - \frac{1}{4}b^2$$

ist, so erhält man:

$$T = \frac{1}{4}F\left(r^2 - \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{12}b^2\right)$$

oder:

$$T = \frac{1}{4}F\left(r^2 - \frac{1}{6}b^2\right)$$

oder, da man für $b^2 = 4r^2 - 4h^2$ einsetzen kann:

$$T = \frac{1}{4}F\left(r^2 - \frac{1}{6}(4r^2 - 4h^2)\right)$$

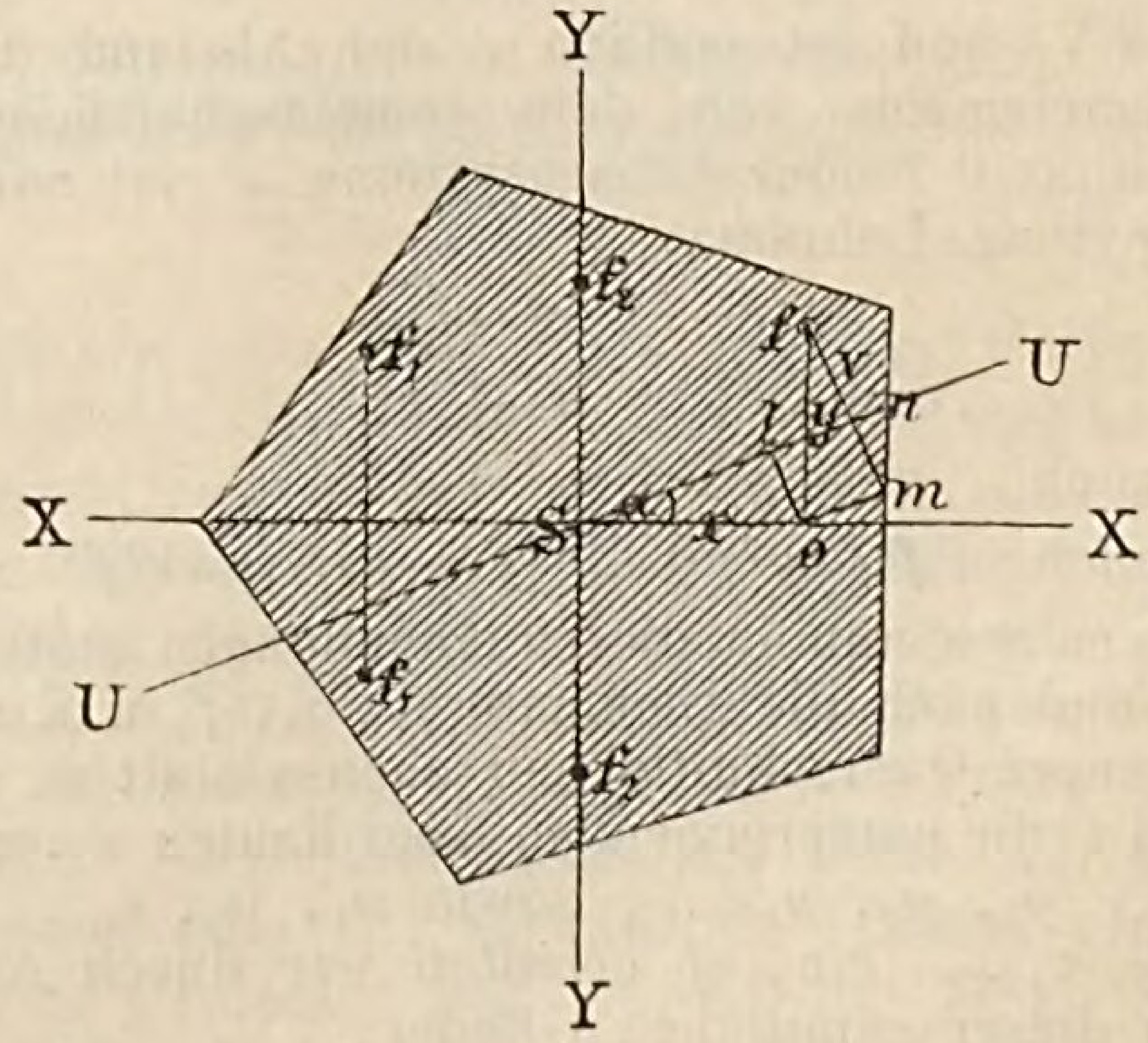
oder:

$$T = \frac{F(r^2 + 2h^2)}{12}$$

oder:

$$T = F\left(\frac{1}{4}r^2 - \frac{2}{12}r^2 + \frac{2}{12}h^2\right)$$

Figur 73.



Frage 69. Wie gross ist, nach den oben entwickelten Formeln im allgemeinen das Widerstandsmoment oder der Querschnittsmodulus Q für einen Balken mit regelmässig polygonalem Querschnitt?

Antwort. Für einen Balken, bei dem die Anzahl der Seiten des regulär polygonalen Querschnitts gerade ist, hat man, wenn r den Halbmesser des umbeschriebenen, h den Halbmesser des einbeschriebenen Kreises und b die Kantenlänge bezeichnet, entweder

$$Y_1 = r \quad \text{oder} \quad Y_2 = h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

zu setzen, je nachdem die im Schwerpunkt auf der neutralen Achse errichtete Senkrechte einen Eckpunkt oder die Mitte einer Seite trifft, daher ist für den ersten Fall:

$$1). \ldots Q_1 = \frac{T}{Y_1} = \frac{T}{r} = \frac{F(r^2 + 2h^2)}{12r}$$

und für den zweiten Fall:

$$Q_2 = \frac{T}{Y_2} \quad \text{oder} \quad Q_2 = \frac{T}{h}$$

oder:

$$2). \ldots Q_2 = \frac{F(r^2 + 2h^2)}{12h} \text{ [1]}.$$

Ist die Anzahl n der Seiten des polygonalen Querschnitts ungerade, so hat man für Y stets $= r$ als den grösseren Abstand in Rechnung zu bringen, vorausgesetzt, dass die Kraftrichtung in eine Symmetrieachse des Querschnitts fällt.

[1]) Siehe Erkl. 84.

Erkl. 84. In beiden Fällen ist:

$$F = \frac{1}{2} n b h \quad \text{oder} \quad F = n h \sqrt{r^2 - h^2}$$

$$\text{oder} \quad F = \frac{1}{2} n b \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Das Verhältnis der Widerstandsmomente

$$\frac{T}{r} \quad \text{und} \quad \frac{T}{h} = \frac{h}{r}$$

Erkl. 85. Für den regelmässig achtseitigen Querschnitt ist

$$b = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}; \quad h = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

und

$$F = 4bh \quad \text{oder} \quad F = 2\sqrt{2} \cdot r^2$$

$$\text{oder} \quad F = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} b^2$$

daher:

$$Q_1 = \frac{T}{r} \quad \text{oder} \quad Q_1 = \frac{2\sqrt{2} + 1}{6} r^3$$

$$\text{oder} \quad Q_1 = 0{,}638\, r^3$$

und

$$Q_2 = \frac{T}{h} \quad \text{oder} \quad Q_2 = \frac{2\sqrt{2} + 1}{3\sqrt{2 + \sqrt{2}}} r^3$$

$$\text{oder} \quad Q_2 = 0{,}691\, r^3$$

ε). Polares Trägheitsmoment.

Frage 70. Was versteht man unter dem polaren und dem äquatorialen Trägheitsmoment?

Antwort. Wenn man das Trägheitsmoment nicht auf eine Schwerlinie, sondern auf den Schwerpunkt selbst bezieht und den Abstand eines Flächenelements f vom Schwerpunkt S mit r bezeichnet, so ist das polare Trägheitsmoment:

$$1). \ldots \ldots T_p = \Sigma r^2 f$$

d. h. gleich der Summe der Produkte aller Flächenelemente in die Quadrate ihres Abstands vom Schwerpunkt, zum Unterschied von dem auf die neutrale Achse bezogenen Trägheitsmoment, welches man auch das äquatoriale Trägheitsmoment nennt.

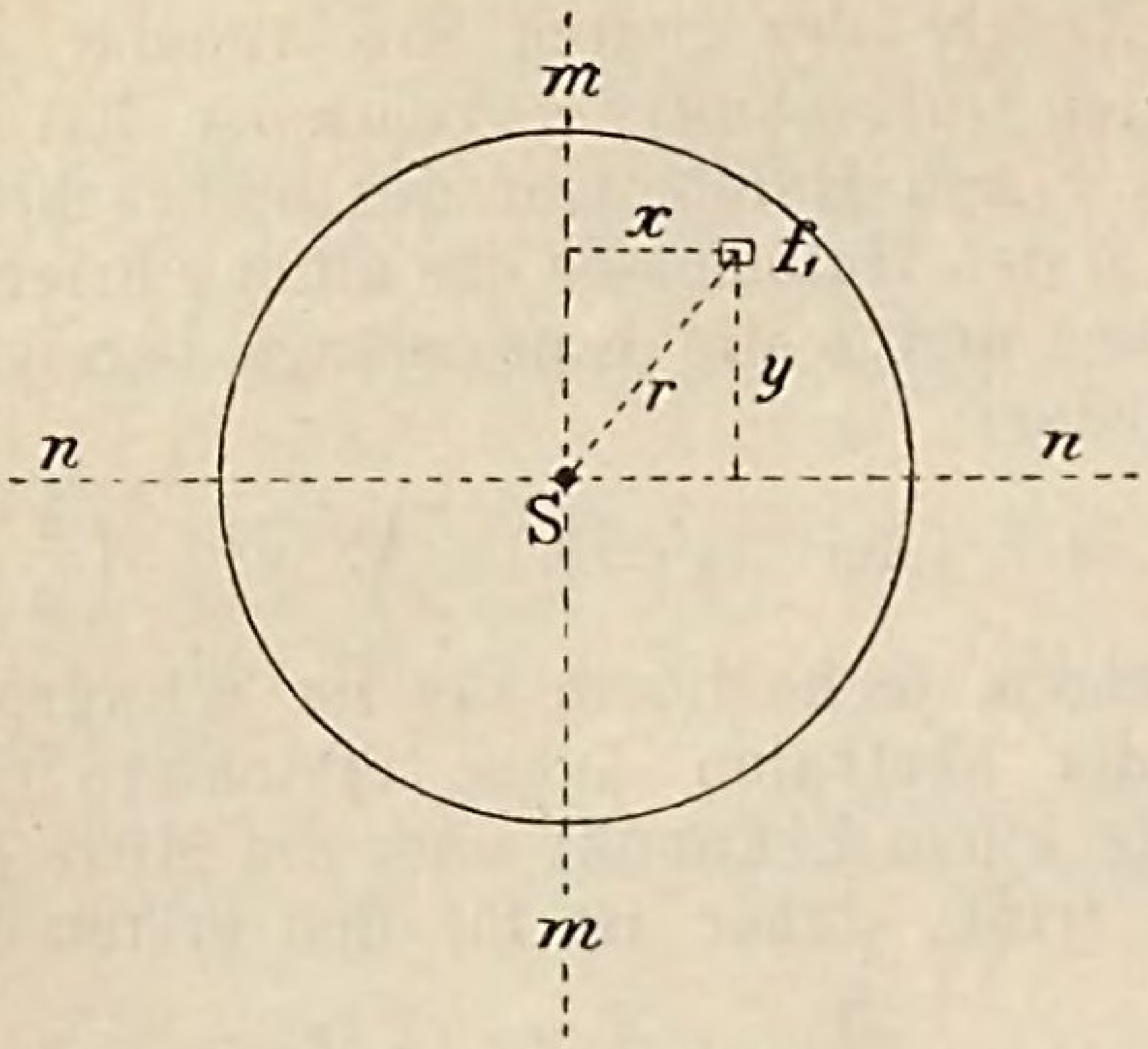
Für den Abstand des Flächenelements f_1 (siehe Fig. 74) ist

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Erkl. 86. Aequatorial (vom lat. aequāre = gleichmachen) heisst den Aequator oder Gleicher betreffend, d. h. in diesem Fall sich auf diejenige Linie beziehend, welche einen symmetrischen Querschnitt in zwei gleiche Teile trennt

Polar vom griech. polos = Drehpunkt) heisst die Pole oder im vorliegenden Fall den Schwerpunkt (welcher bei symmetrischen Flächen zugleich Mittelpunkt ist) betreffend.

Figur 74.



demnach ist das Trägheitsmoment der Summe aller Flächenteilchen:

$$\Sigma r^2 f = \Sigma x^2 f + \Sigma y^2 f$$

$\Sigma x^2 f$ ist aber das äquatoriale Trägheitsmoment $T x$ in Bezug auf die senkrechte Achse mm, und $\Sigma y^2 f$ ist das äquatoriale Trägheitsmoment $T y$ in Bezug auf die wagerechte neutrale Achse nn, mithin ist das polare Trägheitsmoment:

$$T_p = T_x + T_y$$

Ist der Querschnitt symmetrisch in Bezug auf den Schwerpunkt, dann ist auch

$$T_x = T_y = T$$

und somit

2). . . . $T_p = 2T$

d. h. es ist dann das polare Trägheitsmoment gleich dem doppelten äquatorialen Trägheitsmoment.

ζ). Trägheits- und Widerstandsmoment von Kreis, Kreisring und Ellipse.

Frage 71. Durch welche Formeln wird das Trägheits- und Widerstandsmoment einer Kreisfläche ausgedrückt, und aus welcher Betrachtung ergibt sich die Richtigkeit dieser Formeln?

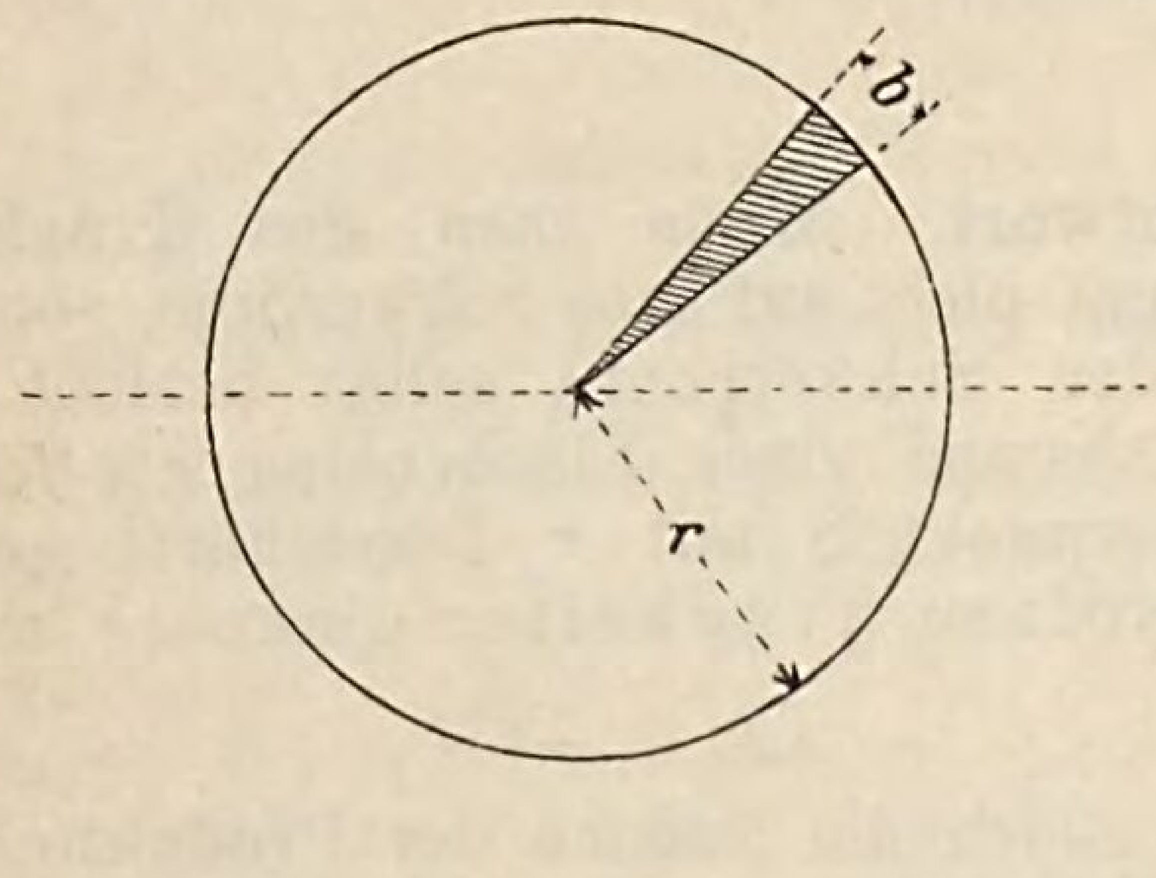
Antwort. Das Trägheitsmoment einer Kreisfläche vom Durchmesser d ist:

1). . . . $T = \frac{1}{64} d^4 \pi$ $(= 0{,}0491\, d^4)$

und das Widerstandsmoment oder der Querschnittsmodulus

2). . . . $Q = \frac{1}{32} d^3 \pi$ $(= 0{,}0982\, d^3)$

Figur 75.



Beweis. Denkt man sich den Kreis aus lauter Dreiecken bestehend, deren Grundlinie b, siehe Fig. 75, sehr klein ist, so dass man sie als geradlinig annehmen kann, so ist deren Höhe gleich dem Radius r, und das Trägheitsmoment jedes dieser Elementardreiecke auf die Spitze derselben bezogen nach Gleichung 42). in Erkl. 78:

$$\frac{1}{4} b r^3$$

Das polare Trägheitsmoment des Kreises ist die Summe dieser, also

$$T_p = \Sigma \frac{1}{4} b r^3 = \frac{1}{4} r^3 \Sigma b$$

Die Summe aller der unendlich vielen, unendlich kleinen Bogenstückchen b ist aber gleich dem Kreisumfang, und demnach ist das polare Trägheitsmoment:

Erkl. 87. Vergleichen wir Formel 20). in Antw. auf Frage 61 mit der nebenstehenden Formel 5)., so ergibt sich aus dieser Vergleichung, dass die Tragkraft eines Balkens von quadratischem Querschnitt zu der eines aus ihm verfertigten Cylinders sich verhält wie 1:0,5895, denn nach Gleichung 20). ist die Tragfähigkeit eines Balkens von quadratischem Querschnitt:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{s a^3}{l}$$

und nach nebenstehender Gleichung 7). ist die Tragfähigkeit eines cylindrischen Balkens

$$P_1 = \frac{1}{32} \cdot \frac{s d^3 \pi}{l}$$

Da nun die Kantenlänge a dem Durchmesser d entspricht, so verhalten sich die Tragfähigkeiten der beiden Körper

$$P : P_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{s a^3}{l} : \frac{1}{32} \cdot \frac{s d^3 \pi}{l}$$

oder:

$$P : P_1 = \frac{1}{6} : \frac{1}{32} \pi$$

oder:

$$P : P_1 = 1 : \frac{6 \,.\, 3{,}14159}{32}$$

oder:

$$P : P_1 = 1 : 0{,}5895$$

oder es verhält sich die Tragfähigkeit des Cylinders zu der Tragfähigkeit des quadratischen Balkens, aus welchem er gefertigt worden ist:

$$P_1 : P = 0{,}5895 : 1$$

oder:

$$P_1 : P = 1 : 1{,}7$$

Erkl. 88. Aus der nebenstehenden Formel 7). kann man die Grösse d als erforderlichen Durchmesser eines cylindrischen Balkens berechnen, und erhält dafür allgemein:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 P l}{s \pi}}$$

$$T_p = 2 r \pi \frac{1}{4} r^3$$

oder:

3). . . . $$T_p = \frac{1}{2} r^4 \pi$$

und das polare Widerstandsmoment

$$Q_p = \frac{T_p}{r}$$

oder:

4). . . . $$Q_p = \frac{1}{2} r^3 \pi$$

Da aber nach Gleichung 2). in Antwort auf Frage 70

$$T_p = 2 T$$

ist, so ist das äquatoriale Trägheitsmoment

$$T = \frac{1}{2} T_p$$

oder:

5). $$T = \frac{1}{4} r^4 \pi$$

und wenn wir in diese Gleichung für

$$r = \frac{1}{2} d$$

einsetzen, so ergibt sich:

$$T = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} d\right)^4 \pi$$

oder:

$$T = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \cdot d^4 \pi$$

oder:

$$T = \frac{1}{64} d^4 \pi$$

was der obigen Gleichung 1). entspricht.

Die Entfernung der äussersten Faser von der neutralen Schicht beträgt aber $Y = \frac{1}{2} d$, folglich ist das Widerstandsmoment oder der Querschnittsmodulus

$$Q = \frac{T}{Y} \quad \text{oder} \quad Q = \frac{T}{\frac{1}{2} d}$$

oder:

6). $$Q = \frac{1}{32} d^3 \pi$$

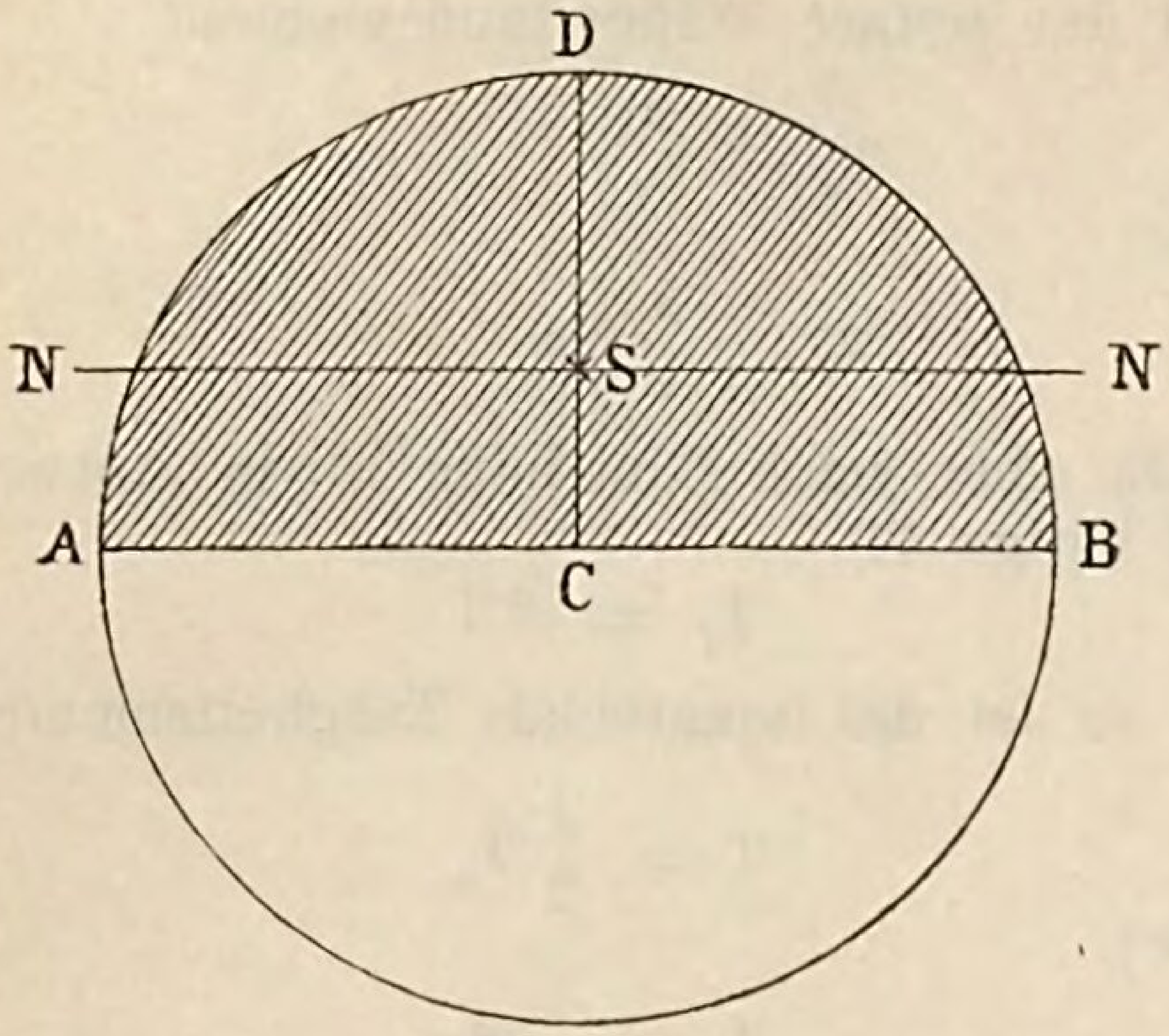
und die grösste zulässige Belastung bei der Länge l und dem Sicherheitskoeffizient s:

7). $$P = \frac{s}{32 l} d^3 \pi$$

Frage 72. Wie findet man das Trägheits- und Widerstandsmoment eines Halbkreises und wie gross ist dasselbe?

Antwort. Der horizontale Durchmesser AB (Fig. 76) teilt den Vollkreis in zwei Halbkreise, und es ist das Trägheitsmoment für eine solche Hälfte in Bezug

Figur 76.



Hilfsrechnung.

$$T = T_1 - F(\overline{CS})^2$$

oder:

$$T = T_1 - F\left(\frac{2d}{3\pi}\right)^2$$

oder:

$$T = \frac{d^4\pi}{128} - F\left(\frac{2d}{3\pi}\right)^2$$

oder:

$$T = \frac{d^4\pi}{128} - F\left(\frac{4d^2}{9\pi^2}\right)$$

oder da die Fläche des Halbkreises $F = \frac{d^2\pi}{8}$ so ist:

$$T = \frac{d^4\pi}{128} - \frac{4d^2 . d^2\pi}{9\pi^2 . 8}$$

oder:

$$T = \frac{d^4\pi}{128} - \frac{d^4\pi}{18\pi^2}$$

oder:

$$T = d^4\pi\left(\frac{1}{128} - \frac{1}{18\pi^2}\right)$$

oder:

$$T = d^4\pi\left(\frac{1}{128} - \frac{10}{444}\right)$$

oder:

$$T = d^4\pi\,(0{,}00781 - 0{,}00563)$$

oder:

$$T = 0{,}00218\, d^4\pi$$

oder:

$$T = 0{,}00685\, d^4$$

auf den Durchmesser genau halb so gross als das Trägheitsmoment der ganzen Kreisfläche, also mit Bezug auf Formel 1). in Antw. auf Frage 71 ist in diesem Fall

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} d^4\pi$$

oder:

$$T_1 = \frac{1}{128} d^4\pi$$

Nun steht aber der Schwerpunkt S des Halbkreises um $\overline{CS} =$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} = \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{\pi}$$

(siehe Klimperts Lehrbuch der Statik, Seite 187)

von dem Mittelpunkt C des Kreises ab, es ist daher für die mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ parallel laufende Achse $\overline{NN}$, welche durch den Schwerpunkt S geht:

$$T = T_1 - F(\overline{CS})^2$$

oder:

1). . . . $T = 0{,}00685\, d^4$ (siehe Hilfsrechn. 1)

Ferner ist:

$$\overline{CS} \text{ oder } Y_2 = \frac{2d}{3\pi} \text{ oder } Y_2 = 0{,}212\, d$$

und

$$\overline{DS} \text{ oder } Y_1 = 0{,}5\, d - 0{,}212\, d$$

$$\text{oder } Y_1 = 0{,}288\, d$$

folglich ist:

$$\frac{T}{Y_1} \text{ oder } Q_1 = \frac{0{,}00685\, d^4}{0{,}288\, d}$$

oder:

2). . . . $Q_1 = 0{,}0239\, d^3$

und

$$\frac{T}{Y_2} \text{ oder } Q_2 = \frac{0{,}00685\, d^4}{0{,}212\, d}$$

oder:

3). . . . $Q_2 = 0{,}0323\, d^3$

Dagegen ist für den Halbkreis mit senkrechtem Durchmesser

$$T = \frac{1}{128} d^4\pi$$

oder:

4). $T = 0{,}0245\, d^4$

und

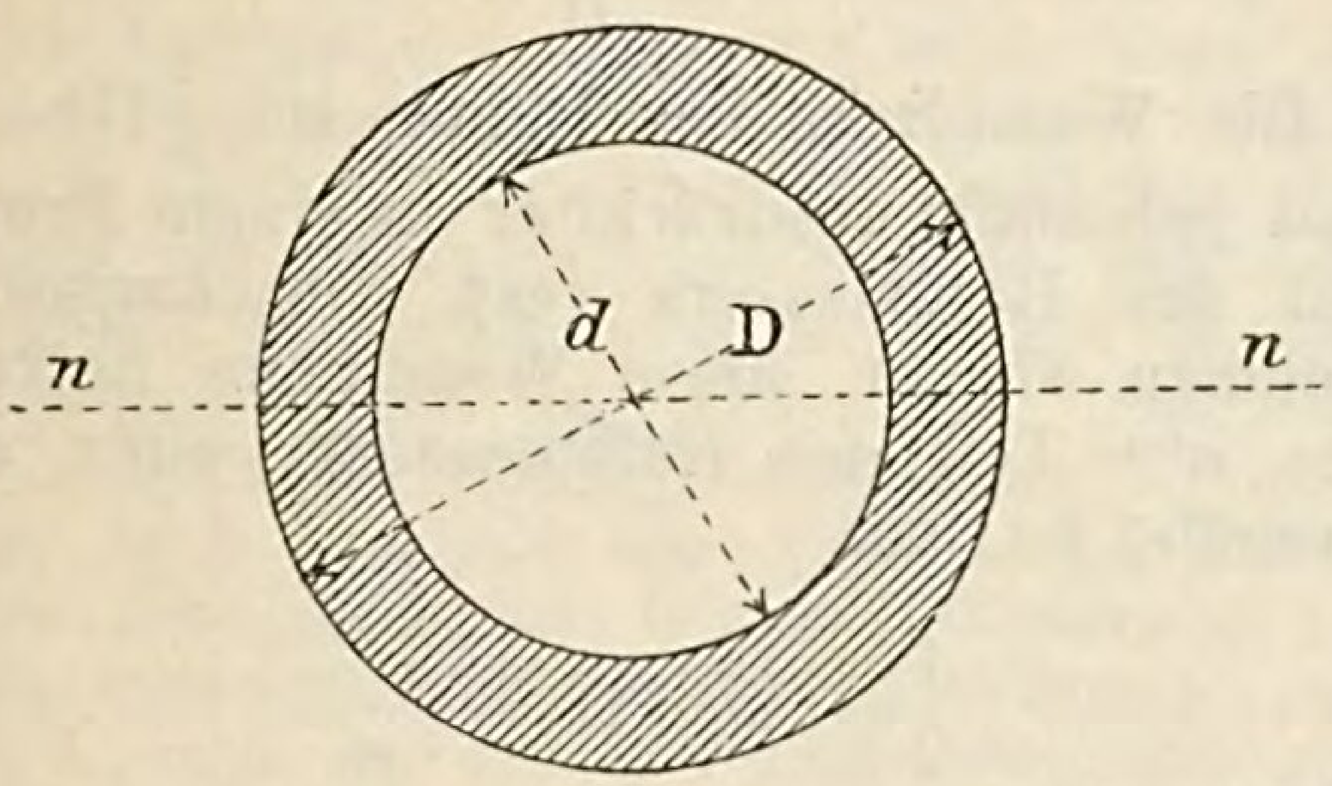
$$\frac{T}{Y} \text{ oder } Q = \frac{0{,}0245\, d^4}{\frac{1}{2} d}$$

oder:

5). . . . $Q = 0{,}049\, d^3$

Frage 73. Wie findet man das Trägheits- und Widerstandsmoment eines Kreisrings und wie gross ist dasselbe?

Figur 77.



Antwort. Bezeichnet man mit D den Durchmesser des äusseren und mit d den Durchmesser des inneren Kreises, so ist nach Formel 1). in Antw. auf Frage 71 das Trägheitsmoment der grösseren Kreisfläche:

$$T = \frac{1}{64} D^4 \pi$$

und das Trägheitsmoment der kleineren Kreisfläche:

$$T = \frac{1}{64} d^4 \pi$$

und gleichwie man durch Subtraktion der kleineren von der grösseren Fläche den Inhalt des Kreisrings findet, so findet man hier durch dasselbe Verfahren in Bezug auf das Trägheitsmoment:

$$1). \quad . \quad . \quad . \quad T = \frac{1}{64} \pi (D^4 - d^4)$$

Der Abstand Y der äussersten Faser von der neutralen Achse $\overline{nn}$ beträgt $\frac{1}{2}$D, folglich ist das Widerstandsmoment

$$Q = \frac{\frac{1}{64} \pi (D^4 - d^4)}{\frac{1}{2} D}$$

oder:

$$2). \quad . \quad . \quad . \quad Q = \frac{\frac{1}{32} \pi (D^4 - d^4)}{D}$$

und die Tragfähigkeit

$$3). \quad . \quad . \quad . \quad P = \frac{s \pi}{32 l} \left(\frac{D^4 - d^4}{D} \right).$$

Das polare Trägheits- und Widerstandsmoment ist doppelt so gross.

Frage 74. Verwendet man zu einem massiven Cylinder vom Durchmesser δ und zu einem hohlen Cylinder von derselben Länge und den Durchmessern D und d gleichviel und zwar einerlei Material (z. B. Gusseisen) so findet man durch Vergleichung der Formeln 7). in Antw. auf Frage 71 und 3). in Antw. auf Frage 73 welche für die Mechanik wichtige Thatsache?

Antwort. Verwendet man zu einem massiven Cylinder vom Durchmesser δ und zu einem hohlen Cylinder von gleicher Länge und den Durchmessern D und d gleichviel und zwar einerlei Material, so findet man durch Vergleichung der vorstehenden Formeln, dass die hohle Röhre eine grössere Tragfähigkeit besitzt als der massive Cylinder.

Beweis. Nach Formel 7). in Antw. auf Frage 71 ist die Tragfähigkeit eines Balkens von kreisförmigem Querschnitt:

$$P = \frac{s}{32 l} \delta^3 \pi$$

Hilfsrechnungen:

1). Da nach den nebenstehenden Erörterungen

$$\delta^2 = D^2 - d^2$$

ist, und da für

$$D^4 - d^4 = (D^2 + d^2)(D^2 - d^2)$$

gesetzt werden kann, so lässt sich die nebenstehende Gleichung:

$$P : P_1 = \delta^3 : \frac{(D^4 - d^4)}{D}$$

auch schreiben:

$$P : P_1 = \delta^2 . \delta : \frac{(D^2 + d^2)(D^2 - d^2)}{D}$$

oder:

$$P : P_1 = \delta : \frac{D^2 + d^2}{D}$$

oder:

$$P : P_1 = \sqrt{D^2 - d^2} : \frac{D^2 + d^2}{D}$$

oder:

$$P : P_1 = D\sqrt{D^2 - d^2} : D^2 + d^2$$

Da ferner nach nebenstehenden Erörterungen:

$$(D - d) = \frac{D}{n} \text{ also } D = \frac{nd}{1 - n} \text{ ist,}$$

so ist auch:

$$P : P_1 = \frac{nd}{1-n}\sqrt{\frac{n^2 d^2}{(1-n)^2} - d^2} : \frac{n^2 d^2}{(1-n)^2} + d^2$$

oder:

$$P : P_1 = \frac{nd}{(1-n)^2}\sqrt{n^2 d^2 - d^2 (1-n)^2} : \frac{n^2 d^2 + d^2 (1-n)^2}{(1-n)^2}$$

oder:

$$P : P_1 = nd\sqrt{n^2 d^2 - d^2 (1-n)^2} : n^2 d^2 + d^2 (1-n)^2$$

oder:

$$P : P_1 = nd\sqrt{2d^2 n - d^2} : 2n^2 d^2 + d^2 - 2d^2 n$$

oder:

$$P : P_1 = nd^2\sqrt{(2n - 1)} : d^2 (2n^2 + 1 - 2n)$$

oder:

$$P : P_1 = n\sqrt{2n - 1} : 2n^2 - 2n + 1$$

2). Setzen wir in die soeben berechnete Gleichung für $n = 5$ ein, so ergibt sich:

$$P : P_1 = 5\sqrt{10 - 1} : 2 . 25 - 10 + 1$$

oder: $P : P_1 = 5 . 3 : 50 - 9$

oder: $P : P_1 = 15 : 41$

oder: $P : P_1 = 1 : 2{,}7$ oder $10 : 27$.

3). Setzen wir in die obige Gleichung für $n = 10$, so ist:

$$P : P_1 = 10\sqrt{20 - 1} : 2 . 100 - 20 + 1$$

oder: $P : P_1 = 10 . 4{,}36 : 200 - 19$

oder: $P : P_1 = 43{,}6 : 181$

oder nahezu:

$$P : P_1 = 10 : 42.$$

und nach Formel 3). in Antw. auf Frage 73 ist die Tragfähigkeit eines Hohlcylinders von ringförmigem Querschnitt:

$$P_1 = \frac{s\pi}{32 l} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}$$

folglich ist das Verhältnis ihrer Tragfähigkeiten

$$P : P_1 = \frac{s}{32 l} \delta^3 \pi : \frac{s\pi}{32 l} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}$$

oder:

$$P : P_1 = \delta^3 : \frac{(D^4 - d^4)}{D}$$

Die Wanddicke des Ringes ist $\frac{1}{2}(D - d)$ und jedenfalls ausdrückbar in einem Bruchteil des Halbmessers resp. Durchmessers. Nehmen wir an, diese Wanddicke betrage den n^{ten} Teil des Halbmessers, oder was dasselbe ist, sei

$$\frac{1}{2}(D - d) = \frac{\frac{1}{2}D}{n}$$

oder:

$$(D - d) = \frac{D}{n}$$

so ergibt sich mit Rücksicht darauf, dass beide Cylinder aus gleichviel Masse bestehen sollen und somit bei gleicher Länge auch gleiche Querschnittsflächen haben müssen, also

$$\frac{\delta^2 \pi}{4} = \frac{(D^2 - d^2)\pi}{4}$$

oder:

$$\delta^2 = D^2 - d^2$$

sein muss, nach nebenstehender Hilfsrechn.:

1). . $P : P_1 = n\sqrt{2n - 1} : 2n^2 - 2n + 1$

Nehmen wir nun z. B. an, dass die Wandstärke des hohlen Cylinders den 5. Teil des Halbmessers beträgt, dass also

$$(D - d) = \frac{1}{5}D \text{ oder } n = 5$$

ist, so erhalten wir aus der vorstehenden Gleichung für das Verhältnis der Tragkraft des massiven zu der des hohlen Cylinders, nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

2). . . . $P : P_1 = 10 : 27$

Nehmen wir die Wandstärke nur halb so gross, also

$$(D - d) = \frac{1}{10}D \text{ oder } n = 10$$

so ist:

3). . . . $P : P_1 = 10 : 42$

d. h. es ist in diesem Fall bei einerlei Materialaufwand die Tragfähigkeit des hohlen Cylinders über viermal so gross als die des massiven Cylinders.

Erkl. 89. Es muss bei Anwendung hohler Cylinder ein richtiges Verhältnis zwischen dem inneren und äusseren Durchmesser stattfinden, so dass die Wand nicht zu schwach wird und den erforderlichen Widerstand leisten kann; überdies muss der Cylinder genau gearbeitet sein, so dass, namentlich bei gegossenen Röhren, die Metalldicke überall dieselbe und ohne Fehlstellen ist.

Man hat sich viele Mühe gegeben, zuvörderst das beste Verhältnis des inneren Durchmessers zum äusseren für die stärkste Tragkraft hohler Cylinder zu finden. Nach *Girard* soll die relative Festigkeit am grössten sein, wenn der innere Durchmesser sich zum äusseren verhält wie 51 : 112. Indes ist dies Verhältnis weit kleiner als dasjenige, welches die Engländer praktisch in Anwendung zu bringen pflegen. *Buchanan* nimmt zu Wellen der Mühlräder hohle Cylinder, deren Durchmesser 3 und 4 sind; nach *Tredgold* aber verhält sich die relative Festigkeit eines hohlen Cylinders zu der eines massiven von gleicher Metallmasse, wie 1,7 : 1, wenn der innere Durchmesser sich zum äusseren wie 15 : 25 verhält, und wie 2 : 1, wenn $d : D = 7 : 10$ ist. Für das erstere Verhältnis beträgt die Metalldicke 0,2 der Dicke des ganzen Cylinders, für das letztere 0,15 derselben, und er hält letzteres für das Minimum, wenn das Metall noch stark genug bleiben soll, um nicht eingedrückt zu werden.

Erkl. 90. Die inneren Teile eines massiven Cylinders nehmen einen verhältnismässig geringeren Anteil als die äusseren Teile an seinem Widerstandsvermögen gegen die Biegung, weil Drehung wie Zusammendrückung zugleich mit dem Hebelarm der gespannten Fasern gegen die Mitte hin sich mindern. Durch Aushöhlung verliert daher ein Cylinder, einen keineswegs im Verhältnis zur entfernten Masse stehenden Teil seiner Widerstandskraft gegen Biegung, und wenn man z. B. die Hälfte der ganzen Masse aus dem massiven Cylinder herausbohrt, so verliert er doch nur $^1/_4$ seiner ursprünglichen Widerstandsfähigkeit. Aber aus der Masse eines vollen Cylinders lassen sich zwei Hohlcylinder von gleicher Länge und Dicke ausführen, deren Tragungsvermögen, zusammengenommen, sich zu dem des vollen Cylinders verhält wie 3 : 2. Hieraus ergeben sich höchst interessante Vergleiche in dem grossen Haushalt der Natur, wie z. B. in Betracht der röhrenförmigen Knochen der Menschen und Tiere, der Halme bei den Getreidearten u. s. w.

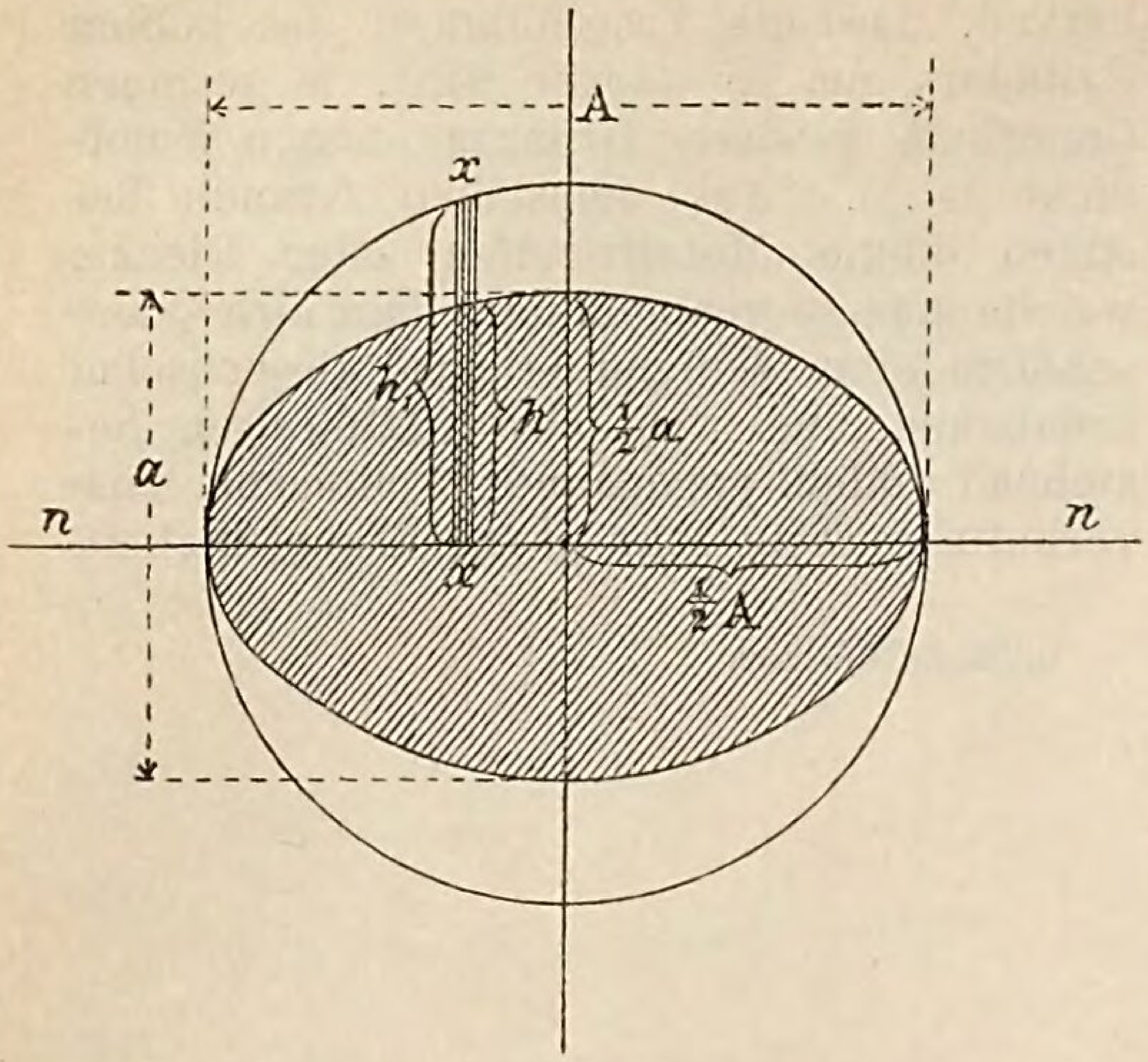
Ferner geht aus den obigen Beispielen hervor, dass die Tragfähigkeit des hohlen Cylinders um so stärker wird, je geringer (innerhalb gewisser Grenzen) dessen Wanddicke ist.[1]). Aus demselben Grunde besitzen dünne Metallstreifen oder Bleche, welche man so gebogen hat, dass ihre Querschnitte eine Wellenlinie aus abwechselnd erhabenen und vertieften Halbkreisen bestehend bilden, sogenannte Wellbleche, eine verhältnismässig sehr grosse Tragfähigkeit.

[1]). Siehe Erkl. 89.

Frage 75. Aus welcher Betrachtung ergibt sich das Trägheits- und Widerstandsmoment einer Ellipse, und wie gross ist dasselbe?

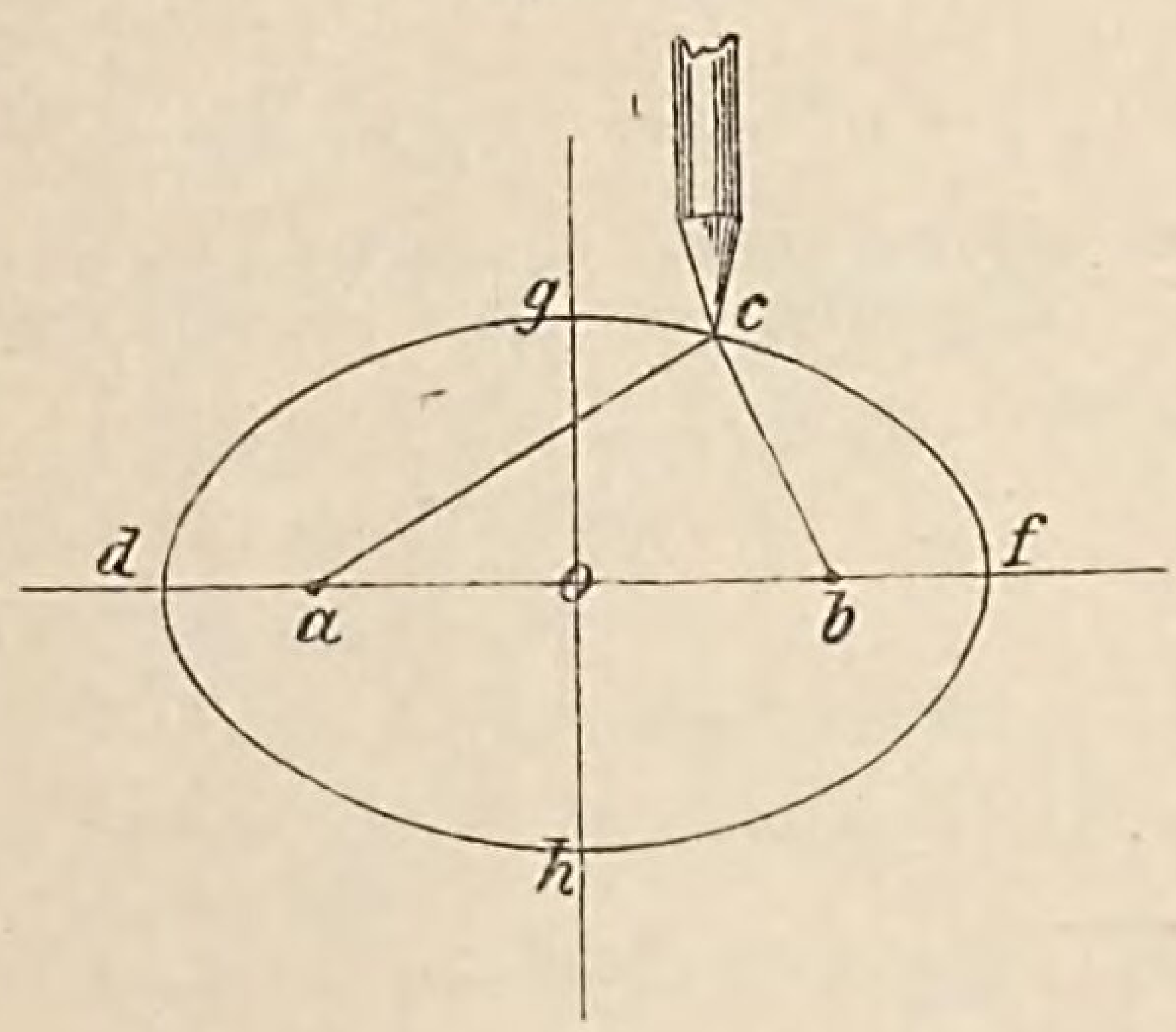
Antwort. Denkt man sich die Ellipse und den umschriebenen Kreis (siehe Fig. 78) in sehr schmale Streifen geteilt, die als Rechtecke angesehen werden können, welche die Breite x und die Höhen h und h_1

Figur 78.



Erkl. 91. Eine Ellipse ist eine in sich selbst zurücklaufende oder geschlossene krumme Linie (oder Kurve), welche die Eigenschaft hat, dass die Summe der Entfernungen jedes ihrer Punkte von zwei bestimmten innerhalb der Kurve liegenden Punkten, den Brennpunkten, eine unveränderliche oder konstante Grösse ist. Diese Eigenschaft benutzt man bei der sogenannten Fadenkonstruktion der Ellipse. Legt man nämlich einen geschlossenen Faden so auf die Zeichenfläche, dass zwei in ihr aufrecht festgesteckte Nadeln a und b (Fig 79) sich innerhalb des Fadens befinden, spannt den Faden mit der Spitze c eines Bleistifts straff und führt diesen so weiter, dass er alle bei gespanntem Faden möglichen Lagen durchläuft, so beschreibt er eine Ellipse, deren Brennpunkte die Standpunkte a und b der Nadeln sind.

Figur 79.



Die durch die Brennpunkte gelegte gerade Linie df heisst die grosse Achse, die in der Mitte zwischen den Brennpunkten senkrecht auf jener stehende Gerade gh die kleine Achse der Ellipse. Der Schnittpunkt o beider heisst der Mittelpunkt der Ellipse und halbiert die

haben, so sind deren Trägheitsmomente nach Gleichung 13)., siehe Antw. auf Frage 58).:

$$\frac{1}{3}xh^3 \text{ und } \frac{1}{3}xh_1^{\,3}$$

Die Trägheitsmomente verhalten sich also wie $h^3 : h_1^{\,3}$. Das Verhältnis der Höhen $h : h_1$ ist aber konstant $= \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}\mathrm{A} = a : \mathrm{A}$, wenn man mit a und A die resp. Achsen der Ellipse bezeichnet, und es ist demnach:

$$\Sigma\frac{1}{3}xh^3 : \Sigma\frac{1}{3}xh_1^{\,3} = a^3 : \mathrm{A}^3$$

oder das Trägheitsmoment der Ellipse verhält sich zum Trägheitsmoment des Kreises

$$\mathrm{T}_e : \mathrm{T}_k = a^3 : \mathrm{A}^3$$

nach Gleichung 1). in Antw. auf Frage 71 ist aber das Trägheitsmoment des Kreises:

$$\mathrm{T}_k = \frac{1}{64}d^4\pi$$

oder da in Fig. 78 $d = \mathrm{A}$, so ist:

$$\mathrm{T}_k = \frac{1}{64}\mathrm{A}^4\pi$$

und somit:

$$\mathrm{T}_e : \frac{1}{64}\mathrm{A}^4\pi = a^3 : \mathrm{A}^3$$

oder:

$$\mathrm{T}_e = \frac{\frac{1}{64}\mathrm{A}^4\pi \, . \, a^3}{\mathrm{A}^3}$$

oder:

1). . . . $\mathrm{T} = \frac{1}{64}\mathrm{A}\,a^3\pi \quad (= 0{,}05\,\mathrm{A}\,a^3)$

das Trägheitsmoment der Ellipse; steht dagegen die Ellipse hochkantig (siehe Erkl. 91), dann ist:

2). . . $\mathrm{T} = \frac{1}{64}\mathrm{A}^3 a\,\pi \quad (= 0{,}05\,a\,\mathrm{A}^3)$

Steht die kleine Achse a senkrecht, dann ist $\mathrm{Y} = \frac{1}{2}a$ und somit das Widerstandsmoment:

$$\mathrm{Q} = \frac{\frac{1}{64}\mathrm{A}\,a^3\pi}{\frac{1}{2}a}$$

oder:

3). . . . $\mathrm{Q} = \frac{1}{32}\mathrm{A}\,a^2\pi \quad (= 0{,}1\,\mathrm{A}\,a^2)$

Steht die grosse Achse senkrecht, dann ist $\mathrm{Y} = \frac{1}{2}\mathrm{A}$ und somit:

$$\mathrm{Q} = \frac{\frac{1}{64}a\,\mathrm{A}^3\pi}{\frac{1}{2}\mathrm{A}}$$

oder:

4). . . . $\mathrm{Q} = \frac{1}{32}a\,\mathrm{A}^2\pi$

Längen der Achsen. Die Ellipse liegt symmetrisch zu beiden Achsen, wird durch jede in zwei gleich grosse sich deckende oder kongruente Hälften, durch das Achsenkreuz in vier kongruente Teile geteilt. Die Gestalt der Ellipse hängt von dem Verhältnis ab, in welchem die Längen der Achsen zu einander stehen; je weniger sie sich von einander unterscheiden, um so näher liegen die Brennpunkte am Mittelpunkt, um so mehr ähnelt die Ellipse einem Kreis; je grösser der Längenunterschied beider Achsen ist, um so weiter liegen die Brennpunkte vom Mittelpunkt ab, um so flacher oder gestreckter ist die Ellipse, um so mehr weicht ihre Gestalt von der des Kreises ab.

Die Tragfähigkeit ist im ersteren Fall:

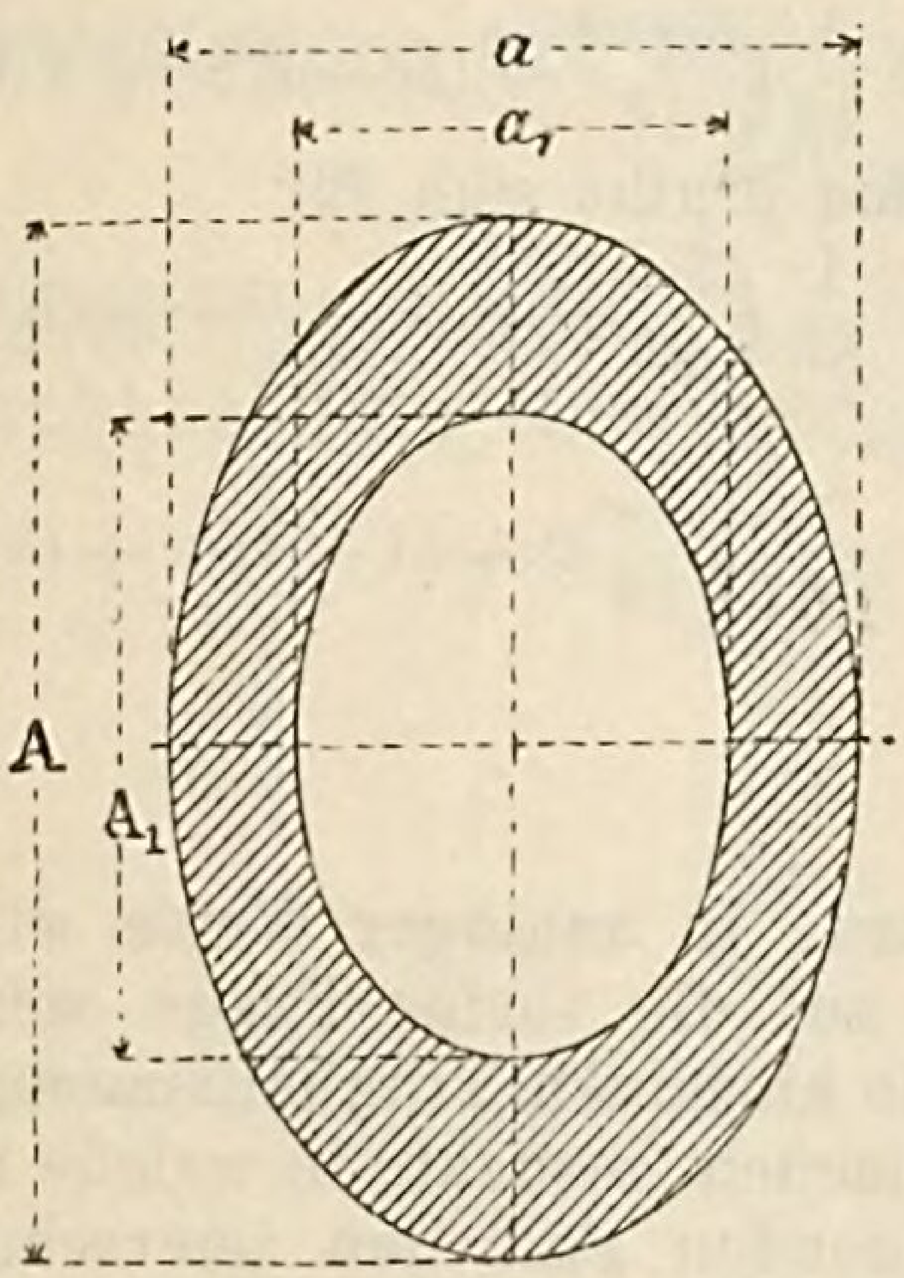
5). . . . $P = \frac{s A a^2 \pi}{32 l}$

im zweiten Fall:

6). . . . $P = \frac{s a A^2 \pi}{32 l}$

Frage 76. Wie findet man das Trägheits- und Widerstandsmoment eines Ellipsenrings und wie gross ist dasselbe?

Figur 80.



Antwort. In ganz analoger Weise wie beim Kreisring findet man auch beim Ellipsenring das Trägheitsmoment, indem man das Trägheitsmoment der kleineren Fläche, welches nach Gleichung 2). in voriger Antw. mit Bezug auf Fig. 80:

$$T_1 = \frac{1}{64} a_1 A_1^3 \pi$$

beträgt, vom Trägheitsmoment der grösseren Fläche, welches

$$T_2 = \frac{1}{64} a A^3 \pi$$

beträgt, subtrahiert. Es ergibt sich somit für das Trägheitsmoment des Ellipsenrings:

1). . . $T = \frac{1}{64} \pi \left(a A^3 - a_1 A_1^3\right)$

Der Abstand Y der äussersten Faser von der neutralen Achse beträgt $\frac{1}{2}$ A und somit ist das Widerstandsmoment:

2). . . $Q = \frac{1}{32} \pi \frac{(a A^3 - a_1 A_1^3)}{A}$

und die Tragfähigkeit:

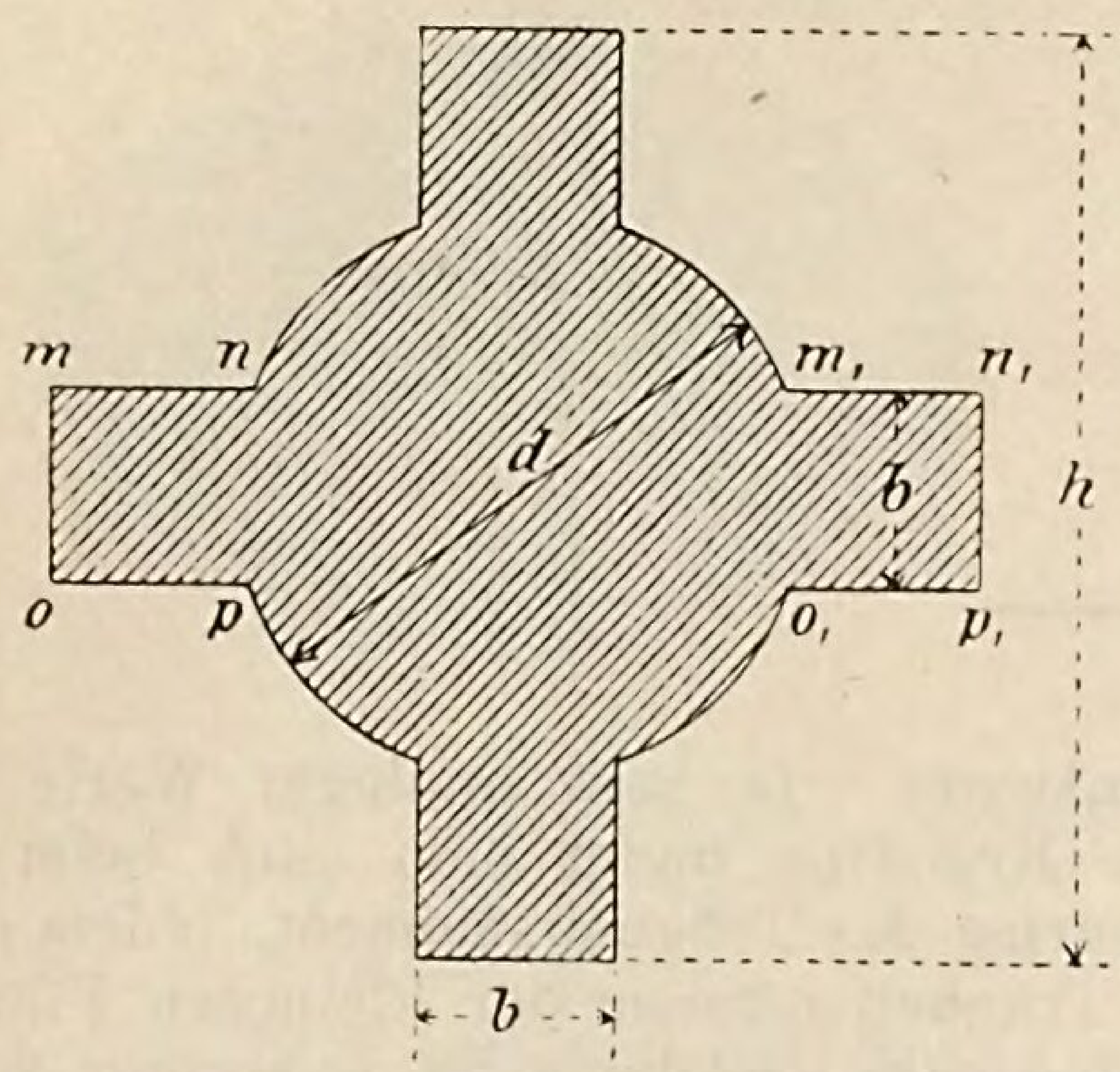
3). . . $P = \frac{s \pi}{32 l} \cdot \frac{(a A^3 - a_1 A_1^3)}{A}$

n). Trägheits- und Widerstandsmomente von Querschnittsflächen, die aus Kreisen und Rechtecken zusammengesetzt sind.

Frage 77. Wie findet man das Trägheits- und Widerstandsmoment für die gerippte Querschnittsform Fig. 81, und welche Werte ergeben sich für beide Grössen?

Antwort. Es kann das Trägheitsmoment für die in Fig. 81 dargestellte Querschnittsform aus solchen für Rechtecke und Kreis nach den bereits gegebenen Formeln abgeleitet werden. (Wobei geringe Vernachlässigungen unter gewöhnlichen Verhältnissen statthaft sind und z. B. *mnop* als ein Recht-

Figur 81.



eck angesehen werden kann, obgleich np ein Kreisbogen ist.) Das Trägheitsmoment der Kreisfläche ist nach Formel 1). in Antw. auf Frage 71 =

$$\frac{1}{64} d^4 \pi$$

Ferner ist nach Gleichung 14)., s. Antw. auf Frage 59 für das Rechteck $mnpo$ und $m_1 n_1 p_1 o_1$ das Trägheitsmoment =

$$\frac{1}{12}(h-d)\, b^3$$

und für das obere und untere Rechteck ist das Trägheitsmoment:

$$\frac{1}{12} b\, h^3 - \frac{1}{12} b\, d^3 = \frac{1}{12} b\, (h^3 - d^3)$$

Addieren wir diese drei Posten, so erhalten wir das Trägheitsmoment der gesamten Querschnittsfläche:

$$T = \frac{1}{64} d^4 \pi + \frac{1}{12}(h-d)\, b^3 + \frac{1}{12} b\, (h^3 - d^3)$$

oder $\frac{1}{12}$ als gemeinschaftlichen Nenner herausgezogen:

$$1). \; . \; T = \frac{1}{12}\left(\frac{3\pi d^4}{16} + (h-d)\, b^3 + b\, (h^3 - d)^3\right)$$

und hieraus ergibt sich für

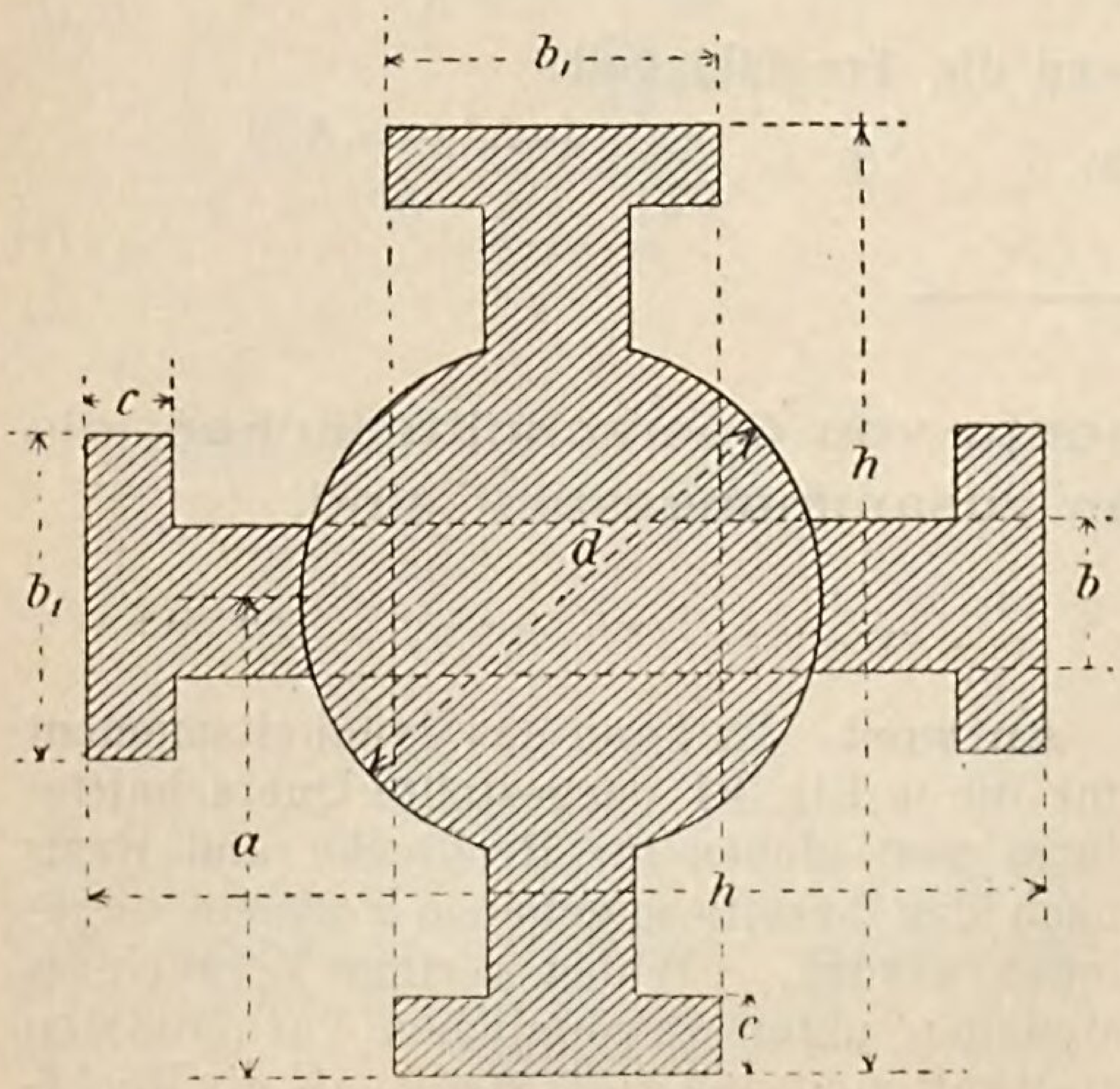
$$2). \; . \; Q = \frac{1}{6h}\left(\frac{3\pi}{16} d^4 + (h-d)\, b^3 + (h^3 - d^3)\, b\right)$$

und für

$$3). \; . \; P = \frac{s}{6hl}\left(\frac{3\pi}{16} d^4 + (h-d)\, b^3 + (h^3 - d^3)\, b\right)$$

Frage 78. Wie gross ist das Trägheits- und Widerstandsmoment für den in Fig. 82 dargestellten Kreuzquerschnitt, welcher die üblichste Form dieser Art Flügelquerschnitte zeigt?

Figur 82.



Antwort. In analoger Weise wie in der Antwort auf die vorige Frage werden zunächst die einzelnen Trägheitsmomente derjenigen Flächen gesucht, in welche man sich im vorliegenden Fall den Querschnitt zerlegt denken kann:

1). Das Trägheitsmoment der Kreisfläche vom Durchmesser d ist =

$$\frac{1}{64} \pi d^4$$

2). Das Trägheitsmoment der zwei horizontalen Flügel ohne Saumnerven =

$$\frac{1}{12}(h-d)\, b^3$$

3). Das Trägheitsmoment der Saumnerven dieser Flügel =

$$\frac{1}{12} 2c\, (b_1{}^3 - b^3)$$

4). Das Trägheitsmoment der zwei vertikalen Flügel ohne Saumnerven =

$$\frac{1}{12} b\, (h^3 - d^3)$$

5). Das Trägheitsmoment der **Saumnerven** dieser Flügel =

$$\frac{1}{12}\left(b_1 - b\right)\left(h^3 - (h - 2c)^3\right)$$

und somit ist das Trägheitsmoment des gesamten Kreuzquerschnitts

$$T = \frac{1}{64} d^4 \pi + \frac{1}{12}(h - d)\, b^3 + \frac{1}{12} 2c\,(b_1^{\,3} - b^3) + \frac{1}{12} b\,(h^3 - d^3) + \frac{1}{12}(b_1 - b)\,[h^3 - (h - 2c)^3]$$

oder wenn wir $\frac{1}{12}$ als gemeinschaftlichen Nenner herausnehmen:

$$1).\quad T = \frac{1}{12}\left(\frac{3}{16} d^4 \pi + (h - d)\, b^3 + 2c\,(b_1^{\,3} - b^3) + b\,(h^3 - d^3) + (b_1 - b)\,(6ch^2 - 12c^2h + 8c^3)\right)$$

Ferner ist $Y = \frac{1}{2} h$, folglich ist das Widerstandsmoment:

$$2).\quad Q = \frac{1}{6h}\left(0{,}589\, d^4 + (h - d)\, b^3 + 2c\,(b_1^{\,3} - b^3) + b\,(h^3 - d^3) + (b_1 - b)\,(6ch^2 - 12c^2h + 8c^3)\right)$$

c). Bestimmung der Krümmung und Senkung der elastischen Linie oder der gebogenen Mittelachse.

Frage 79. Was versteht man unter der elastischen Linie eines gebogenen Balkens?

Antwort. Unter der elastischen Linie eines gebogenen Balkens versteht man diejenige krumme Linie oder Kurve, welche das mittelste Kohäsionsband, die neutrale oder elastische Faserschicht, ohne seine Länge zu ändern, infolge der Biegung bildet, oder unter Berücksichtigung der Erkl. 65 ist die elastische Linie der geometrische Ort der Schwerpunkte aller Querschnitte des Körpers.

Frage 80. Welches Gesetz gilt von den Krümmungshalbmessern (siehe Erkl. 92) der elastischen Linie, welche Gleichung bestimmt den Krümmungsradius für einen bestimmten Punkt der elastischen Linie und aus welcher Betrachtung ergibt sich die Richtigkeit des erwähnten Gesetzes?

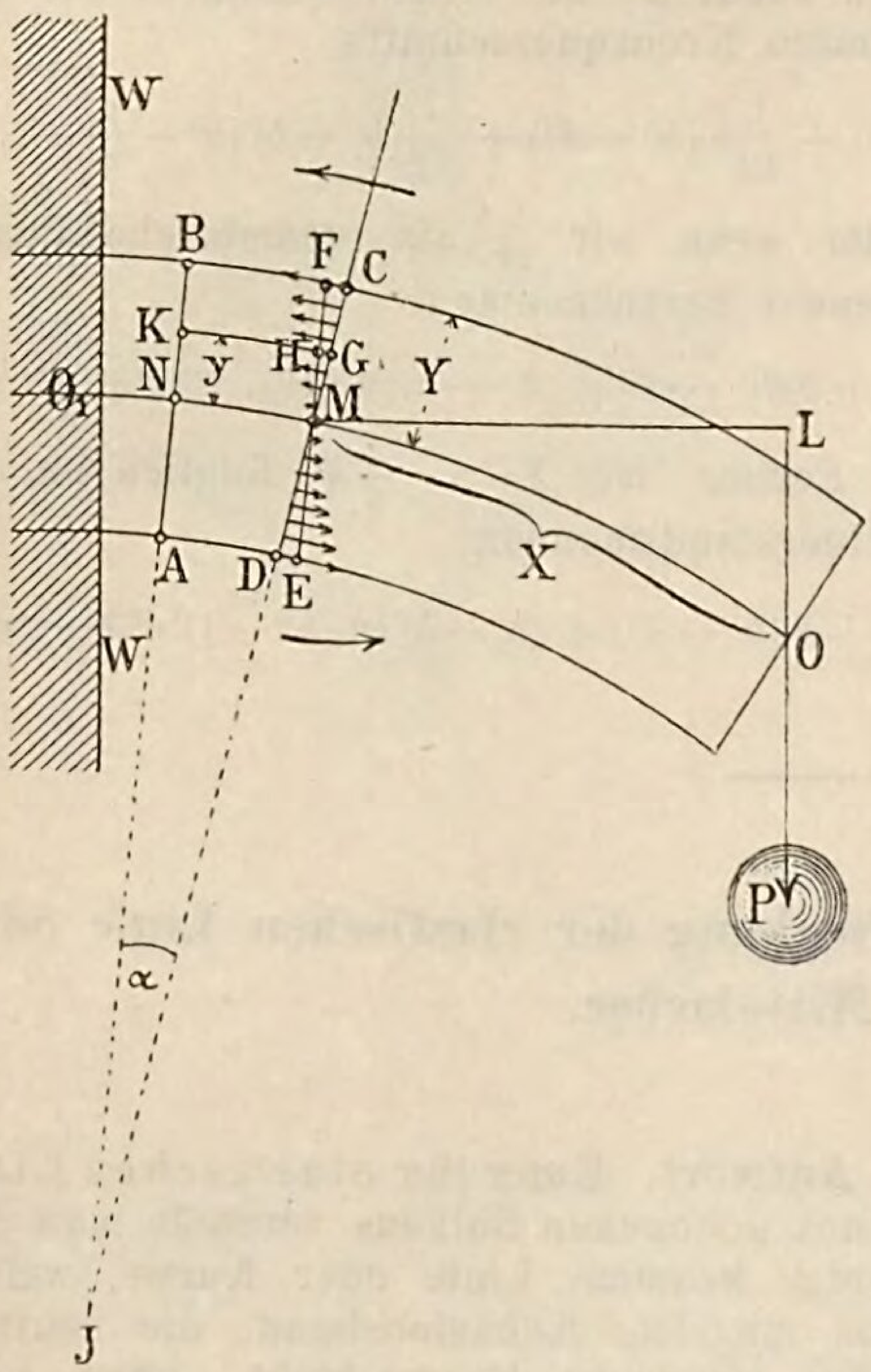
Antwort. Das Gesetz und die Gleichung, durch welche der Krümmungshalbmesser (s. Erkl. 92) für ein beliebiges Bogenstück der elastischen Linie bestimmt wird, lautet:

Für eine gegebene Belastung P sind die Krümmungshalbmesser beliebiger Bogenstücke der elastischen Linie den diesen Bogenstücken entsprechenden Hebelarmen (also den Entfernungen dieser Bogenstücke vom Aufhängepunkt der Last P) umgekehrt proportional, oder:

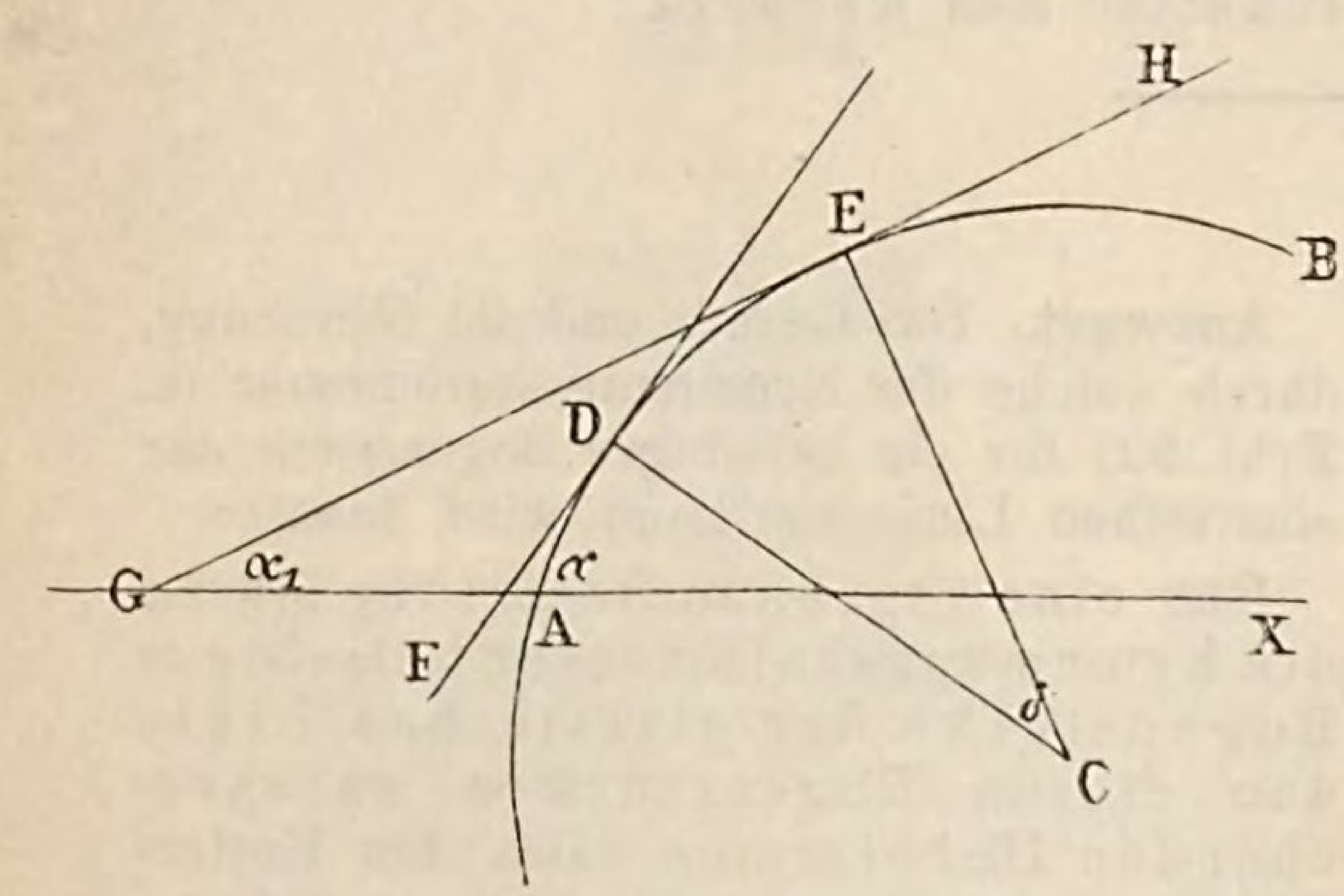
$$1) \quad \ldots\ldots \quad R = \frac{ET}{Px}$$

Zum **Beweis** der Richtigkeit des Vorstehenden diene folgende Betrachtung:

Figur 83.



Figur 84.



Die Stärke der Biegung eines prismatischen Stabes ist einerseits von der Stärke seiner Dehnung, sowie anderseits von der Stärke seiner Zusammendrückung, also von der Grösse λ abhängig, wenn wir mit λ die Dehnung oder Zusammendrückung eines Stäbchens von 1 mm Länge und 1 □mm Querschnittsfläche im Abstand 1 von dem neutralen Band bezeichnen. Dieser Wert λ, welcher der Länge des Hebelarms x proportional ist, vermindert sich vom befestigten Ende des Stabes gegen das belastete hin. Die Krümmung gleichlanger Bogenabschnitte der elastischen Linie ist folglich ungleich und zwar von der Befestigungsstelle gegen das freie Ende hin abnehmend.

Es sei nun wieder ABFE (siehe Fig. 83) ein sehr kleines Stück des Prismas, welches vor dem Eintritt der Biegnng begrenzt ist von zwei senkrecht durch die neutrale Achse geführten Querschnitten. Die Dreiecke FMC und DME lassen die infolge der Biegung bewirkten Aenderungen der Faserlänge in verschiedenen Abständen vom neutralen Band übersehen.

Die Linien $\overline{BA}$ und $\overline{FE}$ sind parallel laufend und man darf daher

$$\overline{BF} = \overline{AE} = \overline{NM}$$

setzen. Es ist somit $\overline{FC}$ die Dehnung λ_1 der Faserlänge $\overline{BF}$ im Abstand $\overline{MF} = Y$ vom neutralen Band, also $\frac{\lambda_1}{Y}$ die Dehnung im Abstand 1 und $\frac{\lambda_1}{Y.\overline{MN}}$ die Dehnung der Faserlänge 1 im Abstand 1, welche wie schon bemerkt mit λ bezeichnet werden soll, so dass

$$\text{a).} \quad \frac{\lambda_1}{Y.\overline{MN}} = \lambda$$

Es sei nun

$$\overline{NJ} = \overline{MJ} = R$$

der Krümmungshalbmesser (siehe Erkl. 92) des Bogenelements $\overline{NM}$. Da demnach in Punkt J die verlängerten Linien $\overline{BA}$ und $\overline{CD}$ zusammentreffen, da ferner $\overline{BA}$ mit $\overline{FE}$ parallel läuft, so entstehen die ähnlichen Dreiecke NJM und FMC. In diesen verhält sich:

$$\overline{FC} : \overline{FM} = \overline{NM} : R$$

daraus folgt:

$$\text{b).} \quad \frac{\overline{FC}}{\overline{FM}.\overline{NM}} \text{ oder } \frac{\lambda_1}{Y.\overline{NM}} = \frac{1}{R}$$

Wird dieser Ausdruck dem vorher unter Gleichung a). gefundenen gleichgesetzt, so folgt:

Erkl. 92. Unter dem Krümmungshalbmesser versteht man den Halbmesser desjenigen Kreises, der unter allen berührenden Kreisen mit irgend einem sehr kleinen Teil DE einer krummen Linie oder Kurve AB am innigsten zusammenfällt. Ein für vorliegende Zwecke hinreichend genauer Ausdruck für denselben lässt sich, wie folgt, auffinden:

Die Kurve AB werde auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (s. Erkl. 93) bezogen, $\overline{AX}$ sei die Abscissenachse, DF und GH die geometrischen Tangenten (s. Erkl. 94) der Punkte D und E, welche die Achse unter dem Winkel α und α_1 schneiden; ferner sei:

$$\overline{DC} = \overline{CE} = R$$

und

$$\sphericalangle DCE = \delta$$

vorausgesetzt, dass alle Winkel in Bogenmassen für den Halbmesser = 1 gegeben sind.

Setzt man die Länge von $\overline{DE} = b$, so ist:

$$b = R\delta$$

oder, weil $\delta = \alpha - \alpha_1$ sein muss:

$$b = R(\alpha - \alpha_1)$$

Hieraus erhält man für

$$R = \frac{b}{(\alpha - \alpha_1)}$$

Für diesen Ausdruck kann man aber, je nachdem die Kurve sich wendet, alllgemein setzen:

$$R = \pm \frac{b}{(\alpha - \alpha_1)}$$

(Eine genaue Formel für die Berechnung des Krümmungshalbmessers ist in *R. Klimpert*, Lehrb. d. Dynamik i. d. Abschn. v. der parabolischen Bewegung entwickelt.)

Erkl 93. Unter Koordinaten (vom latein. coordinatus = zugeordnet) versteht man Zahlengrössen, durch welche die Lage von Punkten in einer Ebene oder im Raum bestimmt wird, zu welchem Zweck für jeden Punkt 2 resp. 3 einander zugeordnet sind, d. h. zusammengehören. Will man die Lage eines Punktes beschreiben, so geht man von bekannten als festliegend angenommenen Punkten, Linien oder Flächen aus und gibt an, in welcher Entfernung und Richtung von diesen jener Punkt liegt; die hierzu nötigen Längen und Winkel, welche die Lage des Punktes bestimmen, heissen Koordinaten.

Wenn z B. in einer Ebene zwei zueinander senkrechte, unbegrenzte gerade Linien XOX und YOY, siehe Fig. 85, gezogen werden, so ist die Lage des Punktes P bestimmt, sobald man seine Entfernung von den beiden Linien, d. h. die Länge der Lote $\overline{PY_1} = \overline{OX_1}$ und $\overline{PX_1} = \overline{OY_1}$ kennt. Die beiden Lote, durch deren Längen die Lage des Punktes unzweideutig angegeben wird, heissen die Koordinaten des Punktes P. Will man nun die Lage eines Punktes im Raum bezeichnen, so legt man ein Koordinatensystem zu Grunde, welches aus drei aufeinander senkrechten Koordinatenachsen OX, OY und OZ besteht. Durch diese

c). $\lambda = \frac{1}{R}$

d. h. die Dehnung λ (und aus gleichen Gründen die Zusammendrückung) an beliebiger Stelle eines gebogenen prismatischen Stabes verhält sich umgekehrt wie der der betreffenden Stelle angehörende Krümmungshalbmesser. Da aber nach Antw. auf Frage 54 die Spannung S der Verlängerung λ_1 und dem Elasticitätsmodulus proportional, also

d). $S = E\lambda_1$

ist, so ergibt sich, wenn wir diesen Wert in Gleichung 34). einsetzen:

e). $Px = \frac{E\lambda_1 T}{Y}$

Es besteht aber zwischen der Verlängerung λ_1 der äussersten Faserschicht in Entfernung Y und der Verlängerung λ der Faserschicht im Abstand 1 die Proportion:

$$\lambda_1 : \lambda = Y : 1$$

also

$$\lambda_1 = \lambda Y$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung e)., so ist:

$$Px = \lambda E T$$

oder, da nach Gleichung c). $\lambda = \frac{1}{R}$, so ist:

f). $Px = \frac{ET}{R}$

oder, da für einen parallelepipedischen Stab nach Gleichung 14). in Antw. auf Frage 59:

$$T = \frac{1}{12} b h^3$$

so ist für diesen Fall:

$$Px = \frac{Ebh^3}{12R}$$

folglich

9). $R = \frac{Ebh^3}{12Px}$

In dieser Gleichung kann x die horizontale Entfernung eines beliebigen Punktes der elastischen Linie, vom Anhängepunkt O der Last bis zum Befestigungspunkt O_1 bedeuten. Jedoch müssen diese Längen vom Punkt O aus gemessen werden. Es ist daher bequemer zu setzen:

h). $R = \frac{Ebh^3}{12P(l - x_1)}$

wo dann x_1 eine vom Punkt O_1 aus bestimmte horizontale Entfernung vorstellt, z. B. für das Bogenstück $\overline{NM}$ ist

$$x_1 = \overline{O_1 N}$$

und

$$l - x_1 = \overline{ML}$$

Achsen werden drei zu einander senkrechte Ebenen, die Koordinatenebenen, festgelegt, siehe Fig. 86, nämlich durch $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$ die Ebene XOY, durch $\overline{OY}$ und $\overline{OZ}$ die Ebene YOZ und durch $\overline{OZ}$ und $\overline{OX}$ die Ebene ZOX.

Ist nun ein Punkt P im Raum durch seine Koordinaten zu bezeichnen, so fällt man von ihm aus das Lot $\overline{PR}$ auf die XY-Ebene; ist die Länge desselben, nebst den Koordinaten $\overline{RY}$ und $\overline{RX}$ des Fusspunkts R bekannt, so ist damit die Lage von Punkt P unzweifelhaft bestimmt. $\overline{RX}$, $\overline{RY}$ und $\overline{PR}$ sind also die Koordinaten des Punktes P, oder da $\overline{RX} = \overline{PT}$ und $\overline{RY} = \overline{PS}$, so kann man sagen:

die rechtwinkligen Raum-Koordinaten eines Punktes sind seine Entfernungen von den drei Koordinatenebenen.

Bei Anwendung eines Koordinaten-Systems nennt man die auf der OX-Achse senkrecht stehenden Linien bezw. die Masszahlen, welche ihre Längen angeben, wie z. B. in Fig. 85 die Linie $\overline{PX_1}$, Ordinaten (vom lat. ordĭnis, die Reihe, Ordnung), während die durch die Ordinaten auf der OX-Achse abgeschnittenen Stücke bezw. deren Masszahlen, wie z. B. in Fig. 85 die Linie $\overline{OX_1}$ die Abscissen (vom lat. abscindĕre, abschneiden, trennen) der ihnen zugehörigen Punkte genannt werden. Durch zwei solcher Längen oder durch Ordinate und Abscisse ist die Lage des entsprechenden Punktes unzweideutig angegeben. Da auf der OX-Achse die Abscissen der Punkte gemessen werden, so heisst diese Linie auch Abscissenachse; aus entsprechenden Gründen heisst die Linie OY die Ordinatenachse.

Erkl. 94. Unter Tangente oder Berührungslinie (lat. linea tangens) versteht man jede Gerade, welche die Kreislinie in einem Punkt äusserlich berührt oder streift, ohne sie zu schneiden; sie hat nur den Berührungs- oder Tangierungspunkt mit der Peripherie gemein und liegt ganz ausserhalb des Kreises (Wagenrad und Weg, Rolle und Schnur).

Erkl. 95. Da das für irgend einen bestimmten prismatischen Balken in allen seinen Querschnitten konstante Biegungselement

$$ET = Px R$$

zugleich das Mass für dessen Steifheit (Steifigkeit) bildet, so lassen sich durch Vergleichung der bloss von der Form des Balkens abhängigen Grösse T die vorteilhaftesten, d. i. jene Querschnitte finden, für welche der Balken bei gleichem Aufwand an Material die grösste Steifheit erhält.

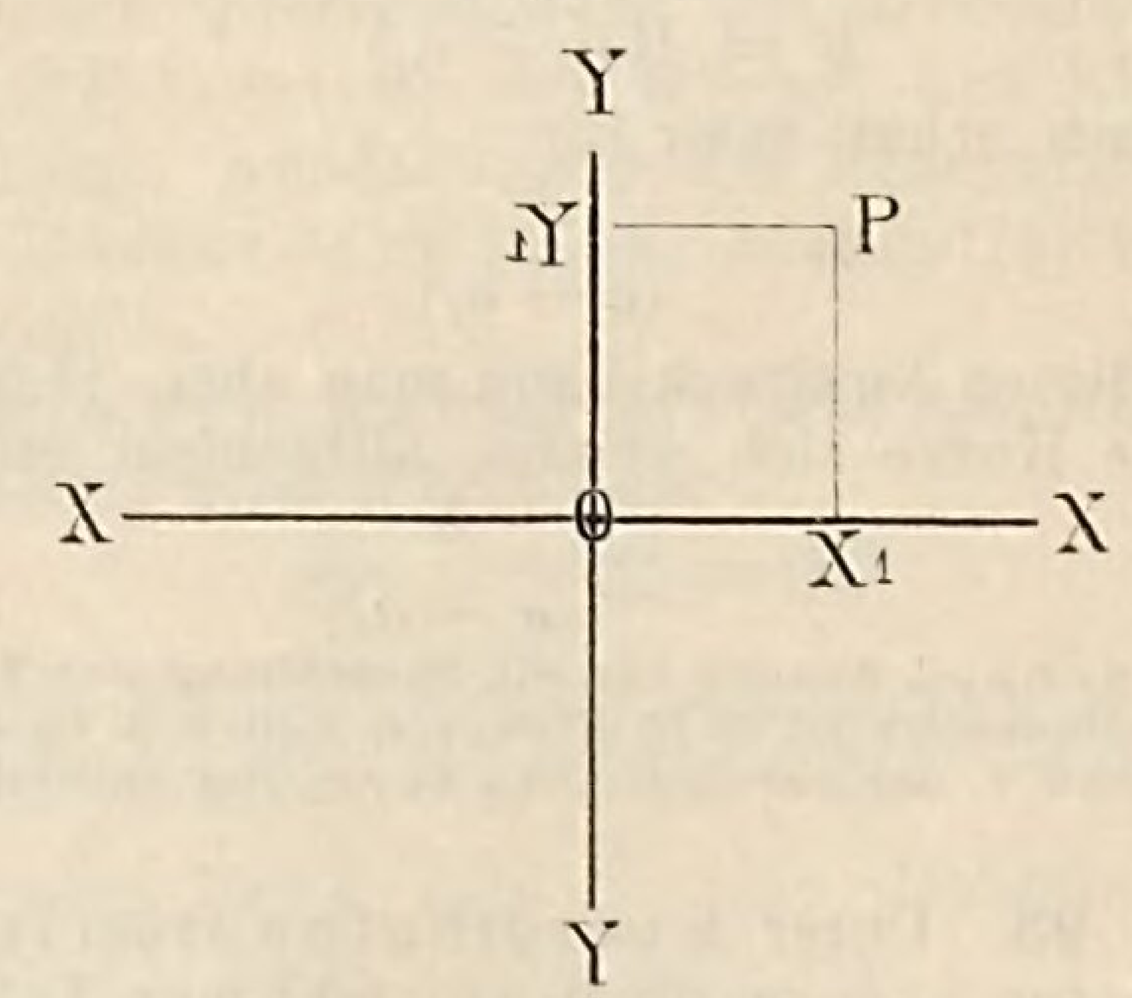
So ist, um nur ein Beispiel anzuführen, für einen Balken von rechteckigem und einem (aus derselben Materie bestehenden) von dreieckigem Querschnitt beziehungsweise

Der Ausdruck ET, das Moment des elastischen Widerstands, auch häufig Biegungsmoment genannt, ist für einen prismatischen Stab von gegebenem Stoff und gegebener Querschnittsfläche eine unveränderliche Grösse. Da nun nach Gleichung f).:

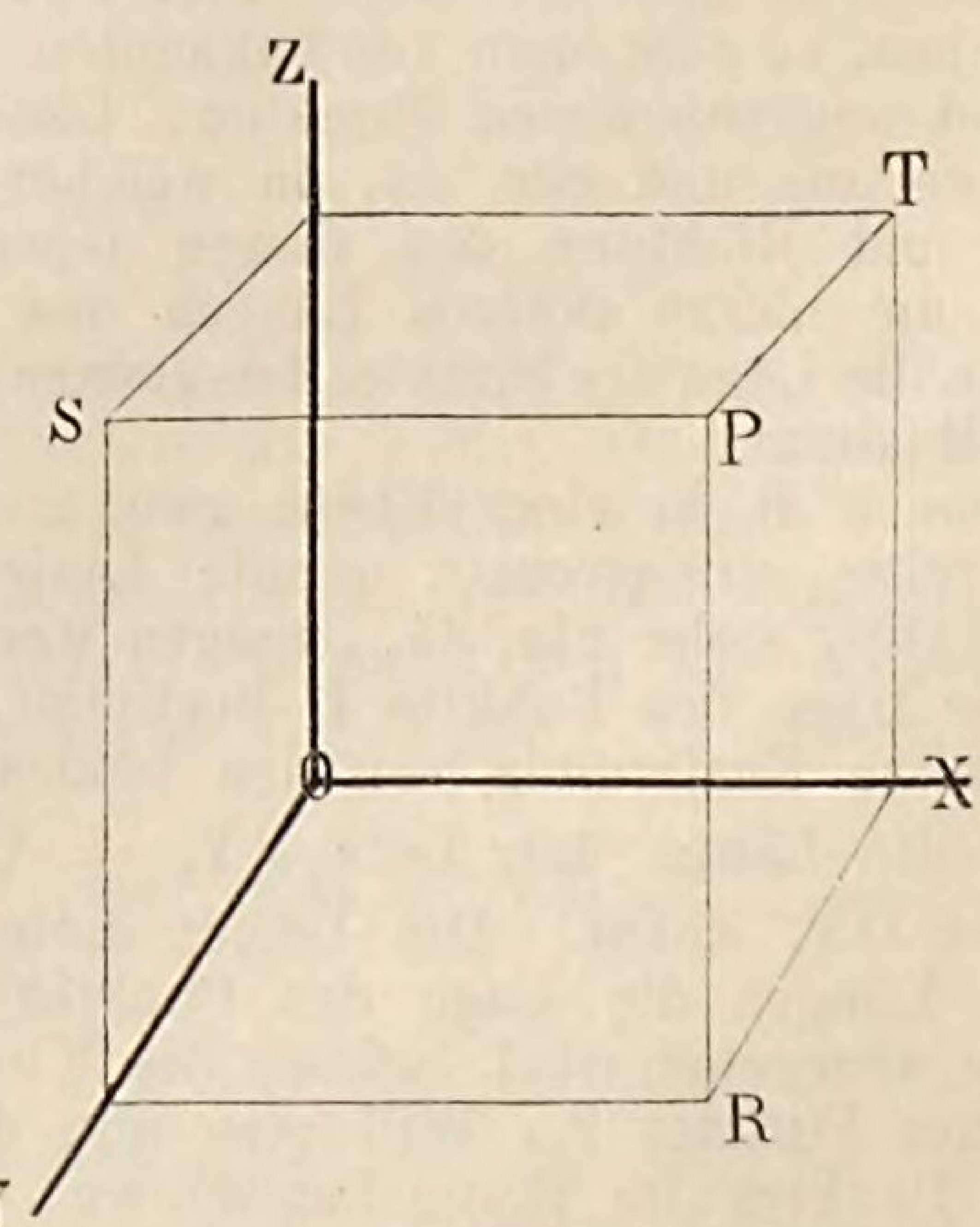
i). $PxR = ET$

ist, so folgt daraus, dass auch das Produkt PxR bezogen auf jeden beliebigen Querschnitt des belasteten Prismas eine unveränderliche Grösse oder eine Konstante (vom lat. constāre = bestehen) ist. Für eine gegebene Belastung P sind folglich die Krümmungshalbmesser beliebiger Bogenstücke der elastischen Linie deren Hebelarmen umgekehrt proportional.

Figur 85.



Figur 86.



$$T = \frac{1}{12} b h^3$$

und $$T_1 = \frac{1}{36} b h^3$$

es verhalten sich also die Steifigkeiten beider Balken wie

$$T : T_1 = \frac{1}{12} : \frac{1}{36} = 3 : 1$$

während sich der Materialaufwand bei gleicher Länge blos wie

$$b h : \frac{1}{2} b h = 2 : 1$$

verhält, so, dass also die Verwendung des Balkens von rechteckigem Querschnitt vorteilhafter ist.

Aehnliche Vergleiche, wie die in Antw. auf Frage 71 zwischen massiven und hohlen Cylindern, lassen sich auch hier in Beziehung auf die Biegungsfestigkeit vornehmen, und es führen diese wieder zu ähnlichen Resultaten wie dort, indem auch hier die Steifheit, welche wie die vierte Potenz des Durchmessers wächst, bei gleichem Materialaufwand zu Gunsten der hohlen Cylinder oder Röhren, sowie überhaupt der hohlen oder gerippten Körper ausfällt.

Frage 81. Was ist aus der in Antwort der vorigen Frage entwickelten Gleichung:

$$R = \frac{ET}{Px}$$

ersichtlich?

Antwort. Aus der Gleichung:

$$R = \frac{ET}{Px}$$

ist ersichtlich, dass der Krümmungsradius R im umgekehrten Verhältnis mit dem Hebelarm x der Kraft (oder was dasselbe sagt, mit der Spannung) zu- und abnimmt, d. h. je grösser der Hebelarm (oder die Spannung), um so kleiner ist der Krümmungshalbmesser und umgekehrt. Die Krümmung der elastischen Linie ist somit am äussersten freien Ende am schwächsten und an der Befestigungsstelle, der Bruchstelle oder dem gefährlichen Querschnitt am stärksten.

Frage 82. Wie lautet die sogenannte Gleichung der elastischen Linie, welche als solche ganz besonders die Krümmung und Senkung derselben bestimmt und aus welcher Betrachtung ergibt sich dieselbe?

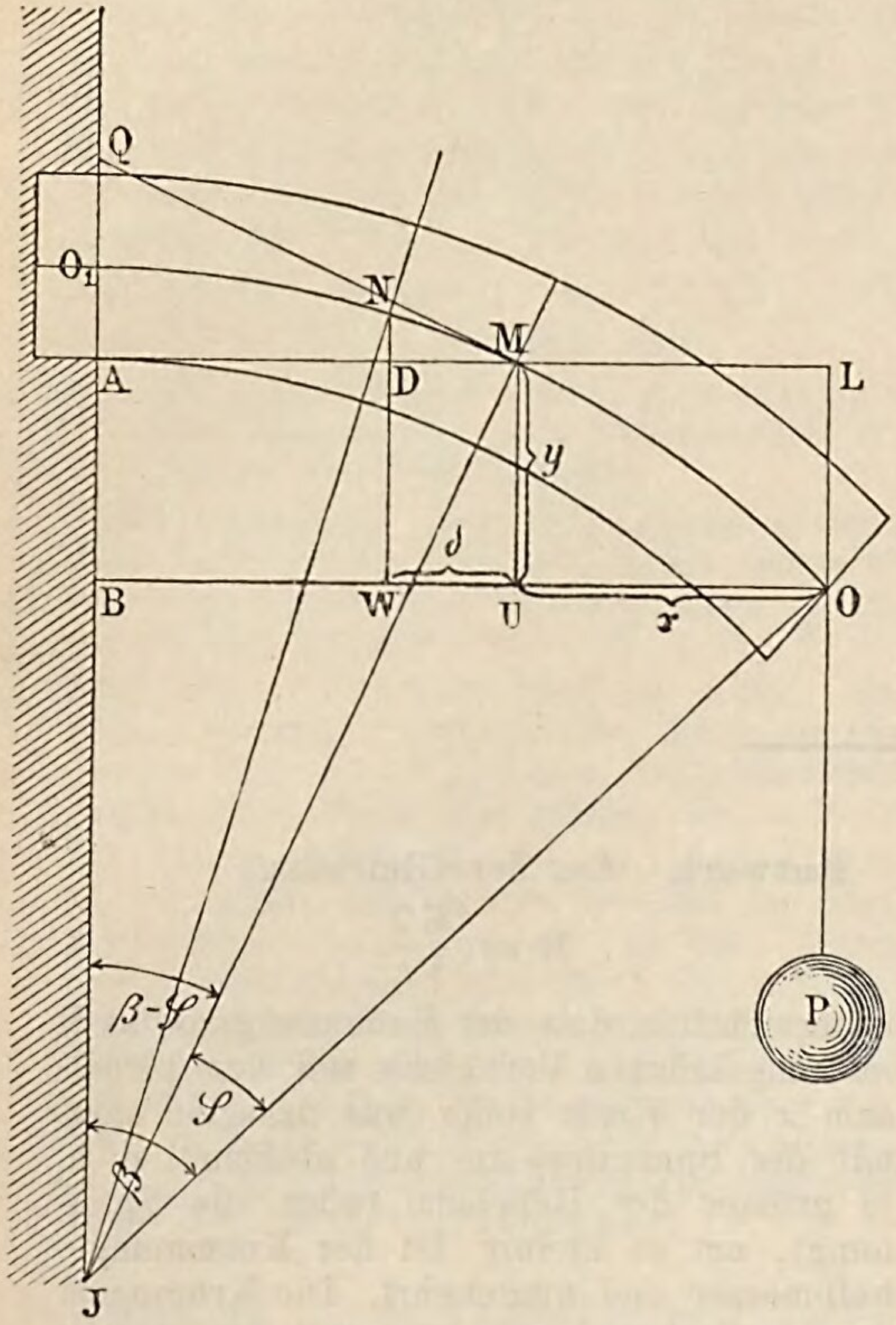
Antwort. Bezeichnet y die Ordinate irgend eines Punktes der elastischen Linie und x dessen Abscisse (s. Erkl. 93), so lautet die Gleichung der elastischen Linie, durch welche ganz besonders die Krümmung und Senkung derselben bestimmt wird:

$$1). \quad \ldots \quad y = \frac{1}{6} \cdot \frac{Px}{ET} \left(3l^2 - x^2\right)$$

Diese Gleichung ergibt sich aus folgender Betrachtung:

In Fig. 87 sei $\overline{NM}$ wieder ein verschwindend kleines Stück der elastischen Linie $\overline{O_1O}$, dessen Krümmungshalbmesser:

Figur 87.



$$\overline{JN} = \overline{JM} = R$$

ist. Wir betrachten $\overline{NM}$ als ein überaus kleines Bruckstück des Bogens $\overline{MO}$, welchem der Hebelarm $\overline{ML} = x$ zugehört. Die Linie $\overline{ML}$ wird bis nach A verlängert und parallel dazu die Gerade $\overline{OB}$ und senkrecht zu $\overline{OB}$ die Linien MU, NW und QJ gezeichnet. Die Senkung des Bogens $\overline{MO}$ entspricht nun dem Lot $\overline{MU} = y$ und die Senkung des sehr kleinen Bogenstückchens NM dem Lot $\overline{ND}$, welch letzteres also gleichfalls als ein überaus kleines Bruckstück von $\overline{MU} = y$ angesehen werden kann. Aus demselben Grunde kann man die Projektion (s. Erkl. 96) des sehr kleinen Bogenstücks $\overline{NM}$ auf die wagerechte Linie $\overline{AL}$, nämlich $\overline{MD}$ als ein sehr kleines Teilchen $= \delta$ der Abscisse x (s. Erkl. 93) betrachten. Man ziehe nun von M aus zu dem Bogenelement MN die Tangente (s. Erkl. 94) $\overline{MQ}$; diese schneidet die Linie $\overline{JQ}$ in Q und bildet dadurch das rechtwinklige Dreieck QMJ, welches dem Dreieck QMA ähnlich ist, denn beide haben den Winkel bei Q gemeinschaftlich, folglich müssen auch je die dritten Winkel beider Dreiecke, nämlich $\measuredangle$ QMA und $\measuredangle$ QJM einander gleich sein.

Wird nun Winkel QJO in Teilen des Halbmessers ausgedrückt mit β und Winkel MJO mit φ, so ist:

$$\measuredangle QMA = \measuredangle QJM = \beta - \varphi$$

und

$\measuredangle$ NJM ein unendlich kleines Teilchen, wir wollen sagen $\frac{1}{\text{Millionstel}}$ oder $\frac{1}{m}$ des Winkels φ oder

$$\measuredangle NJM = \frac{\varphi}{m}$$

Das Bogenelement $\overline{MN}$ lässt sich als Element eines Kreises betrachten, dem $\overline{NJ} = R$ als Halbmesser angehört. Es ist daher

$$\overline{MN} = R \cdot \frac{\varphi}{m} \quad \text{(siehe Erkl. 97)}$$

Setzen wir hier aber statt R den in der Antwort auf Frage 80 gefundenen Wert für R aus Gleichung 1).:

$$R = \frac{ET}{Px}$$

ein, so ist:

$$\text{a).} \quad \overline{MN} = \frac{ET \cdot \frac{\varphi}{m}}{Px}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Biegung des Stabes nur sehr gering sei, müssen die Krümmungshalbmesser R sehr gross, folglich Winkel β und $\beta - \varphi$ sehr klein sein.

Erkl. 96. Projektion (vom lat. projectio, das Hervorwerfen) ist die Darstellung oder Zeichnung der scheinbaren Lage und Gestalt eines Gegenstandes. Wenn man z. B. von den beiden Endpunkten einer Geraden, oder von allen Punkten des Umfangs einer beliebig begrenzten Figur senkrechte Linien auf eine ausser jener Linie resp. Figur liegende Ebene fällt, so heisst die auf der Ebene durch die Fusspunkte der Lote gebildete Linie resp. Figur, die Projektion der zuerst gegebenen Linie resp. Figur.

Erkl. 97. Für die Tabellen der trigonometrischen Funktionen (Sinus, Tangente etc.) ist bekanntlich der in Grade, Minuten und Sekunden eingeteilte Quadrant als Winkeleinheit angenommen; in der Mechanik kommen aber sehr oft Uebergänge von den Kreisbogen auf die ihnen entsprechenden Winkel und umgekehrt von diesen auf jene vor, weshalb es hier für die Einfachheit der Ausdrücke notwendig wird, eine einfachere Bezeichnung zwischen der Bogenlänge, dem Halbmesser und dem entsprechenden Winkel festzustellen, als diejenige, nach welcher der Bogen durch

$$b = \frac{2 r \alpha . \pi}{360}$$

bezeichnet wird, wenn r den Radius und α den zum Bogen gehörigen Mittelpunktswinkel bezeichnet.

Da sich für gleiche Halbmesser r die Bogenlängen b und b_1 wie die entsprechenden Winkel α und α_1 verhalten, und die Bogen b und b_1, die demselben Winkel α_1 entsprechen, aber verschiedenen Kreisen angehören, wie die Halbmesser r und r_1 derselben, so hat man:

$$b : b_1 = \alpha : \alpha_1$$

$$b : b_1 = r : r_1$$

und demnach auch:

$$b : b_1 = \alpha r : \alpha_1 r_1$$

Da nun b und r auf die allgemeine Längeneinheit bezogen sind, so wird man noch für die Winkeleinheit eine passende Annahme treffen dürfen, und es ist offenbar am einfachsten, denjenigen Winkel α_1, dessen Bogen b_1 dem Halbmesser r_1 gleich ist, als Einheit für das Winkelmass anzunehmen; denn man hat dann einfach:

$$b : 1 = r\alpha : 1; \quad b = r\alpha; \quad \alpha = \frac{b}{r}$$

der Bogen wird dann durch das Produkt aus dem Halbmesser in den Winkel, und dieser durch den Quotienten aus dem Bogen durch den Halbmesser ausgedrückt.

Nach dieser Winkeleinheit wird der rechte Winkel durch $\frac{1}{2}\pi$, ein Winkel von 30^0 durch $\frac{1}{6}\pi$ u. s. f. gemessen.

Erkl. 98. Denken wir uns eine unendliche Menge kleiner Streifchen nebeneinander geordnet, deren erstes eine sehr kleine Ausdehnung 1δ, das zweite aber 2δ, das dritte 3δ und das letzte $n\delta = x$ gross ist, so dass die sehr kleinen Dicken sämtlicher die Länge x geben, so kann man die Summe aller dieser Grössen geometrisch durch ein rechtwinkliges Dreieck darstellen, dessen beide Katheten $= x$ und dessen Flächeninhalt somit

$$\frac{1}{2}x . x = \frac{1}{2}x^2$$

beträgt.

Die Linien $\overline{NM}$ und $\overline{DM}$ unterscheiden sich in diesem Fall durch keinen, im Vergleich zu ihrer eigenen sehr kleinen Grösse noch in Betracht kommenden Wert, und man kann deshalb $\overline{DM} = \delta$ mit $\overline{NM}$ vertauschen, also auch

$$\overline{NM} = \delta$$

setzen. Hierdurch verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$\text{b). } \ldots \quad \delta x = \frac{ET}{P} \cdot \frac{\varphi}{m}$$

Denkt man sich jetzt die Grösse $UO = x$ als eine Veränderliche aus sehr vielen Stückchen von der Länge $WU = \delta$ bestehend, so wird sich die Krümmung der zu dieser veränderlichen Projektion x gehörigen Bogenstücke berechnen lassen, wenn man in die Gleichung b). für x aufeinanderfolgend 1δ, 2δ, $3\delta \ldots n\delta$ setzt, so dass man unter Berücksichtigung, dass die Summe sämtlicher zu x gehörigen Winkelteilchen $\frac{\varphi}{m}$ den Winkel φ gibt, erhält

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{ET}{P} \cdot \varphi \quad \text{(siehe Erkl. 98)}$$

und hieraus:

$$\text{c). } \ldots \quad \varphi = \frac{Px^2}{2ET}$$

Nimmt man $x = l$ an, so wird $\varphi = \beta$ und man erhält:

$$\text{d). } \ldots \quad \beta = \frac{Pl^2}{2ET}$$

Hieraus ergibt sich die Grösse des Winkels QJM oder der Unterschied

$$\text{e). } \ldots \quad \beta - \varphi = \frac{P}{2ET}\left(l^2 - x^2\right)$$

Dieser Unterschied kann aber noch in anderer Weise ausgedrückt werden, indem schon oben bemerkt wurde, dass

$$\sphericalangle QMA = \sphericalangle QJM = \beta - \varphi$$

und indem man berücksichtigt, dass die Linie $\overline{MN}$ als Bogenelement ganz mit der Linie $\overline{MQ}$, der Tangente des Punktes M, zusammenfällt. Hieraus folgt, dass

$$\frac{\overline{ND}}{\overline{DM}} \text{ oder } \frac{\overline{ND}}{\delta} = \operatorname{tg}(\beta - \varphi)$$

Nun darf aber mit Rücksicht auf die Kleinheit des Bogens

$$\operatorname{tg}(\beta - \varphi) = \beta - \varphi$$

folglich

$$\frac{\overline{ND}}{\delta} = \beta - \varphi$$

gesetzt werden.

Erkl. 99. Dass $\delta . x^2$ im vorliegenden Fall $\frac{1}{3}x^3$ gibt, lässt sich in ähnlicher Weise wie in Erkl. 98 für

$$\delta x = \frac{1}{2}x^2$$

bewiesen wurde, durch geometrische Konstruktion darthun. Denken wir uns x von 1δ, 2δ, 3δ ... bis $n\delta$ wachsend, so haben wir uns für x^2 eine unendlich grosse Menge unendlich dünner quadratischer Platten aufeinandergeschichtet zu denken, deren oberste $= \delta^2$, deren zweite $= (2\delta)^2$ und deren unterste $= (n\delta)^2$ Inhalt hat. Durch regelrechtes Aufeinanderschichten dieser Platten entsteht somit eine Pyramide von der Höhe x, welche gleich der Summe der Dicken sämtlicher Platten ist und zur Grundfläche ein Quadrat von der Kantenlänge $n\delta = x$ besitzt; das Volumen dieser Pyramide ist aber

$$\frac{1}{3}x^2 . x = \frac{1}{3}x^3$$

und veranschaulicht das Produkt δx^2.

Wenn man diesen Wert von $\beta - \varphi$ dem vorher bestimmten gleichsetzt, so ergibt sich:

$$\frac{\overline{ND}}{\delta} = \frac{P}{2ET}(l^2 - x^2)$$

oder:

$$\overline{ND} = \frac{P}{2ET}\delta(l^2 - x^2)$$

Wird hier nochmals δ, 2δ, 3δ ... $n\delta$ für x gesetzt, so ist der linke Teil der Gleichung die Summe aller $\overline{ND}$, gleich der Ordinate $\overline{MU} = y$, während die Summe aller δ oder $n\delta = x$, also

$$y = \frac{P}{2ET}\left(l^2 x - \frac{1}{3}x^3\right) \quad \text{(s. Erkl. 99)}$$

oder:

$$y = \frac{1}{6} \cdot \frac{Px}{ET}(3l^2 - x^2)$$

Frage 83. Was versteht man unter dem Pfeil der Biegung?

Antwort. Unter dem Pfeil der Biegung versteht man die grösste Senkung am äusseren freien Ende eines auf Biegung in Anspruch genommenen Balkens, oder seine Endsenkung.

Frage 84. Wie lautet das Gesetz über den Pfeil der Biegung in Wort und Formel, und woraus folgt dessen Richtigkeit?

Erkl. 100. Nach dem nebenstehenden Gesetz haben Länge und Dicke, beide in entgegengesetztem Sinn wirkend, einen weit grösseren Einfluss als die Breite. Derselbe Stab im Sinne von h oder von b gebogen, widersteht nach dem Verhältnis $b^2 : h^2$, denn wenn ein und derselbe Stab bei einem rechteckigen Querschnitt von z. B. 3 und 5 cm Kante so gelegt wird, dass $h = 3$ und $b = 5$ ist, so beträgt der Pfeil der Biegung

$$s_1 = \frac{4Pl^3}{E . 5 . 27}$$

wird dagegen derselbe Stab hochkantig genommen und mit demselben Gewicht wie vorher belastet, so ist der Pfeil der Biegung:

$$s_2 = \frac{4Pl^3}{E . 3 . 125}$$

also das Verhältnis

$$s_1 : s_2 = \frac{1}{5 . 27} : \frac{1}{3 . 125}$$

oder:

$$s_1 : s_2 = 25 : 9$$

oder:

$$s_1 : s_2 = b^2 : h^2$$

Antwort. Der Pfeil der Biegung ist für einen prismatischen Stab innerhalb der Elasticitätsgrenze der Last und der dritten Potenz der Länge direkt, dem Elasticitätsmodulus, der Breite und der dritten Potenz der Höhe umgekehrt proportional (siehe Erkl. 100), oder wenn man den Pfeil der Biegung mit s bezeichnet, so ist

$$1). \quad \ldots \quad s = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{ET}$$

oder, da für einen Stab von rechteckigem Querschnitt

$$T = \frac{1}{12}bh^3 \quad \text{(s. Gleichung 42 in Erkl. 78)}$$

ist, so ist:

$$2). \quad \ldots \quad s = 4 \cdot \frac{Pl^3}{Ebh^3}$$

Man braucht nur in Gleichung 1). in Antwort auf Frage 82 für x die ganze Balkenlänge l und für die grösste Senkung s einzusetzen, so erhält man:

$$s = \frac{1}{6} \cdot \frac{Pl}{ET}(3l^2 - l^2)$$

oder:

Erkl. 101. Zur experimentellen Untersuchung des nebenstehenden Gesetzes kann man mit Hilfe des Kathetometers (siehe das Lehrbuch der allgemeinen Eigenschaften der Körper) die Länge feststellen, um welche das belastete Ende aus der horizontalen Lage herabsinkt und wird so finden, dass der Pfeil der Biegung dem biegenden Gewicht proportional ist und dass die bei der Biegung auftretende Elasticität der Biegung proportional ist. Letzteres ist auch dann der Fall, wenn der Stab in anderer als der oben vorausgesetzten Weise befestigt ist, wenn er an beiden Enden festgeklemmt oder nur aufgelegt, oder wenn er an einem Ende festgeklemmt und an dem anderen aufgelegt ist. Es folgt daraus nach den Gesetzen der Pendelschwingungen, dass auch in diesem Fall der Stab isochrone Schwingungen um seine Gleichgewichtslage macht, wenn man ihn aus derselben bringt und dann sich selbst überlässt; wir werden diese Schwingungen an einer anderen Stelle genauer betrachten.

$$s = \frac{1}{6} \cdot \frac{Pl}{ET} \cdot 2l^2$$

oder:

$$s = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{ET}$$

Frage 85. Was folgt aus der letzten Gleichung?

Antwort. Aus der letzten Gleichung folgt

$$1). \quad \ldots \quad E = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{sT}$$

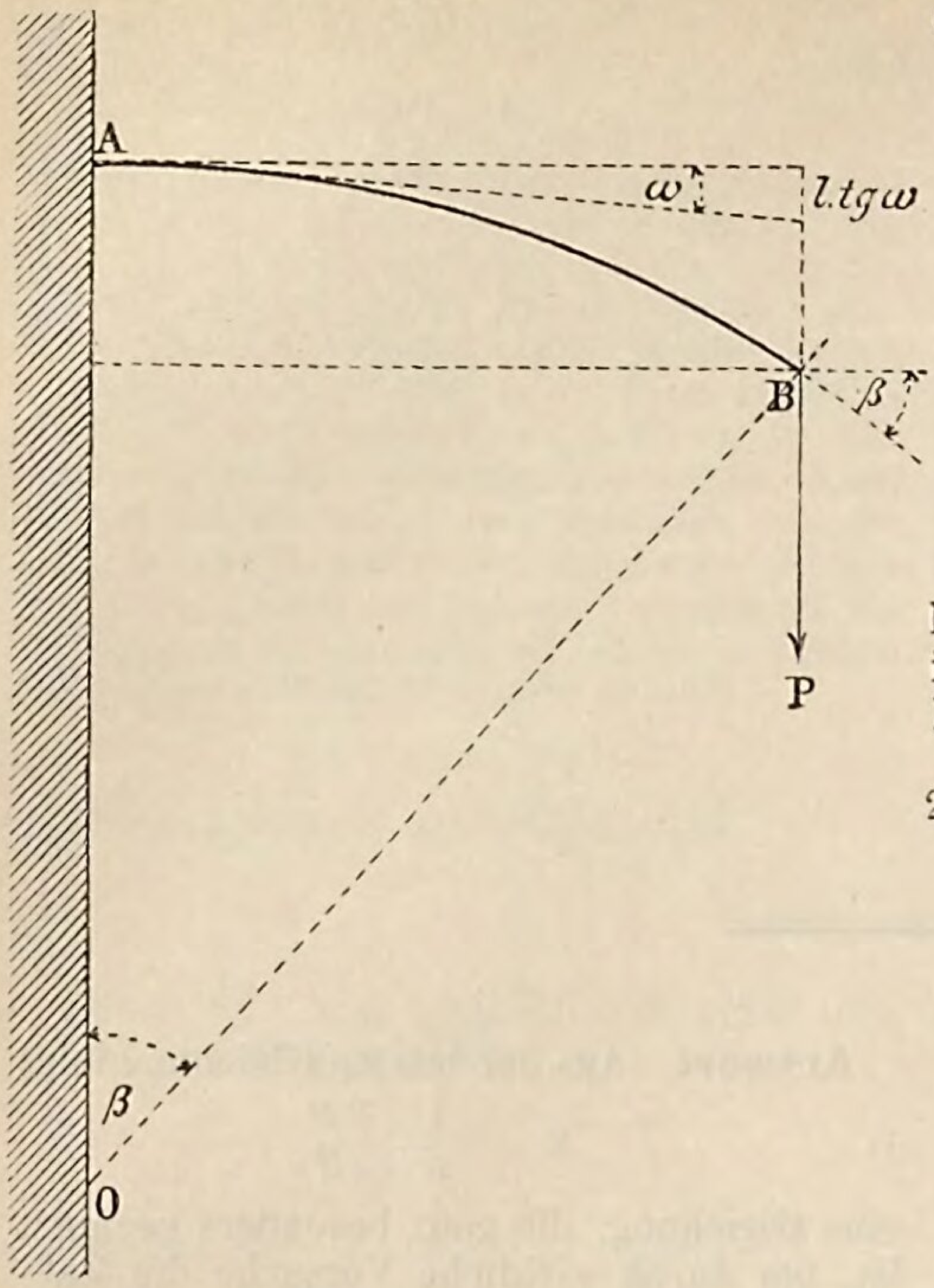
eine Gleichung, die ganz besonders geeignet ist, um durch wirkliche Versuche die Zahlenwerte des Elasticitätsmodulus für die verschiedenen Materialien zu bestimmen, oder auch, wenn für eine gestattete Senkung s die entsprechende Last gesucht wird:

$$2). \quad \ldots \quad P = \frac{3EsT}{l^3}$$

Frage 86. Was ist über den Neigungswinkel, sowie über den Pfeil der Biegung zu bemerken, für den Fall, dass der Balken, anstatt in horizontaler Lage, in einer um einen sehr kleinen Winkel nach unten hin von der horizontalen abweichenden Lage eingespannt ist?

Antwort. Wenn der Balken an der Befestigungsstelle anstatt in horizontaler Lage in einer um den sehr kleinen Winkel ω nach unten hin von der horizontalen abweichenden Lage eingespannt ist, so kann der Neigungswinkel β am Ende B (Fig. 88), welcher immer dem Winkel gleich ist, den der Krümmungshalbmesser $\overline{BO}$ mit der Vertikalen $\overline{AO}$ einschliesst, angesehen werden als zusammengesetzt aus zwei Teilen: der eine Teil ist derjenige Neigungswinkel, um welchen, ohne das Vorhandensein einer Durchbiegung die Achs des Balkens be-B von der Horizontalen abweichen würde, also gleich ω; der andere, von der Durchebiegung herrührende Teil ist nach Gleichung e). in Antwort auf Frage 82 zu bi-

Figur 88.



stimmen. Man erhält also für diesen Fall die Gleichung:

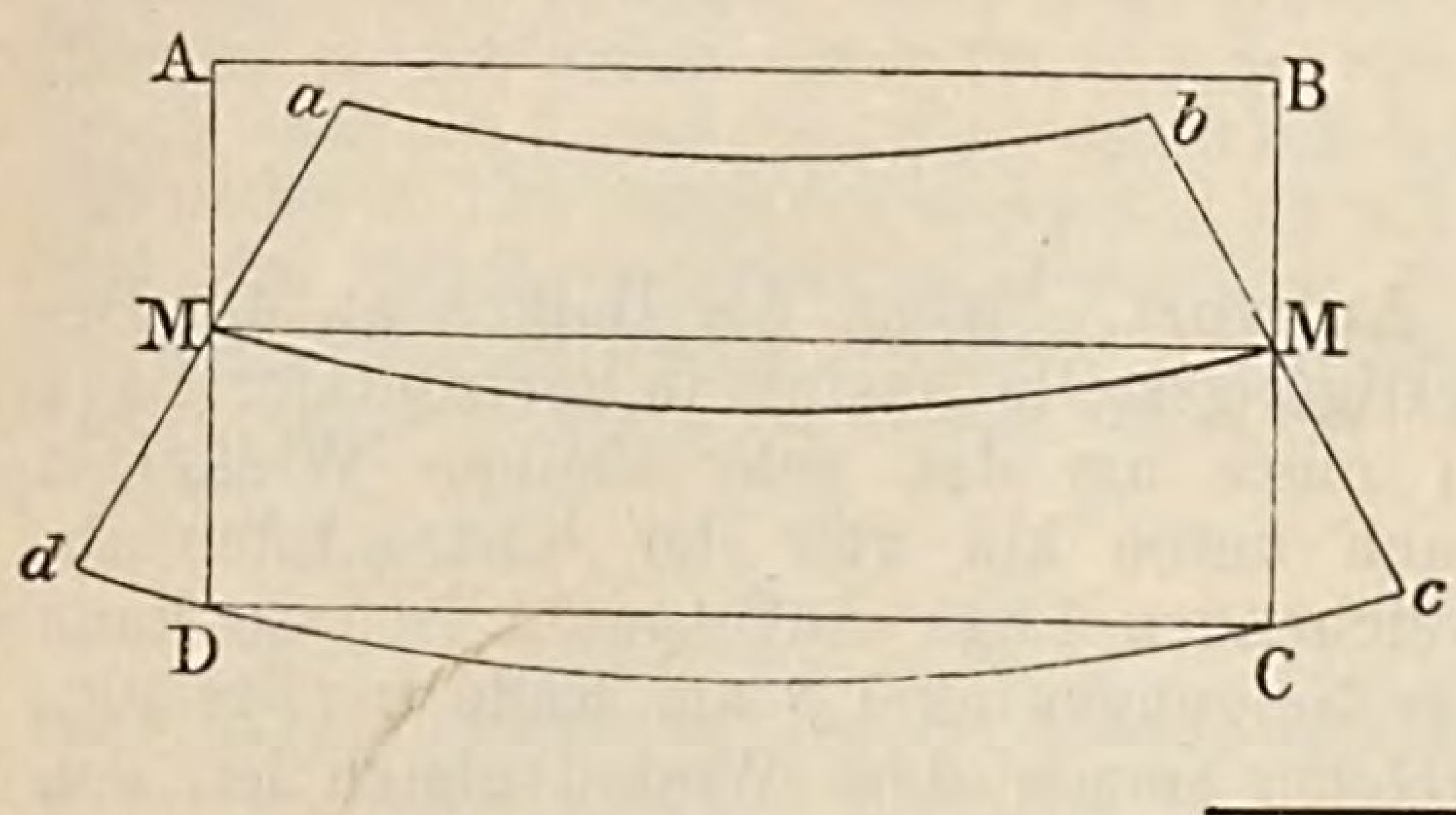
$$1). \quad . \; . \; . \quad \beta = \omega + \frac{P l^2}{2 E T}$$

Ebenso kann der Pfeil der Biegung s in diesem Fall angesehen werden als zusammengesetzt aus dem Teil $l \, . \, \mathrm{tg}\, \omega$ (wofür wegen vorauszusetzender Kleinheit des Winkels ω auch $l\omega$ gesetzt werden kann), welcher ohne das Vorhandensein der Durchbiegung die Höhendifferenz der beiden Endpunkte bilden würde, und dem von der Durchbiegung herrührenden Teil, welcher aus Gleichung 2). in Antw. auf Frage 84 zu bestimmen ist. Für diesen Fall gilt also die Gleichung:

$$2). \quad . \; . \; . \; . \; . \quad s = l\omega + \frac{1}{3} \cdot \frac{P l^3}{E T}$$

Frage 87. Welche Veränderung muss die Biegung eines Stabes nach seiner Längsachse in Bezug auf seine Breite zur Folge haben?

Figur 89.



Antwort. Die Biegung eines Stabes nach seiner Längsachse muss auch eine Biegung nach der Breitenausdehnung zur Folge haben, so dass, wenn der Stab nach unten gebogen ist, wie z. B. in Fig. 89 die untere Fläche des Stabes in ihrer Breitenausdehnung erhaben oder konvex, die obere, welche ihrer Länge nach erhaben oder konvex ist, nach der Breite hohl, ausgerundet oder konkav wird.

Ist also ABCD in Fig. 89 der Querschnitt des ungebogenen Stabes, so wird *abcd* jener des gebogenen Stabes sein.

Frage 88. Woraus lässt sich leicht erkennen, dass eine derartige, wenn auch nur geringe Biegung des Querschnitts eintreten muss?

Antwort. Dass eine derartige Biegung des Querschnitts eintreten muss, lässt sich folgendermassen nachweisen.

Wie im vorhergehenden entwickelt wurde, hat die Biegung eine Verlängerung der oberhalb der neutralen Faserschicht, sowie eine Verkürzung der unterhalb derselben gelegenen Fasern zur Folge. Diese Verlän-

gerung der oberen Schichten hat eine Zusammenziehung oder Kontraktion (s. Erkl. 32) nach der Breite zur Folge, während die Verkürzung der unteren Faserschichten eine Ausdehnung nach der Breite zur Folge hat, welche ebenso gross ist als die Verkürzung oben. Zu diesen Ausdehnungen und Verkürzungen parallel $\overline{MM}$ treten solche parallel zu $\overline{AD}$ (s. Fig. 89). Oberhalb der ungeänderten Schicht $\overline{MM}$ tritt in dieser Richtung eine Kontraktion oder Zusammenziehung, unterhalb $\overline{MM}$ eine Ausdehnung ein. Infolge dieser Kontraktion der oberen und Ausdehnung der unteren Hälfte des Stabes müssen sich die vorher ebenen Flächen, welche den Stab oben und unten begrenzen, krümmen, so dass die obere Fläche konkav, die untere konvex wird.

d). Berechnung der Widerstandsmomente, der Tragkräfte und der grössten Durchbiegungen prismatischer Körper für die in der Praxis am meisten vorkommenden Lagerungen.

α). Der Stab ist mit einem Ende horizontal eingeklemmt oder eingemauert und am anderen freien Ende wirkt normal zur Schwerpunktsachse eine Last P.

Frage 89. Was versteht man unter dem gefährlichen Querschnitt und wo befindet sich derselbe im vorliegenden Fall?

Antwort. Unter dem gefährlichen Querschnitt versteht man diejenige Stelle eines Balkens, wo bei gleichmässiger Beschaffenheit desselben der Bruch stattfinden würde.

Aus der Antwort auf Frage 54 geht hervor, dass für einen beliebigen Querschnitt in der Entfernung x vom Angriffspunkt der Last P das Biegungsmoment

$$M_x = Px$$

ist; dieses ist aber auch gleich dem Spannungsmoment des Querschnitts, denn nach Gleichung 7). in Antw. auf Frage 54 ist

$$\frac{S}{Y} T = Px$$

Da wir nur prismatische Körper in Betracht ziehen, so ist der Querschnittsmodulus oder das Widerstandsmoment

$$Q = \frac{T}{Y} \text{ (s. Antw. auf Frage 59)}$$

in allen Querschnitten des Stabes derselbe und es kann sich mit der veränderlichen Entfernung x dann nur die Spannung S in den einzelnen Querschnitten ändern. Dieselbe ist aber direkt proportional x,

Erkl. 102. Ist die Belastung P gegeben, so dient zur Berechnung des Querschnitts die nebenstehende Gleichung 2)., wonach

$$Q = \frac{Pl}{S}$$

und hieraus ergeben sich die Querschnittsdimensionen. — Bei bekanntem Querschnitt und bekannter Belastung ist die grösste Beanspruchung pro Quadrateinheit:

$$S = \frac{Pl}{Q}$$

Handelt es sich aber um die Berechnung der Tragfähigkeit, so erhält man dafür

$$P = \frac{QS}{l}$$

Zur Berechnung der Durchbiegung ist das Moment an einer beliebigen Stelle in der Entfernung x vom freien Stabende nach Gleich. 1). in Antw. auf Frage 82:

$$y = \frac{1}{6} \cdot \frac{Px}{ET} \left(3l^2 - x^2\right)$$

während sich die grösste, am freien Ende mit der Entfernung $x = 0$ stattfindende Durch-

biegung aus Gleichung 1). in Antw. auf Frage 84 berechnen lässt:

$$s = \frac{1}{3} \cdot \frac{P l^3}{E T}$$

und demnach ist sie am grössten, wo x am grössten ist, d. h. wo $x = l$. Es findet sich also das grösste oder Maximalmoment an der Befestigungsstelle, und es ist

1). . . . $M_{max} = P l$

und diese selbe Stelle ist dann für den vorliegenden Fall auch der gefährliche Querschnitt, oder:

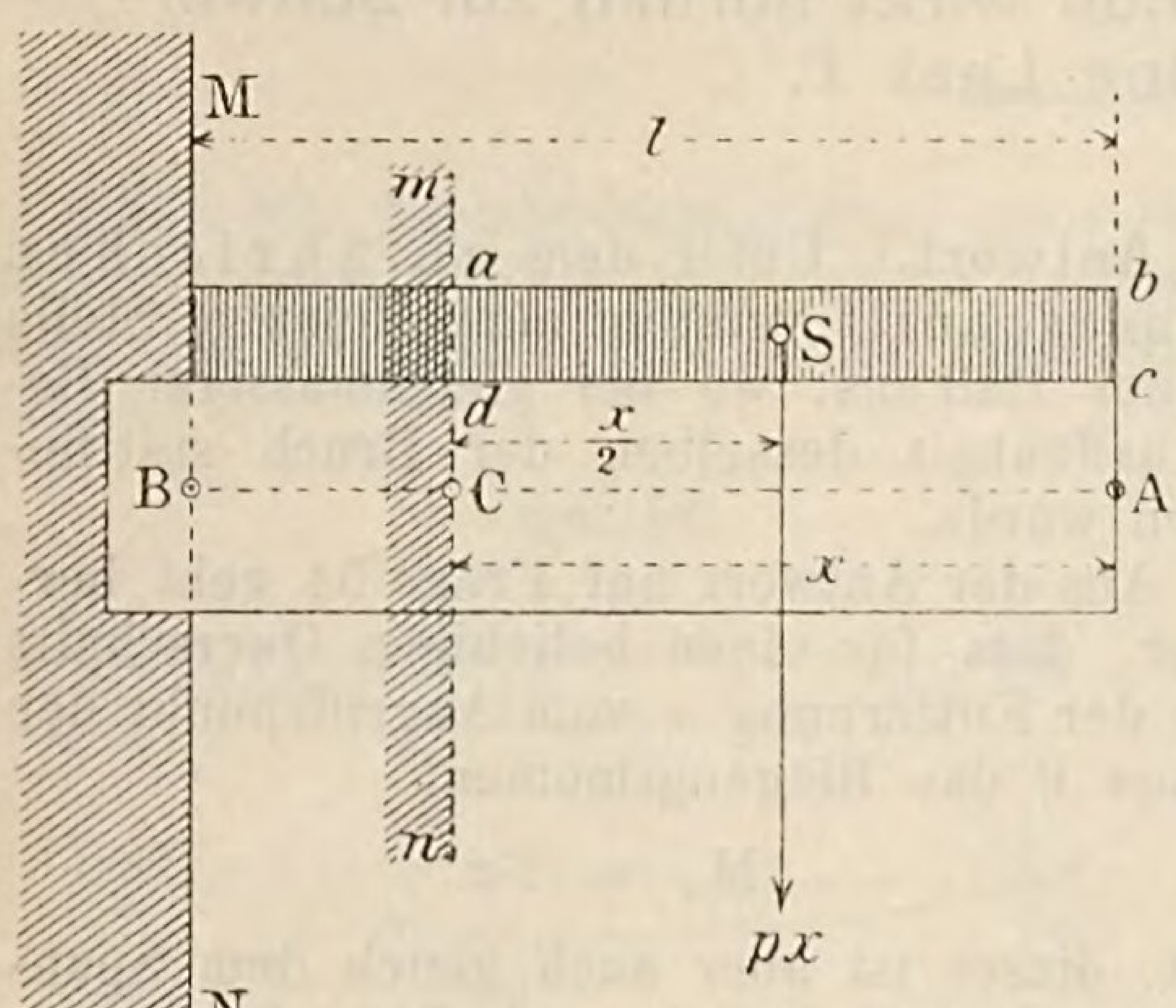
2). . . . $P l = Q S$

d. i. derselbe Ausdruck wie Formel 11)., siehe Erkl. 69 in der allgem. Abhandlung.

β). Der Stab ist mit einem Ende horizontal eingemauert und die Belastung ist gleichmässig über die freie Länge des prismatischen Körpers verteilt.

Frage 90. Welches Gesetz gilt für den Fall, dass die Last P gleichmässig über die ganze Länge des Balkens verteilt ist, durch welche Formel wird dieses Gesetz ausgedrückt und aus welcher Betrachtung ergibt sich die Richtigkeit desselben?

Figur 90.



Erkl. 103. Die nebenstehende Formel 1). gilt auch für einen, nach Art der Fig. 90 angeordneten prismatischen Körper, welcher nur durch sein Eigengewicht belastet ist, welcher also nur sich selbst zu tragen hat. Es bedeutet dann P das absolute Gewicht G des als homogen vorausgesetzten Stabmaterials innerhalb der freien Länge $AB = l$ und p das Gewicht eines jeden Teiles von der Längeneinheit desselben Körpers, von A nach B gemessen. Bei einem nur durch das Eigengewicht beanspruchten Stab solcher Art ist demnach das Biegungsmoment für die Befestigungsstelle gleich dem Produkt aus dem absoluten Gewicht und der halben Stablänge.

Antwort. Ein Balken kann eine doppelt so grosse Last tragen, wenn diese anstatt an dem freien Ende angebracht, über die ganze Länge gleichmässig verteilt wird, oder:

1). $P l = 2 Q S$

Beweis. Ist uns die Gesamtlast P bekannt, welche ein Balken von der Länge l zu tragen hat, so kennen wir, wenn die Last gleichmässig über die ganze Länge verteilt ist, auch die Grösse derjenigen Belastung, welche auf die Längeneinheit kommt. Bezeichnen wir nämlich die Belastung pro Längeneinheit mit p, so ist offenbar

$$P = p l \text{ und } p = \frac{P}{l}$$

Mit dieser Bezeichnung können wir nun leicht die Gleichgewichtsbedingung für einen beliebigen, in der Entfernung x vom freien Ende gelegenen Schnitt mn ableiten. Da nach der obenstehenden Formel 2). in Antw. auf Frage 89:

$$P l = Q S$$

so ist dementsprechend die Belastung P des fraglichen Teils AC des Balkens (s. Fig. 90) $= p x$. Der Hebelarm l dieser Last ist aber $= \frac{1}{2} x$, da wir uns die gleichförmig verteilte Belastung selbst wieder als einen homogenen prismatischen Körper $abcd$ vorstellen können, dessen Gewicht sich wie eine in seinem Schwerpunkt S angreifende Vertikalkraft äussert. Das Biegungsmoment ist also im vorliegenden Fall:

Erkl. 104. Ist ausser der gleichförmig verteilten Last G, oder was dasselbe ist, ausser dem zu berücksichtigenden Eigengewicht G am freien Ende A noch eine senkrecht abwärts gerichtete Kraft P wirksam, so hat man das resultierende Moment zu bilden, d. h. man hat die beiden Momente $\frac{1}{2}Gl$ und Pl zu addieren. In diesem Fall ist also das massgebende Biegungsmoment für die Befestigungsstelle oder den gefährlichen Querschnitt:

$$M = \frac{1}{2}Gl + Pl = l(\frac{1}{2}G + P)$$

und

$$1). \quad . \quad . \quad . \quad l(\frac{1}{2}G + P) = QS$$

Für einen Balken von rechteckigem Querschnitt ist die Tragfähigkeit somit, da dann

$$Q = \frac{1}{6}bh^2$$

(s. Formel 15). in Antw. auf Frage 59)

einzusetzen ist:

$$\frac{1}{2}Gl + Pl = \frac{1}{6}bh^2S$$

oder:

$$Pl = \frac{1}{6}bh^2S - \frac{1}{2}Gl$$

oder:

$$2). \quad . \quad . \quad . \quad P = \frac{\frac{1}{2}bh^2S}{l} - \frac{1}{2}G$$

Erkl. 105 Sind ausser der gleichförmig verteilten Last G noch mehrere Lasten P_1, P_2 .. P_n in den Entfernungen a_1, a_2 .. a_n von dem Einklemmungspunkt B wirksam, so bleibt der letztere der Bruchpunkt, und es ist deshalb für diesen das Widerstandsmoment:

$$\frac{1}{2}Gl + P_1a_1 + P_2a_2 \ldots + P_na_n = QS$$

oder:

$$3). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{2}Gl + \Sigma . Pa = QS$$

$$M_x = px \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}px^2$$

daher ist für den Schnitt mn die Gleichgewichtsbedingung:

$$M_x = \frac{1}{2}px^2 = QS$$

Die Grösse $\frac{1}{2}px^2$ ändert sich aber mit der Entfernung x (während p eine unveränderliche oder konstante Grösse ist) und zwar ist sie um so grösser, je mehr wir mit mn von A nach B rücken; sie erlangt ihren grössten Wert, wenn mn in MN fällt, d. h. wenn $x = l$ ist. Das ist demnach der gefährliche Querschnitt, und derselbe liegt an der Befestigungsstelle MN.

Für den gefährlichen Querschnitt ist nun die Belastung $= lp$, der Hebelarm $= \frac{1}{2}l$, das Biegungsmoment somit:

$$M = \frac{1}{2}pl^2 = QS$$

oder, wenn wir wieder die Gesamtlast $pl = P$ einführen, so ist:

$$M = \frac{1}{2}Pl$$

und

$$Pl = 2QS$$

Die Tragfähigkeit eines Balkens von rechteckigem Querschnitt beträgt also, da in diesem Fall

$$Q = \frac{1}{6}bh^2$$

(siehe Formel 15). in Antw. auf Frage 59)

$$2). \quad . \quad . \quad . \quad P = \frac{1}{3} \cdot \frac{bh^2S}{l}$$

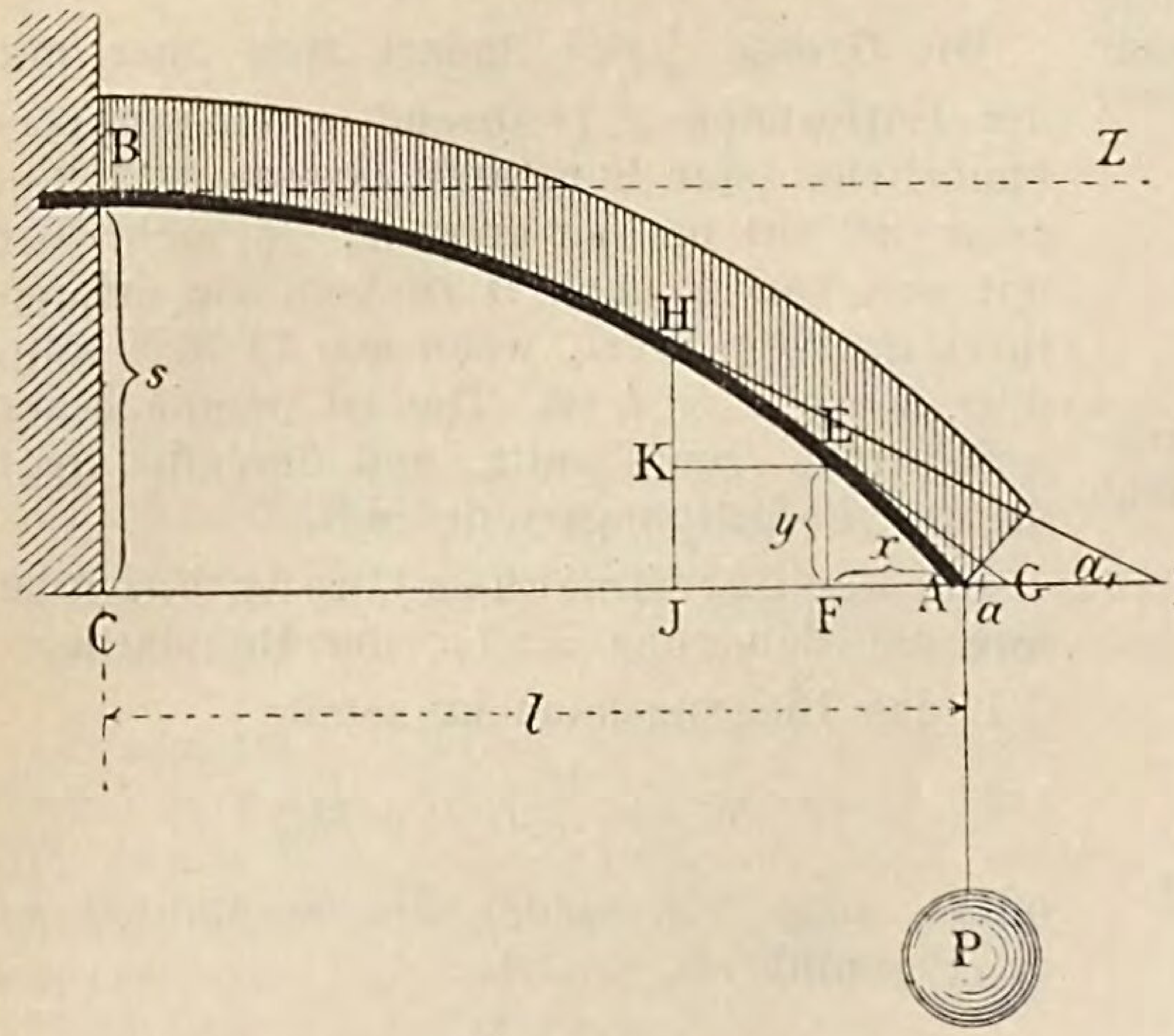
Frage 91. Nach welcher Gleichung lässt sich die Krümmung und Senkung der elastischen Linie eines Körpers bestimmen, welcher sowohl durch ein an seinem freien Ende angebrachtes Gewicht, als auch gleichzeitig durch eine über seine ganze Länge gleichmässig verbreitete Last auf Biegung beansprucht ist, und aus welcher Betrachtung ergibt sich die Richtigkeit dieser Gleichung?

Antwort. Wird ein Körper durch ein an seinem freien Ende angebrachtes Gewicht P und zugleich durch ein über seine ganze Länge gleichmässig verbreitetes Gewicht, wovon auf die Längeneinheit der Teil p kommt, gebogen, so wird, wenn y die Ordinate irgend eines Punktes der elastischen Linie und x dessen Abscisse bezeichnet, die Krümmung und Senkung der elastischen Linie bestimmt durch die Gleichung:

$$1). \quad . \quad y = \frac{Px}{6ET}(3l^2 - x^2) + \frac{px}{24ET}(4l^3 - x^3)$$

Beweis. Es sei BZ (Fig. 91) die Richtung der zunächst nur an einem Ende B befestigten gewichtslos gedachten neutralen

Figur 91.



Achse oder Faser AB im natürlichen oder ungebogenen Zustand.

Durch ein an dem freien Ende A derselben angehängtes Gewicht P und ferner ein über die ganze Länge gleichmässig verbreitetes anderes Gewicht, von welchem auf die Längeneinheit der Teil p kommt, erhalte die Faser die Gestalt der elastischen Linie AB.

Um die Gleichung dieser Linie abzuleiten, sei die durch A gezogene Horizontallinie AC die Abscissenachse des rechtwinkligen Koordinatensystems (siehe Erkl. 93), sowie A der Ausgangspunkt desselben. Für einen beliebigen Punkt E der Kurve, dessen Krümmungshalbmesser = R ist, sei ferner AF = x, EF = y und die grösste Ordinate oder der Pfeil der Biegung BC = s und AC = l.

Nimmt man die Krümmung der Kurve so gering an, dass die Horizontalprojektion (siehe Erkl. 96) $\overline{AC}$ ohne merklichen Fehler als Länge derselben angenommen werden kann, so wird man für das Gewicht des Bogens $\overline{AE}$ den Wert px setzen können, sowie für das statische Moment desselben in Bezug auf den Punkt A, wenn man das gedachte Gewicht im Schwerpunkt, also in der Hälfte von $\overline{AB}$ wirkend annimmt, $\frac{1}{2}px^2$ (s. Antw. auf die vorige Frage); das Moment von P auf die Entfernung $\overline{AF} = x$ bezogen, ist aber Px, daher die Summe beider:

$$M = Px + \frac{1}{2}px^2$$

Gleich wie nun nach Gleichung 1). in Antwort auf Frage 80:

$$R \cdot Px = ET$$

oder:

$$RM = ET$$

ist, so ist auch in diesem Fall das Elasticitätsmoment ET = RM oder:

a). . . . $ET = R\left(Px + \frac{1}{2}px^2\right)$

Es sei nun ferner $\overline{EG}$ die geometrische Tangente (s. Erkl. 94) des Punktes E, sowie $\overline{HL}$ die eines zweiten Punktes H, der so nahe bei E liegend gedacht wird, dass dessen Abscisse AJ um den unendlich kleinen Teil JF = δ grösser als x, also AJ = $x + \delta$ ist.

Nach der Erkl. 92 ist der Krümmungshalbmesser

$$R = \pm \frac{b}{(\alpha - \alpha_1)}$$

Erkl. 106. Unter der trigonometrischen Tangente oder der „Tangens" eines spitzen Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältnis der diesem Winkel gegenüberliegenden Kathete a zur anliegenden Kathete b dieses Dreiecks; in Zeichen:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

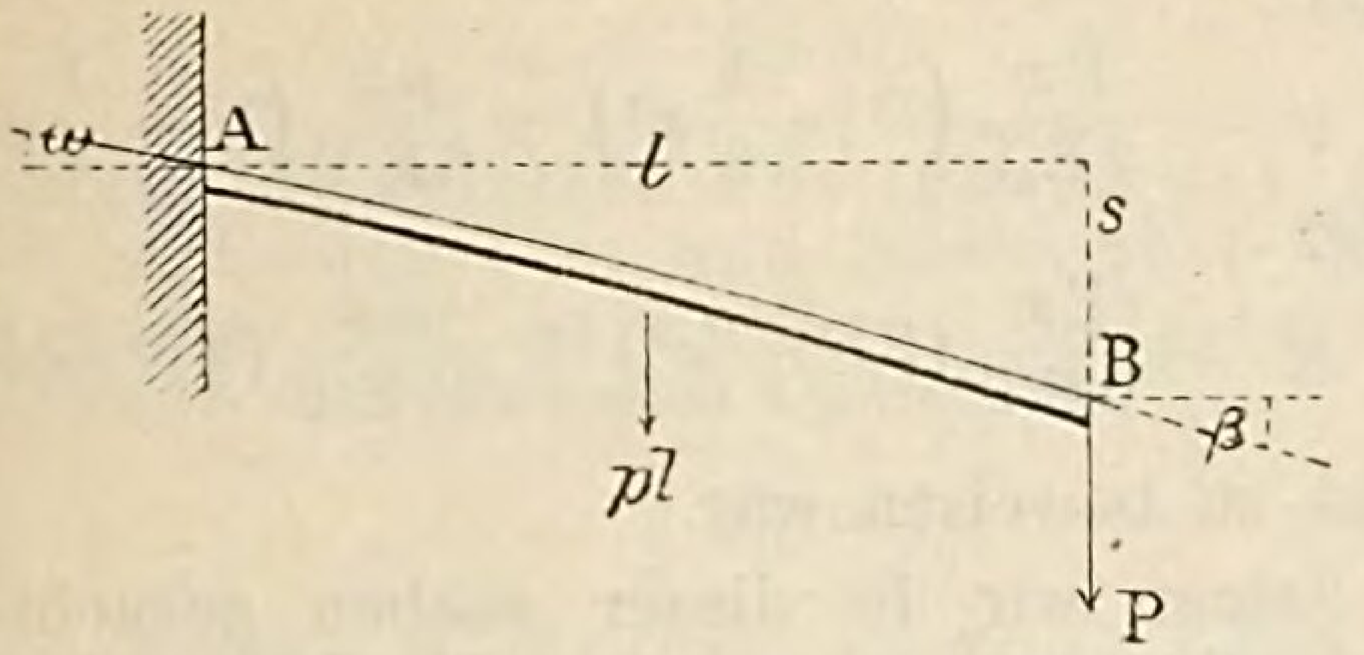
Erkl. 107. Für einen schräg eingespannten Balken, dessen Achse an der Befestigungsstelle um den Winkel ω von der Horizontalen nach unten hin abweicht, ergeben sich für den Fall, dass die Belastung gleichförmig über die Länge des Balkens verteilt ist, für den Neigungswinkel β am freien Ende B (Fig. 92) in analoger Weise wie in Antw. auf Frage 86:

1). $\beta = \omega + \frac{pl^3}{6ET}$

und für den Pfeil der Biegung:

2). $s = l\omega + \frac{pl^4}{8ET}$

Figur 92.



Erkl. 108. Wenn bei dem schräg eingespannten Balken, Fig. 92, die gleichförmig über die Länge verteilte Belastung pl und die am Endpunkt aufgehängte Last P gleichzeitig wirken, so setzt sich jede von den beiden Grössen α und s aus drei Teilen zusammen: der erste entspricht der natürlichen Neigung des Balkens im ungebogenen Zustand, der zweite und dritte Teil entsprechen den Beiträgen, welche jede von den beiden Belastungen einzeln genommen zu diesen Grössen liefert. Man erhält also für diesen Fall die Gleichungen:

$$1). \quad \beta = \omega + \frac{pl^3}{6\mathrm{ET}} + \frac{\mathrm{P}l^2}{2\mathrm{ET}}$$

und

$$2). \quad s = l\omega + \frac{pl^4}{8\mathrm{ET}} + \frac{\mathrm{P}l^3}{3\mathrm{ET}}$$

Erkl. 109. Für den Fall, dass das Eigengewicht des gebogenen Körpers, welches ja auch als eine gleichmässig über seine ganze Länge verteilte Last angesehen werden kann, unberücksichtigt bleiben soll, und eine andere über seine Länge verteilte Last überhaupt nicht vorhanden, also $p = 0$ ist, erhalten wir aus den nebenstehenden Gleichungen 1). und 2).:

$$y = \frac{\mathrm{P}x}{6\mathrm{ET}}(3l^2 - x^2)$$

und

$$s = \frac{\mathrm{P}l^3}{3\mathrm{ET}}$$

also genau dieselben Werte, welche in Antw. auf Frage 82 resp. 84 entwickelt wurden.

Fällt dagegen die am freien Ende aufgehängte Last P weg, und ist nur eine über die ganze Länge gleichmässig verteilte Last resp. nur das Eigengewicht des Körpers in Rechnung zu bringen, so ergibt sich aus den nebenstehenden Gleichungen, wenn wir in denselben für $\mathrm{P} = 0$ einsetzen:

$$1). \quad y = \frac{px}{24\mathrm{ET}}(4l^3 - x^3)$$

und

worin b das unendlich kleine Bogenstück HE bedeutet, so dass man wegen Kleinheit der Grössen für $\mathrm{HE} = \mathrm{KE} = \delta$ setzen kann, somit ist:

$$\mathrm{R} = \pm \frac{\delta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_1}$$

Führen wir diesen Wert in die Gleichung a). ein, so folgt:

$$\mathrm{ET} = \pm \frac{\delta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_1}\left(\mathrm{P}x + \frac{1}{2}px^2\right)$$

sowie hieraus:

$$b). \quad \pm(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_1) = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{ET}} \cdot x\delta + \frac{p}{2\mathrm{ET}} \cdot x^2\delta$$

Setzt man in diesem Ausdruck für x aufeinanderfolgend δ, 2δ, 3δ und $n\delta$, so muss der rechte Teil die Summe der Grössen sein, um welchen sich die trigonometrische Tangente [1]) des Winkels ändert, welchen die geometrische Tangente in verschiedenen Punkten mit der Abscissenachse bildet. Was alsdann den linken Teil der Gleichung betrifft, so wollen wir mit C die trigonometrische Tangente für den Endpunkt A bezeichnen, so dass die Summe der Aenderungen in diesem Teil $\mathrm{C} - \operatorname{tg}\alpha$ sein muss, weil auf alle Fälle die trigonometrische Tangente des Punktes A die grösste ist.

Es folgt demnach, wenn man das in den Erkl. 98 u. 99 Gesagte berücksichtigt und zuletzt $n\delta = x$ setzt:

$$c). \quad \mathrm{C} - \operatorname{tg}\alpha = \frac{1\,\mathrm{P}x^2}{2\mathrm{ET}} + \frac{1\,px^3}{6\mathrm{ET}}$$

Um C näher zu bestimmen, ist zu berücksichtigen, dass, wenn man x der Länge l gleichsetzt, $\operatorname{tg}\alpha = 0$ werden muss, und es ist für diesen Fall:

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{P}l^2}{2\mathrm{ET}} + \frac{pl^3}{6\mathrm{ET}}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung c). und ordnet entsprechend, so folgt:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{P}l^2}{2\mathrm{ET}} + \frac{pl^3}{6\mathrm{ET}} - \frac{\mathrm{P}x^2}{2\mathrm{ET}} - \frac{px^3}{6\mathrm{ET}}$$

Der Figur nach ist aber

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{HK}}{\mathrm{EK}} = \frac{\mathrm{HK}}{\delta}$$

deshalb auch

$$\mathrm{HK} = \delta\left(\frac{\mathrm{P}l^2}{2\mathrm{ET}} + \frac{pl^3}{6\mathrm{ET}}\right) - \frac{\mathrm{P}x^2\delta}{2\mathrm{ET}} - \frac{px^3\delta}{6\mathrm{ET}}$$

Wird hier nochmals δ, 2δ, $3\delta \ldots n\delta$ für x gesetzt, so ist der linke Teil der Gleichung, d. i. die Summe von allen den un-

[1]). Siehe Erkl. 106.

2). . . . $s = \frac{pl^4}{8ET}$

Da wir aber im letzteren Fall nach Antw. auf Frage 90 für $p = \frac{P}{l}$ oder $pl = P$ einsetzen können, so ist auch

3). $y = \frac{1}{24} \cdot \frac{Pl^2 x}{ET}\left(4 - \frac{x^3}{l^3}\right)$

und

4). $s = \frac{1}{8} \cdot \frac{Pl^3}{ET}$

Vergleichen wir nun die Gleichung 1). in Antwort auf Frage 84 mit der obigen Gleichung 4)., so folgt daraus, dass sich der Pfeil der Biegung für den ersten Fall zu dem des zweiten verhält wie

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{ET} : \frac{1}{8} \cdot \frac{Pl^3}{ET} = 8 : 3$$

woraus folgt, dass die Einsenkung weit grösser ist, wenn ein und dasselbe Gewicht am Ende angebracht wird, als wenn es über die ganze Länge gleichmässig verteilt ist, und dass dieselbe im letzteren Fall unter sonst gleichen Umständen nur $^3/_8$ mal soviel beträgt als im ersten Fall.

endlich kleinen Stückchen HK als die Ordinate EF $= y$ anzusehen und demnach

$$y = \frac{Pxl^2}{2ET} + \frac{pxl^3}{6ET} - \frac{Px^3}{6ET} - \frac{px^4}{24ET}$$

oder:

$$y = \frac{Px}{2ET}\left(l^2 - \frac{1}{3}x^2\right) + \frac{px}{6ET}\left(l^3 - \frac{1}{4}x^3\right)$$

oder:

$$y = \frac{Px}{6ET}\left(3l^2 - x^2\right) + \frac{px}{24ET}\left(4l^3 - x^3\right)$$

was zu beweisen war.

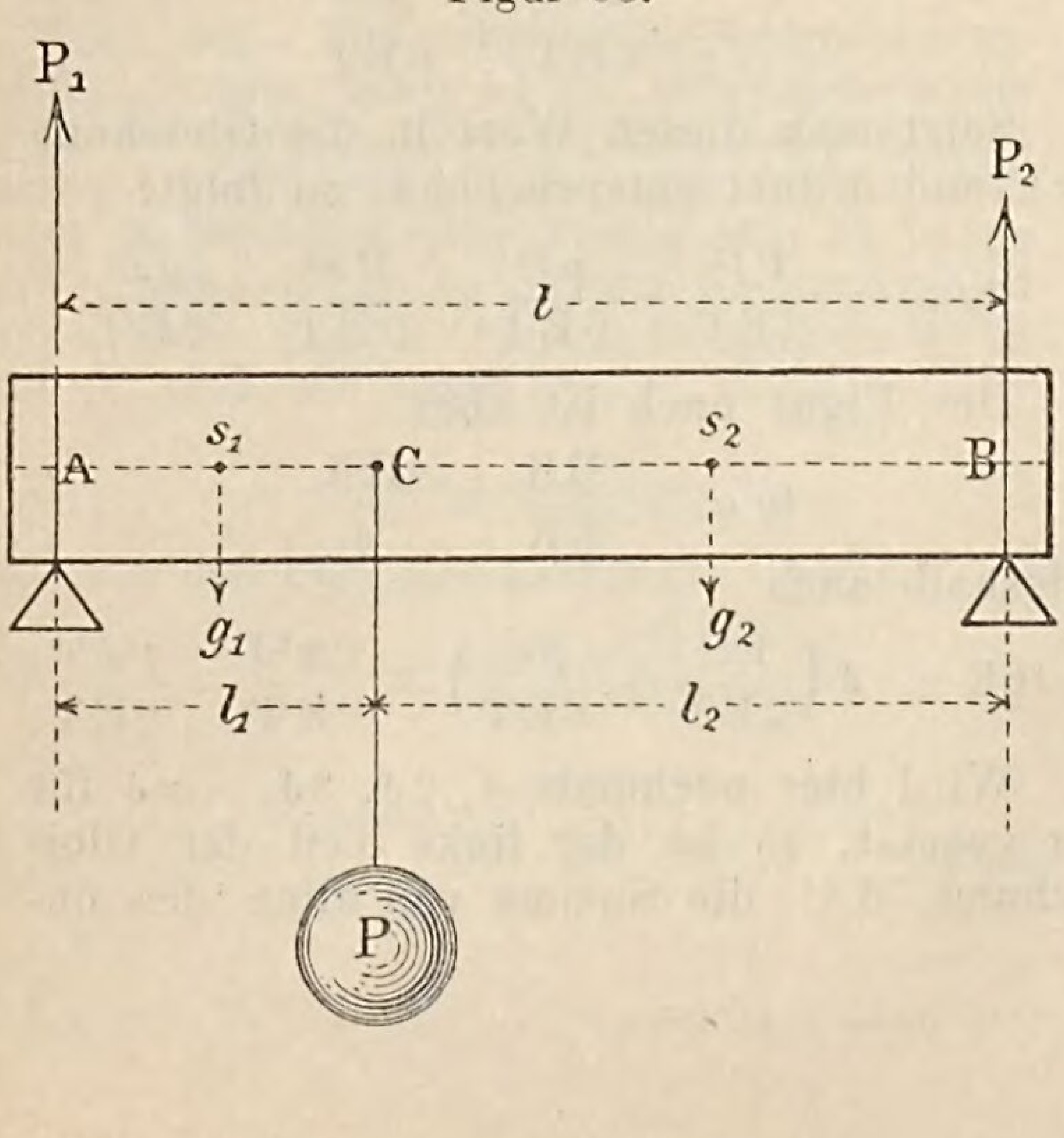
Setzen wir in dieser soeben gesuchten Koordinatengleichung der elastischen Linie für $x = l$, so erhalten wir für den Pfeil der Biegung:

2). . . . $s = \frac{Pl^3}{3ET} + \frac{pl^4}{8ET}$

γ). Der Stab ist in zwei Punkten gestützt, und an einem dritten Punkt zwischen jenen wirkt senkrecht zum Stab eine daselbst konzentrierte Last.

Frage 92. Welche Formel dient im vorliegenden Fall zur Berechnung der Tragfähigkeit im Angriffspunkt der Last oder umgekehrt zur Berechnung der Querschnittsdimensionen, und aus welcher Betrachtung ergibt sich die Richtigkeit dieser Formel?

Figur 93.



Antwort. Zur Berechnung der Tragfähigkeit eines Stabes, bei welchem sich der Angriffspunkt einer Einzellast zwischen seinen zwei Stützpunkten befindet, dient die Formel:

1). $P \cdot \frac{l_1 l_2}{l} = QS$

Diese Formel ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Aus der Lehre von den parallelen Kräften [1]) ist bekannt, dass sich die Wirkung einer Last P, welche in einer, durch Fig. 93 veranschaulichten Weise angeordnet ist, auf die Stützpunkte A und B derart überträgt, dass in jeder Stütze ein Druck entsteht, der von dieser in entgegengesetzter Richtung der Last P erwidert und Reaktion genannt wird.

Wir bekommen auf diese Weise in A und B zwei parallel gerichtete Seitenkräfte, welche zusammengenommen dieselbe Intensität wie P besitzen und sich ihrer Grösse

[1]) Siehe *R. Klimpert*, Lehrbuch der Statik.

Erkl. 110. Ist der Querschnitt eines prismatischen Trägers ein Rechteck von der Breite b und der Höhe h, so ist, da nach Gleichung 15). in Antw. auf Frage 59 für diesen Fall

$$Q = \frac{1}{6} b h^2$$

beträgt, die relative Festigkeit des an beiden Enden frei und horizontal aufliegenden und im Punkt C belasteten Balkens vom genannten Querschnitt

$$1). \;\ldots\; P = \frac{1}{6} b h^2 S \frac{l}{l_1 l_2}$$

liegt aber der Punkt C in der Mitte zwischen A und B, so ist nach Gleichung 2). in Antw. auf Frage 91 für denselben Balken

$$2). \;\ldots\; P = \frac{4}{6} \cdot \frac{b h^2 S}{l}$$

Erkl. 111. Wenn man in die beiden, in der vor. Erklärung gegebenen Formeln bestimmte Zahlenwerte einsetzt, so wird man stets finden, dass unter sonst gleichen Verhältnissen der in der Mitte belastete Balken das geringste Tragungsvermögen besitzt. Es verhält sich nach den obigen Formeln

$$P_1 : P_2 = \frac{1}{6} b h^2 S \frac{l}{l_1 l_2} : \frac{4}{6} \frac{b h^2 S}{l}$$

oder:

$$P_1 : P_2 = l^2 : 4 l_1 l_2$$

oder:

$$P_1 : P_2 = \frac{1}{2} l : \sqrt{l_1 l_2}$$

für l_2 kann man aber setzen $(l - l_1)$, also ist:

$$P_1 : P_2 = \frac{1}{2} l : \sqrt{l_1 (l - l_1)}$$

Wenn man nun die beiden Abschnitte l_1 und $(l - l_1)$ der Länge l als Seiten eines rechtwinkligen Vierecks betrachtet, so erhält dieses Viereck seinen grössten Flächeninhalt, in dem Fall, dass die veränderliche Grösse l, die alle zwischen 0 und l möglichen Grössen annehmen kann, gleich $^1/_2 l$ setzt. Es gewinnt also in der vorhergehenden Proportion $\sqrt{l_1 (l - l_1)}$ einen grössten Wert, wenn $l_1 = {}^1/_2 l$ gesetzt wird, alsdann ist:

$$\sqrt{l_1 (l - l_1)} = \sqrt{\frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} l} = \frac{1}{2} l$$

In allen anderen Fällen, so oft nämlich die Angriffsstelle der Last diesseits oder jenseits der Mitte liegt, übersteigt das Tragungsvermögen P_1 die Grösse P_2 um so mehr, je mehr sich Punkt C dem einen oder anderen Stützpunkt nähert. Diese Zunahme ist zwar anfangs sehr gering, erreicht aber in der Nähe der Unterlagen bedeutendere Werte.

Ist z. B. ein Balken 6 m lang und $l_1 = 2$, $l_2 = 4$ m, so ist:

$$P_1 : P_2 = \frac{1}{2} 6 : \sqrt{2 \cdot 4} = 3 : 2{,}828$$

ist aber $l_1 = 1$, $l_2 = 5$ m, so ist:

nach umgekehrt zu einander verhalten wie ihre bezüglichen Abstände von der Resultierenden. Diese Reaktionskräfte sind in Fig. 93 mit P_1 und P_2 bezeichnet, und die Abstände ihrer Angriffspunkte vom Angriffspunkt C der Last mit l_1 und l_2, und es ist somit

$$a). \;\ldots\; P_1 + P_2 = P$$

$$b). \;\ldots\; P_1 : P_2 = l_2 : l_1$$

oder:

$$P_1 l_1 = P_2 l_2$$

Betrachten wir Punkt B als Drehungspunkt, dann ist $P_1 l$ das rechtsdrehende und $P l_2$ das linksdrehende Moment, und es ist für den Fall des Gleichgewichts

$$P_1 l = P l_2$$

Sehen wir aber A als Drehungspunkt an, so muss für den Fall des Gleichgewichts

$$P_2 l = P l_1$$

sein. Daraus ergeben sich die Werte der beiden Komponenten, und es ist

$$P_1 = \frac{P l_2}{l} \quad \text{und} \quad P_2 = \frac{P l_1}{l}$$

Wir verfahren nun wie in dem in Antw. auf Frage 89 erörterten Fall und denken uns zu diesem Zweck das Stück $\overline{BC}$ eingemauert und $\overline{AC}$ am freien Ende A mit P_1 belastet, dann ist für den gefährlichen Querschnitt in C das Maximalmoment

$$M_1 = P_1 l_1$$

Denken wir uns aber das Stück $\overline{AC}$ eingemauert und $\overline{BC}$ am freien Ende B mit P_2 belastet, so ist in diesem Fall

$$M_2 = P_2 l_2$$

das Maximalbiegungsmoment. Nach obiger Gleichung b). ist aber

$$P_1 l_1 = P_2 l_2$$

Demnach ist für den Angriffspunkt C der Belastung das Maximalbiegungsmoment in beiden Richtungen dasselbe, und es liegt daher in C der gefährliche Querschnitt. Für diesen gilt also nach Einführung der oben berechneten Werte der Komponenten

$$P_1 l_1 = \frac{P l_1 l_2}{l} = P_2 l_2$$

und für die Berechnung der Tragfähigkeit im Punkt C oder umgekehrt der Querschnittsdimensionen erhalten wir

$$\frac{P l_1 l_2}{l} = Q S$$

$$P_1 : P_2 = \frac{1}{2} 6 : \sqrt{1.5} = 3 : 2{,}236$$

Und hat ein Balken die Länge von z. B. 4 m, so vermag er in dem Abstand von 0,3 m von der einen oder anderen Stütze fast schon das dreifache von der Last zu tragen, welche in der Mitte gestattet ist.

Frage 93. Wie ändert sich die vorstehende Formel für den Fall, dass der Angriffspunkt C der Last in der Mitte zwischen A und B liegt und in welchem Verhältnis steht in diesem Fall die Tragfähigkeit zur Tragfähigkeit desselben Balkens, für den Fall, dass letzterer an einem Ende eingemauert und am anderen freien Ende belastet ist?

Antwort. Liegt der Punkt C in der Mitte zwischen A und B, dann ist

$$l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$$

und demnach

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2} P$$

folglich ist, wenn wir diese Werte in die Gleichung 1). in Antw. auf vorige Frage einsetzen:

$$\frac{P \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} l}{l} = QS$$

oder:

$$\frac{Pl}{4} = QS$$

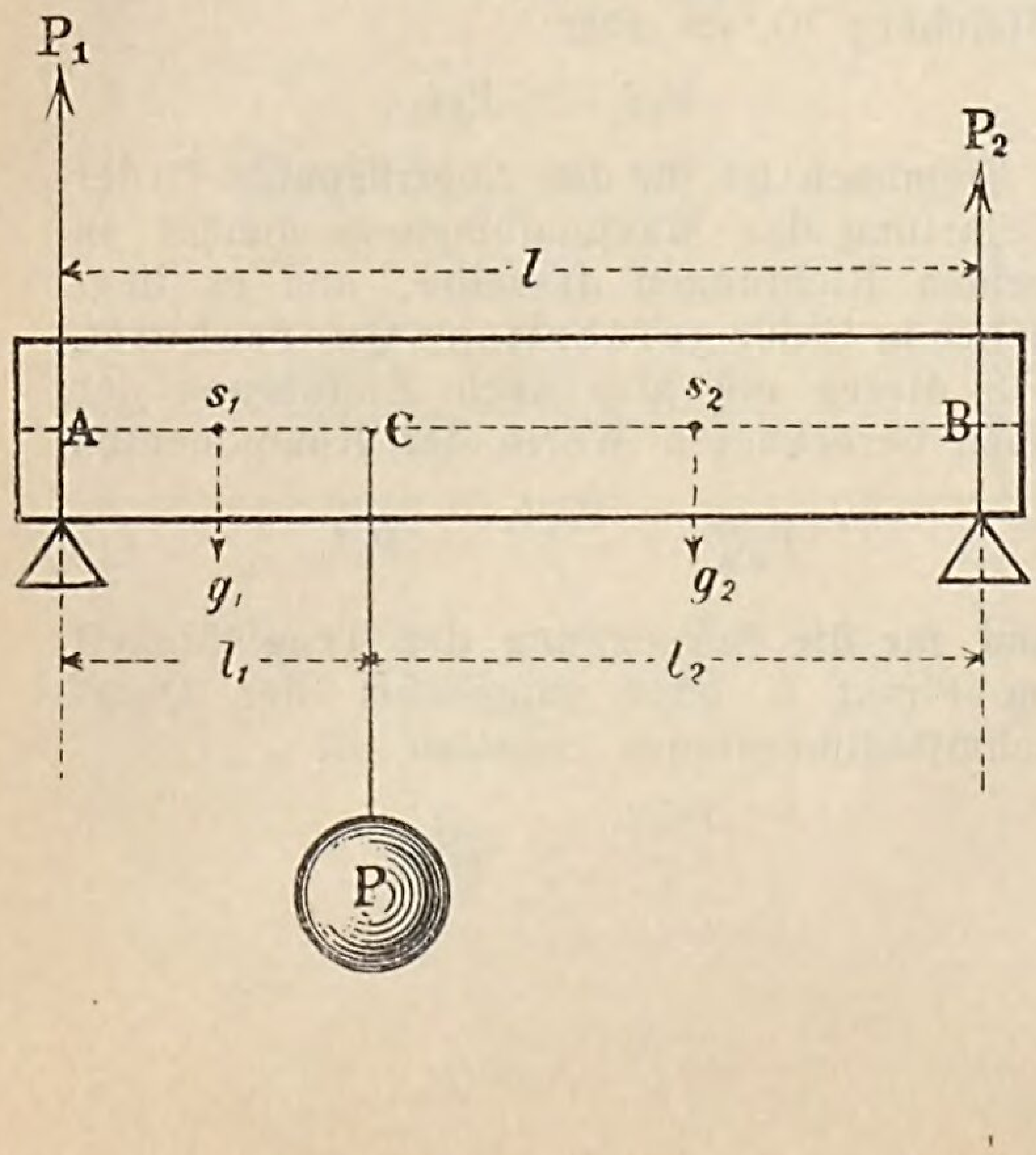
oder:

1). $Pl = 4QS$

also ist in diesem Fall die Tragfähigkeit viermal so stark, als wenn der Balken an einem Ende eingemauert und am andern belastet wäre.

Frage 94. In welcher Weise sind die in den beiden vorigen Antworten entwickelten Gleichungen abzuändern für den Fall, dass das Eigengewicht G des Balkens mit in Rechnung gebracht werden soll?

Figur 94.



Antwort. Haben die beiden Stücke $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ des Balkens die Gewichte g_1 und g_2, und ist das ganze Gewicht

$$g_1 + g_2 = G$$

so wirkt von dem Gewicht g_1, welches man sich im Schwerpunkt s_1, also in der halben Länge von $\overline{AC}$ wirksam denken kann, $\frac{1}{2} g_1$ auf die Stütze A und $\frac{1}{2} g_1$ auf C. Ebenso wirkt von g_2 die Hälfte auf B und $\frac{1}{2} g_2$ auf C; folglich haben wir uns im Belastungspunkt C ausser der Last P noch

$$\frac{1}{2} g_1 + \frac{1}{2} g_2 = \frac{1}{2} G$$

wirksam zu denken, so, dass also P in den vorigen Formeln noch um diese Grösse $\frac{1}{2}$ G vermehrt werden muss; es ist alsdann, wenn C nicht in der Mitte liegt:

Erkl. 112. Es ist zu bemerken, dass ein an beiden Enden gestützter Balken, vermöge seines Gewichts nicht nur auf seinen Mittelpunkt, sondern auf jede Stelle seiner Länge einen Druck gleich der Hälfte seines Gewichts ausübt. Denn wo immer man denselben quer durchschneiden mag, wird eine an dieser Stelle angebrachte Stütze die Hälfte seines Gewichts zu tragen haben.

Hat man einen Stab oder Balken nur an dem einen Ende befestigt, so addiert sich ebenfalls die Hälfte seines Gewichts zu der am anderen freien Ende anhängenden Last. Denn man kann sich das Balkengewicht in der Mitte seiner Länge, in seinem Schwerpunkt verdichtet vorstellen; es ist daher sein Moment

$$G \cdot \frac{l}{2} = \frac{G}{2} \cdot l$$

1). . . . $P + \frac{1}{2} G = Q S \frac{l}{l_1 l_2}$

wenn aber C in der Mitte liegt:

2). . . . $P + \frac{1}{2} G = \frac{4 Q S}{l}$

Frage 95. Was ist überhaupt bei der praktischen Anwendung der mitgeteilten Formeln über die relative Festigkeit meist zu berücksichtigen und in der Regel jederzeit mit in Rechnung zu bringen?

Antwort. Bei der praktischen Anwendung der mitgeteilten Formeln und Untersuchungen über die relative Festigkeit kommt das eigene Gewicht der Körper noch weit mehr in Betracht, als bei der absoluten Festigkeit und muss in der Regel jederzeit mit in Rechnung genommen werden. Indem dasselbe aber zugleich mit der getragenen Last die verschiedenen, auf die eine oder andere Weise geformten Körper gleichfalls belastet, in den Formeln aber P die ganze Last bezeichnet, welche die Körper tragen können, so muss es allezeit schon in dieser Grösse mit inbegriffen sein. Nennt man also das eigene Gewicht der verschiedenen Körper g, dasjenige aber womit sie belastet sind p, und berücksichtigt, dass das eigene Gewicht der Körper allezeit über die ganze Länge derselben verbreitet ist, so ist für diejenigen Formeln, in welchen auch das getragene Gewicht über die ganze Länge der Körper verbreitet angenommen wird:

$$p + g = P$$

in denjenigen Fällen aber, wo die Last am Ende oder in der Mitte drückt:

$$2p + \frac{1}{2} g = P$$

Ist aber in allen angegebenen Formeln

$$p = 0$$

so ist der Körper so beschaffen, dass er genau sein eigenes Gewicht trägt und es lässt sich aus dem zugehörigen Wert von P bei jeder der angegebenen Gleichungen die Länge oder die Breite oder die Höhe finden, welche ein Körper haben muss, um sein eigenes Gewicht tragen zu können (s. Erkl. 113).

Erkl. 113. Um zu zeigen, in welcher Weise man die Dimensionen eines Körpers ermitteln kann, welcher so beschaffen sein soll, dass er genau sein eigenes Gewicht trägt, soll die Länge einer an beiden Enden aufliegenden Stange von Gusseisen von einem Quadratcentimeter Querschnitt gesucht werden, welche ihre eigene Last, ohne bleibend gebogen zu werden, zu tragen vermag. Es ist nach der unter 2). angegebenen Formel in Erk. 110:

$$P = \frac{4}{6} \cdot \frac{b h^2 S}{l}$$

Setzen wir nun $\frac{1}{2} g = P$ (s. Erkl 112), so ist:

$$g = \frac{4}{3} \cdot \frac{b h^2 S}{l}$$

Der Wert von g wird aber gefunden, wenn l bekannt ist. Wiegt nämlich die Stange auf einen Meter Länge $= \gamma$ Kilogramm, so ist:

$$g = l \gamma$$

also:

$$l \gamma = \frac{4}{3} \cdot \frac{b h^2 S}{l}$$

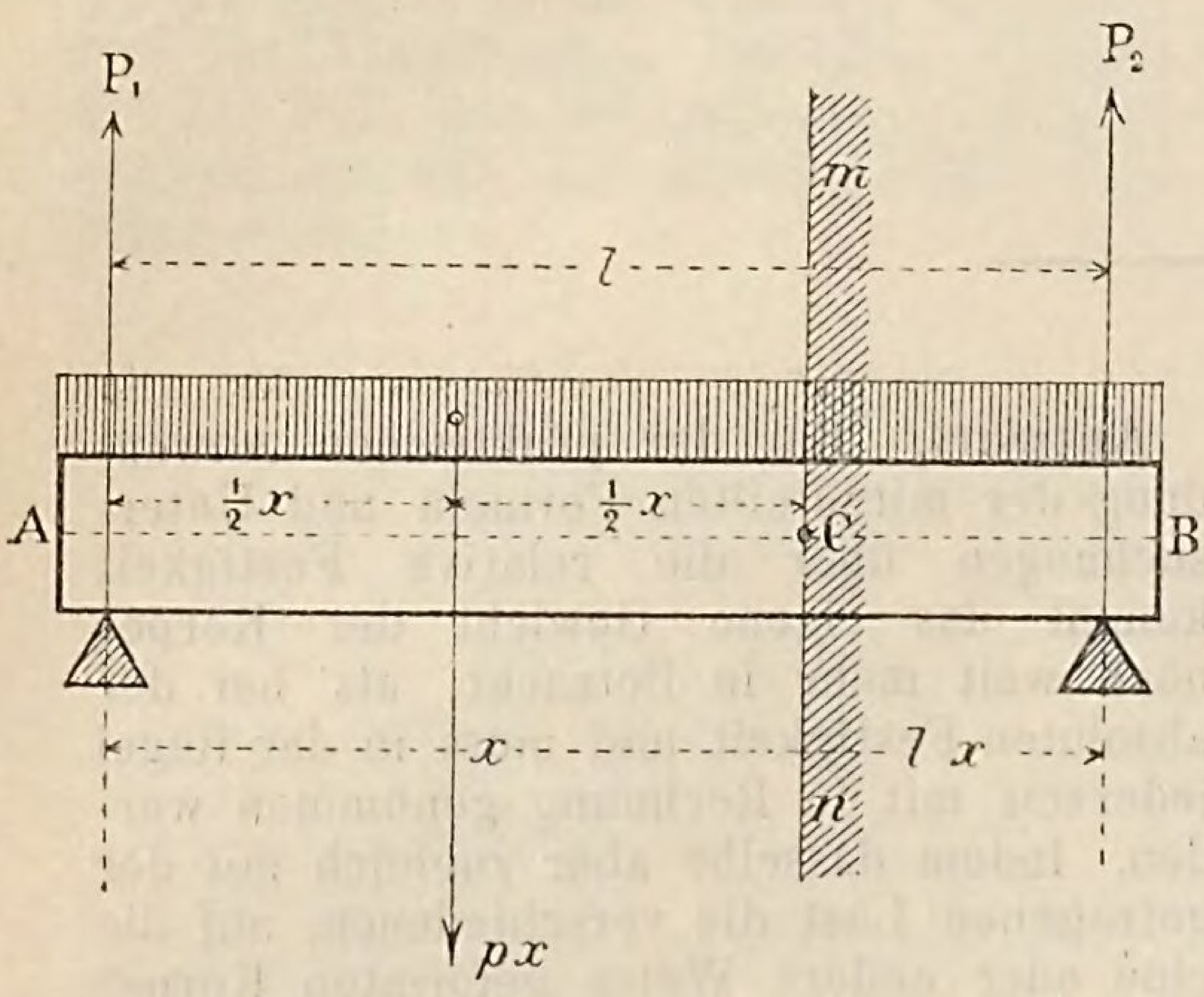
oder auf beiden Seiten die Gleichung mit l multipliziert und mit γ dividiert:

1). $l^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{b h^2 S}{\gamma}$

δ). Der Stab ist in zwei Punkten gestützt und die Last gleichmässig über die Stablänge verteilt.

Frage 96. Welche Formel dient im vorliegenden Fall zur Berechnung der Tragfähigkeit, welches Gesetz folgt aus dieser Formel und aus welcher Betrachtung ergibt sich die Richtigkeit dieses Gesetzes?

Figur 95.



Erkl. 114. Das statische Moment einer Kraft wird positiv oder negativ genommen, je nachdem die durch die Richtung der Kraft angezeigte Umdrehungsrichtung den Körper rechts herum oder links herum drehen würde. Welche von beiden Drehungsrichtungen man als die positive ansehen will, ist gleichgiltig, nur muss bei allen Kräften auf übereinstimmende Weise verfahren werden. In der Regel wählt man die von links nach rechts herumgerichtete Drehung als positive Drehungsrichtung, also diejenige, mit welcher die Drehung der Uhrzeiger übereinstimmt, während man die derselben entgegengesetzte Umlaufsrichtung als negativ bezeichnet. Dieses Produkt ist identisch mit der Fläche des Parallelogramms, das aus der betreffenden Kraft als einer Seite und deren Hebelarm als anderer Seite konstruiert werden kann, wenn man dieser Fläche ein Vorzeichen beilegt, das abhängig ist von der Richtung des um sie im Sinn der Kraftrichtung ausgeführten Umlaufs, denn der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich Grundlinie mal senkrechte Höhe.

Antwort. Im vorliegenden Fall dient zur Berechnung der Tragfähigkeit die Formel:

1). $Pl = 8QS$

d. h. der Balken ist in diesem Fall doppelt so stark, als wenn er bloss in der Mitte belastet wird, und achtmal so stark, als wenn er an einem Ende befestigt und am anderen belastet wird.

Beweis. Die über die Stablänge gleichmässig verteilte Last sei allgemein:

$$P = pl$$

ihr Angriffspunkt liegt in der Mitte zwischen A und B, d. h. in ihrem Schwerpunkt; demnach sind die durch den zweifachen Druck erzeugten Reaktionskräfte in A und B:

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}pl$$

Wir legen abermals in einem beliebigen Punkt C einen Schnitt $\overline{mn}$ und denken uns vorläufig den Teil $\overline{BC}$ eingemauert, dann sehen wir, dass der andere freie Teil $\overline{AC}$ durch zwei Momente in Anspruch genommen ist, nämlich:

1). durch die Kraft P_1 mit dem Hebelarm x nach rechts als im positiven Sinn drehend, und

2). durch die Kraft px mit dem Hebelarm $\frac{1}{2}x$ links, also im negativen Sinn drehend.

Das resultierende Moment für C ist demnach:

$$M_x = P_1 x - px \cdot \frac{1}{2}x$$

oder:

$$M_x = \frac{1}{2}plx - \frac{1}{2}px^2$$

oder:

$$M_x = \frac{1}{2}p\left(lx - x^2\right)$$

M_x wird aber seinen grössten Wert erreichen oder ein Maximum werden, wenn

$$x = \frac{1}{2}l \quad \text{(siehe Erkl. 111)}$$

d. h. der gefährliche Querschnitt liegt in der Mitte. Für denselben ist das resultierende Moment also:

Erkl. 115. Wenn eine Last gleichförmig über die ganze Balkenlänge verteilt ist, so etwa wie das Wasser in einem Behälter, der den ganzen Flächenraum eines Gebälkes überdeckt, so lässt sich ein derartiger Druck einem bei ungeänderter Festigkeit vermehrten Gewicht des Balkens vergleichen und auch in derselben Weise in Rechnung bringen, d. h. die relative Festigkeit der schwächsten Stelle, nämlich des durch die Mitte geführten Querschnitts muss die Grösse

$$\frac{1}{2}Pl + \frac{1}{2}Gl = 4QS$$

oder:

$$\frac{1}{2}(P+G) = \frac{4QS}{l}$$

oder für einen Balken von rechteckigem Querschnitt, bei welchem nach Gleich. 15). in Antw. auf Frage 59).

$$Q = \frac{1}{6}bh^2$$

beträgt:

$$1). \quad \frac{1}{2}(P+G) = \frac{4}{6}\cdot\frac{bh^2S}{l}$$

besitzen, wenn P das Gewicht der gleichförmig verteilten Last und G das des Balkens bezeichnet.

Nach derselben Formel lässt sich die Widerstandsfähigkeit eines Gebälks berechnen, auf welchem eine grosse Anzahl Personen zusammengedrängt stehen.

$$M_{max} = \frac{1}{2}p\left(l\cdot\frac{1}{2}l - \frac{1}{4}l^2\right)$$

oder:

$$M_{max} = \frac{1}{2}p\left(\frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{4}l^2\right)$$

oder:

$$M_{max} = \frac{1}{8}pl^2$$

Setzen wir nun wieder $pl = P$, so ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung für die Berechnung der Tragkraft oder der Dimensionen eines auf zwei Stützen ruhenden, durch eine über die freie Länge gleichmässig verteilte Last oder durch sein Eigengewicht belasteten prismatischen Körpers zu

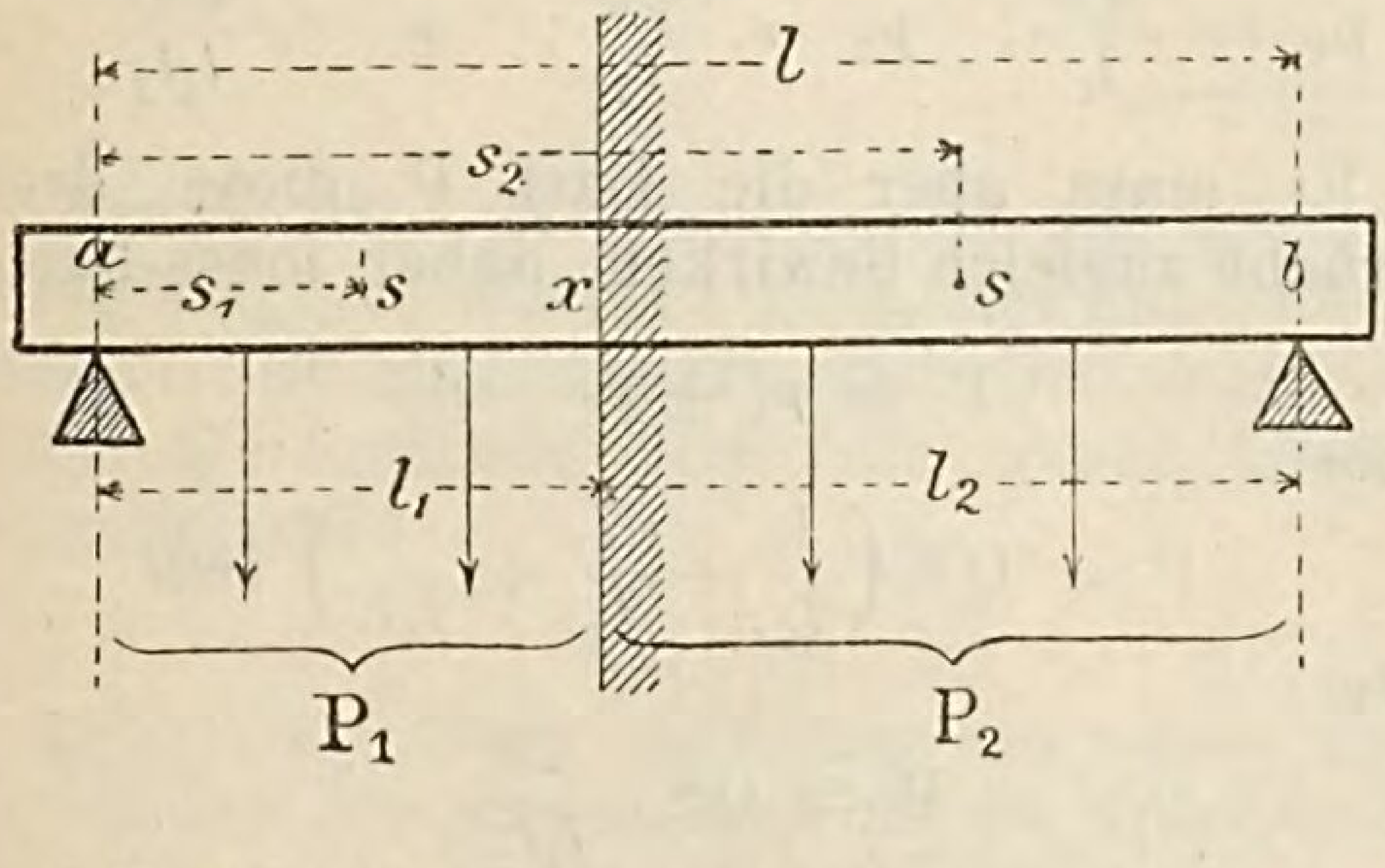
$$M = \frac{1}{8}pl^2 = QS = \frac{1}{8}Pl$$

oder:

$$Pl = 8QS$$

Frage 97. Wenn über die Länge eines Balkens verschiedene Lasten verteilt sind, von denen jede allein den Bruch nicht veranlassen könnte, wie lässt sich dann der Druck bestimmen, den ein beliebiger Punkt x im Abstand l_1 von dem einen der Stützpunkte des Balkens erfährt?

Figur 96.



Erkl. 116. Unter Anwendung der nebenstehenden Gleichung 1). findet man z. B. den Druck auf den Punkt b (Fig. 96), da in diesem Fall $l_1 = l$ und $P_2 = 0$

$$1). \quad D = \frac{P_1 s_1}{l} + \frac{G}{2}$$

Es bedeutet hier P_1 die Summe aller Lasten und s_1 den Abstand ihres Gesamtschwerpunkts vom Punkt a.

Antwort. Wenn über die Länge eines Balkens verschiedene Lasten verteilt sind, von welchen jede allein den Bruch nicht veranlassen könnte, so lässt sich der Druck, den ein beliebiger Punkt x (s. Fig. 96) im Abstand l_1 von dem einen der Stützpunkte des Balkens erfährt, in folgender Weise bestimmen:

Man denke sich den Balken an der Stelle x quer durchschnitten und unter x eine Stütze angebracht, welche stark genug ist, um den Balken in seiner Lage zu erhalten.. Nun sei P_1 die Summe der Gewichte links vom Punkt x, s_1 die Entfernung ihres Schwerpunkts vom Punkt a, also $P_1 s_1$ ihr Moment und $\frac{P_1 s_1}{l_1}$ der Druck, welchen sie auf Punkt x ausüben. Es sei ferner P_2 die Summe der Gewichte rechts vom Punkt x, s_2 die Entfernung ihres Schwerpunkts von a, daher $P_2(l - s_2)$ ihr Moment bezogen auf den Punkt b, und $\frac{P_2(l-s_2)}{l_2}$ ihr Druck auf den Punkt x. Der Gesamtdruck auf den Punkt x mit Einschluss des vom Balken abhängigen Drucks ist folglich:

Ebenso erhält man den Druck auf die Mitte der Balkenlänge, da hier $l_1 = l_2 = {}^1/_2\, l$ ist:

$$2). \ldots \frac{2 P_1 s_1 + 2 P_2 (l - s_2)}{l} + \frac{G}{2}$$

Dieser Druck ist, vorausgesetzt dass die drückenden Gewichte unverändert bleiben, um so kleiner, je kürzer die Entfernungen s_1 und $l - s_1$, d. h. je näher den Unterlagen die Lasten angebracht sind.

$$D = \frac{P_1 s_1}{l_1} + \frac{P_2 (l - s_2)}{l_2} + \frac{G}{2}$$

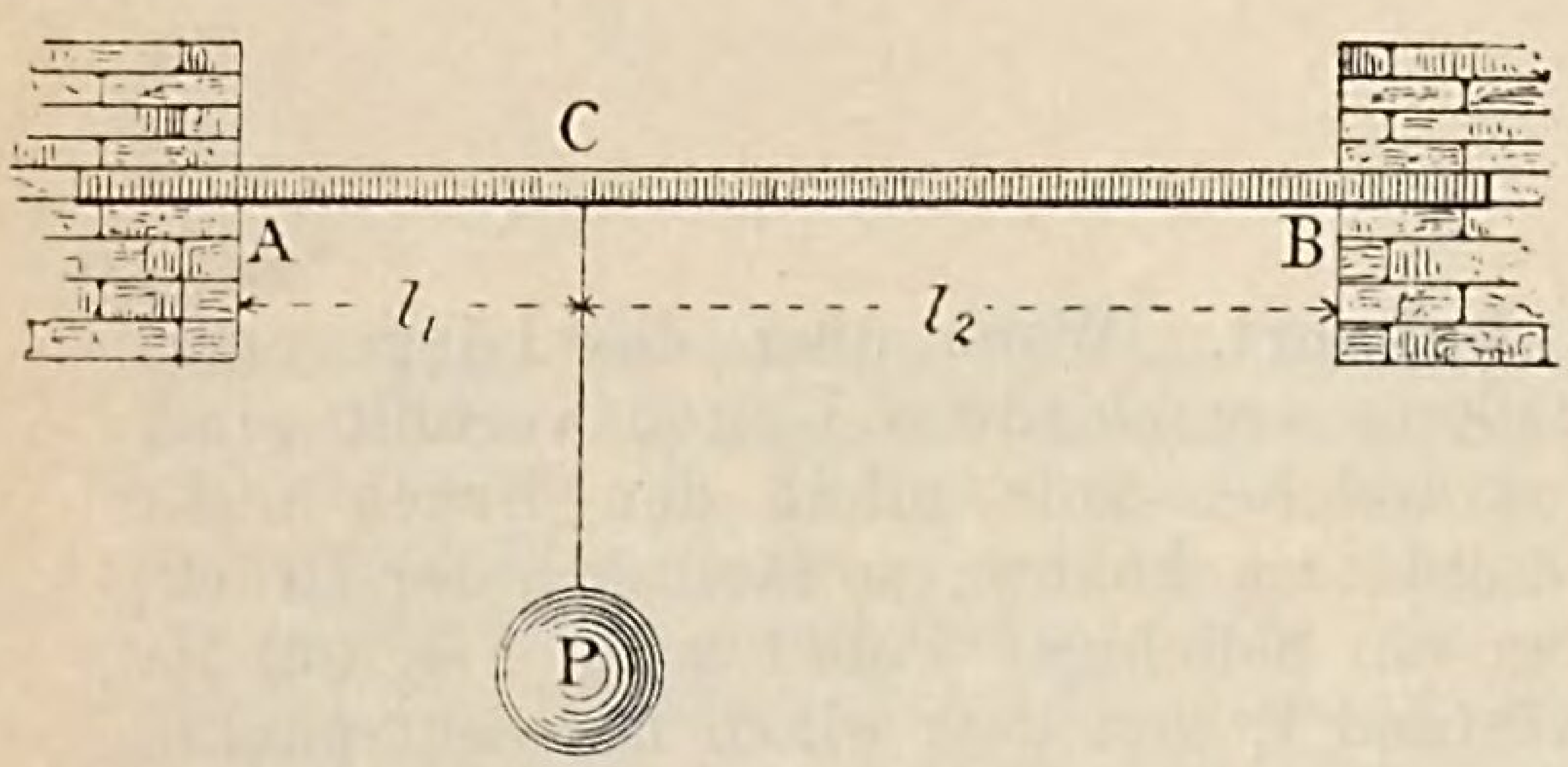
oder diese drei Brüche gleichnamig gemacht

$$1). \ldots D = \frac{2 l_2 P_1 s_2 + 2 l_1 P_2 (l - s_2) + l_1 l_2 G}{2 l_1 l_2}$$

ε). Der Balken sei an beiden Enden fest eingemauert.

Frage 98. Aus welcher Betrachtung ergibt sich die Tragfähigkeit eines Balkens, der mit beiden Enden fest eingemauert ist und an irgend einem Punkt zwischen seinen Befestigungsstellen die Last P trägt?

Figur 97.



Antwort. Ist der Balken mit beiden Enden hinlänglich fest eingemauert, so kann man annehmen, dass er an den drei Stellen A, B und C (s. Fig. 97) zugleich brechen wird, wenn P hinlänglich gross ist.

Bezeichnet man deshalb die Kräfte, welche in den Punkten A, B und C den Bruch erzeugen, mit p_1, p_2 und p, behält man ferner die bisherigen Bezeichnungen bei und berücksichtigt, dass auch in diesem Fall (nach Antw. der Frage 92):

$$p_1 l_1 = p_2 l_2 = \frac{p l_1 l_2}{l}$$

ist, so folgt:

$$p_1 l_1 = QS; \quad p_2 l_2 = QS \text{ und } \frac{p l_1 l_2}{l} = QS$$

oder:

$$p_1 = \frac{QS}{l_1}; \quad p_2 = \frac{QS}{l_2}; \quad p = \frac{QSl}{l_1 l_2}$$

Es muss aber die Last P diese drei Brüche zugleich bewirken, daher muss auch

$$P = p_1 + p_2 + p$$

oder:

$$P = QS\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{l}{l_1 l_2}\right) \text{ sein}$$

oder:

$$1). \ldots\ldots P = QS \cdot \frac{2l}{l_1 l_2}$$

oder für einen Balken von rechteckigem Querschnitt ist

$$2). \ldots\ldots P = \frac{2}{6} \cdot \frac{b h^2 l S}{l_1 l_2}$$

Frage 99. Welches Gesetz gilt von der Tragfähigkeit eines an beiden Enden fest eingemauerten Balkens, der mit der Kraft P belastet ist?

Erkl. 117. Zur Bestimmung der Krümmung und Senkung der elastischen Linie dient im vorliegenden Fall die Gleichung:

$$y = \frac{1}{16} \cdot \frac{P\,l\,x^3}{ET}\left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{l}\right)$$

und hieraus für $x = \frac{1}{2}\,l$ eingesetzt, ergibt sich die grösste Senkung:

$$s = \frac{1}{192} \cdot \frac{P\,l^3}{ET} = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{P\,l^3}{ET}\right)$$

woraus folgt, dass im vorliegenden Fall die Senkung nur $\frac{1}{64}$ mal so gross ist, als wenn der Balken an einem Ende befestigt und am anderen Ende belastet ist.

Antwort. Ist ein Balken mit seinen Enden fest eingemauert und in der Mitte mit einem Gewicht P belastet, so trägt der Balken in diesem Fall 8 mal soviel, als wenn er mit einem Ende befestigt ist und am freien Ende das brechende Gewicht trägt, oder es ist:

$$P\,l = 8\,Q\,S$$

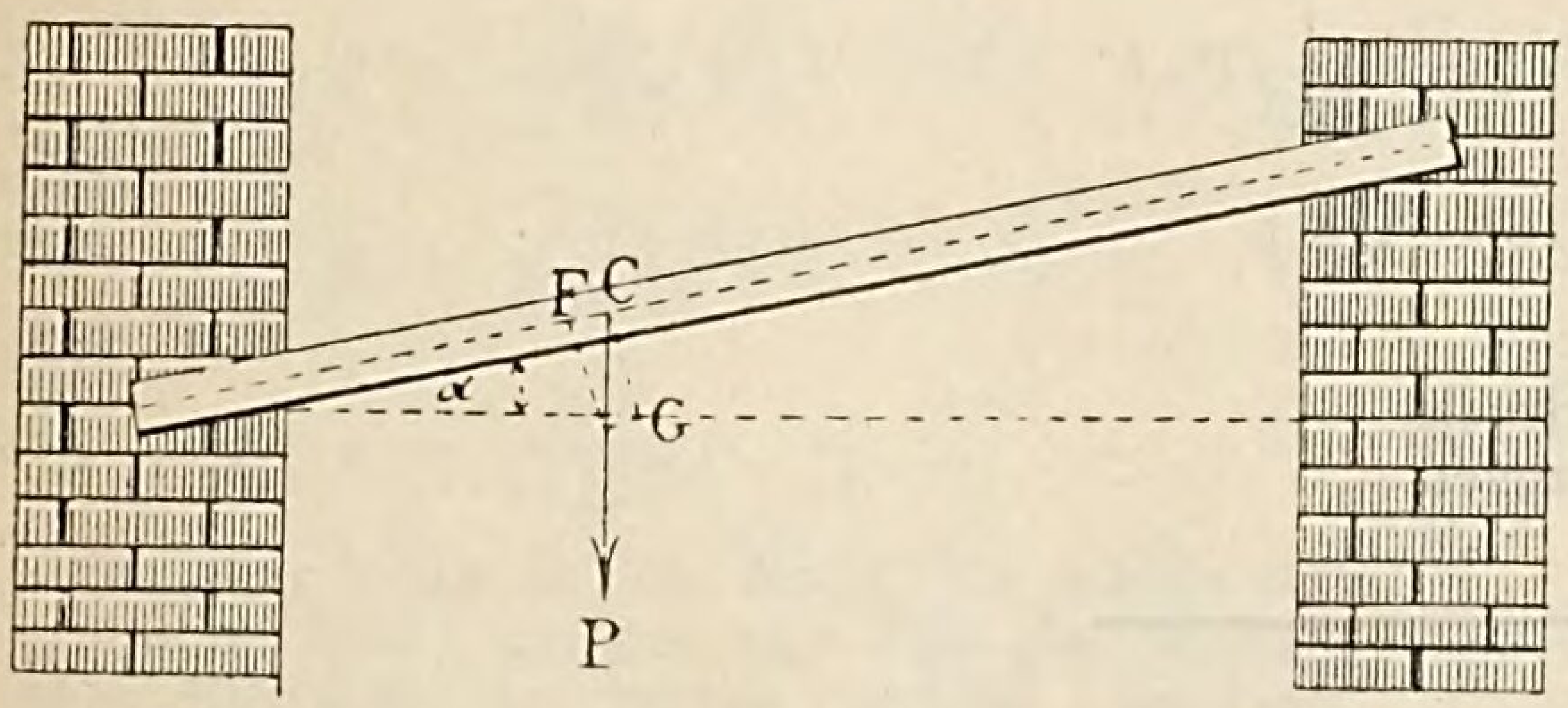
Beweis. Im vorliegenden Fall ist

$$l_1 = l_2 = \frac{1}{2}\,l$$

setzen wir diese Werte in die Geichung 1). in Antw. auf vor. Frage, so ergibt sich die obige Gleichung.

Frage 100. Was gilt von der Tragfähigkeit eines Balkens, der unter einem Winkel α gegen den Horizont geneigt eingemauert und in einem Punkt C belastet ist?

Figur 98.



Antwort. Für den Fall, dass der Balken unter einem Winkel α gegen den Horizont geneigt ist, kann nur die winkelrechte Seitenkraft $\overline{CG}$, s. Fig. 98, auf Bruch wirken. Dieselbe ist aber $= P \,.\, \cos\alpha$, die andere Komponente $\overline{CF} = P \,.\, \sin\alpha$ nimmt die rückwirkende Festigkeit des Balkens in Anspruch. Man erhält demnach aus Gleichung 1). in Antw. auf Frage 98:

$$1). \quad . \quad . \; P = \frac{Q\,S}{\cos\alpha} \cdot \frac{2\,l}{l_1 l_2}$$

oder für einen Balken von rechteckigem Querschnitt:

$$2). \quad . \quad . \; P = \frac{1}{3} \cdot \frac{b\,h^2\,l\,S}{l_1 l_2 \,.\, \cos\alpha}$$

Frage 101. Welches Gesetz gilt von der Tragfähigkeit eines Balkens, der mit beiden Enden fest eingemauert und bei dem die Last gleichmässig über die ganze Länge verteilt ist?

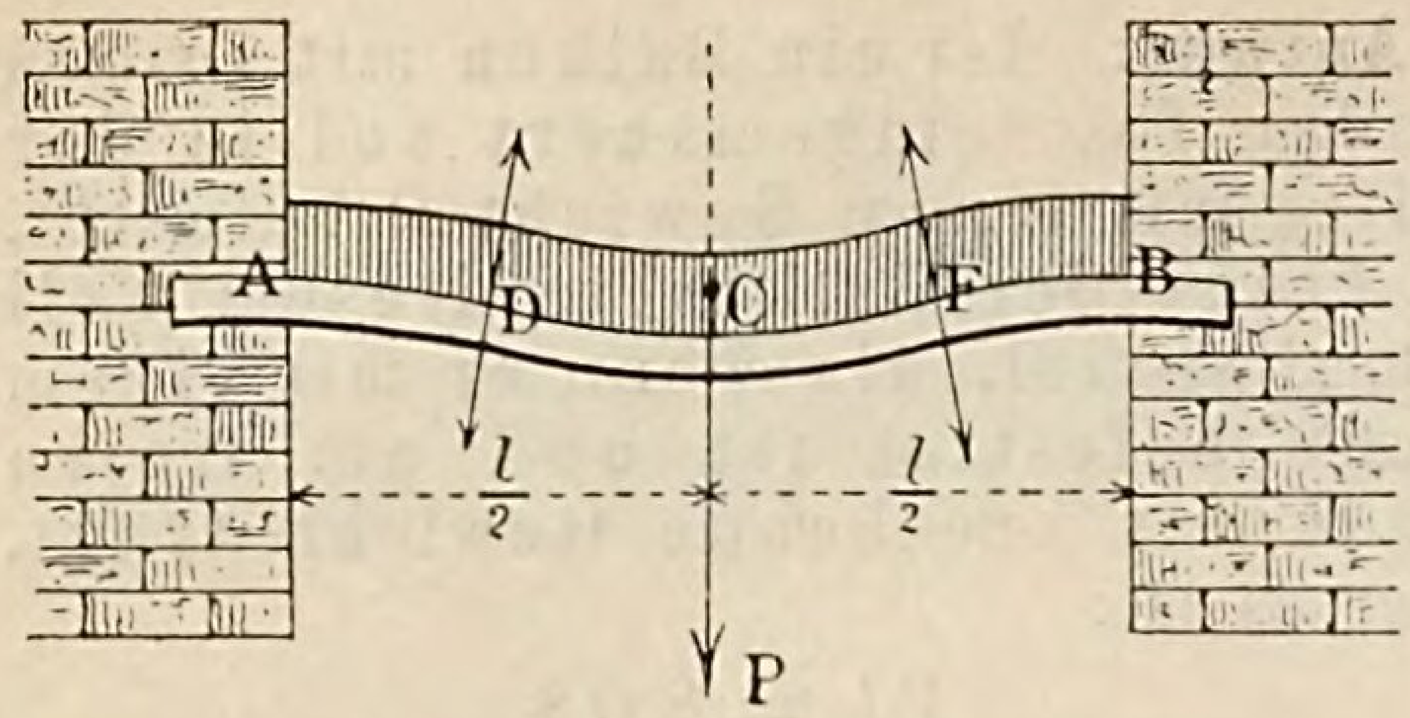
Erkl. 118. Wenn ein Balken mit seinen beiden Enden fest eingemauert und im Mittelpunkt belastet wird, so hat die elastische Linie in der Mitte einer jeden Balkenhälfte sogenannte Wendepunkte, d. h. die konkave Seite der Krümmung geht in eine konvexe über und die Spannung ist in diesen Punkten gleich Null.

Antwort. Ist die Last P gleichmässig über den ganzen Balken verteilt, so entstehen wieder drei Bruchstellen oder gefährliche Querschnitte, nämlich an beiden Enden und in der Mitte; die Wendepunkte[1]) liegen aber nicht, wie in dem Fall, wo die Last im Mittelpunkt angreift, in der Mitte einer jeden Hälfte, also nicht in einem Abstand $= \frac{l}{4}$ von den Punkten A und B, sondern wie Rechnung und Erfahrung zeigen, in einer Entfernung

$$\overline{AD} = \overline{BF} = \frac{1}{6}\,l\left(3 - \sqrt{3}\right) = 0{,}211\,l$$

[1]) Siehe Erkl. 118.

Figur 99.



Erkl. 119. Rechnen wir für $\overline{AD} = \overline{BF}$ anstatt 0,211 rund $^1/_5$, so ist $DF = {}^3/_5\, l$, somit hat jedes der Balkenstücke $\overline{AC}$ und $\overline{BF}$ die Last $\frac{P}{5}$, das Stück $\overline{DF}$ aber die Last $^3/_5$ P zu tragen. Zerlegt man die auf $\overline{AD}$ kommende Last $^1/_5$ P, so kommt an jedes Ende $^1/_{10}$ P.

Desgleichen erhält man durch Zerlegung der auf $\overline{DF}$ kommenden Last $^3/_5$ P zwei Seitenkräfte, welche in D und F wirksam sind, wovon jede $= {}^3/_{10}$ P ist.

Demnach wirken in dem Punkt D die zwei Kräfte $^1/_{10}$ P und $^3/_{10}$ P, und es ist darum ihr statisches Moment, auf den Punkt A bezogen:

$$\left(\frac{1}{10}P + \frac{3}{10}P\right) \cdot \frac{l}{5} = \frac{2}{5}P \cdot \frac{l}{5} = \frac{2}{25}P \cdot l = \frac{1}{12{,}5}P \cdot l$$

oder, wenn der nebenstehende Ausdruck $\frac{l}{6}\left(3 - \sqrt{3}\right)$ genau ausgerechnet wird, $= {}^1/_{12}\, P \cdot l$.

Auf gleiche Weise findet man, dass das Bruchmoment, auf die Mitte des Balkens bezogen, $= {}^1/_{24}\, P \cdot l$ ist.

von jeder Befestigungsstelle entfernt, und eben deshalb sind auch die drei Bruchstellen nicht in gleichem Grad gefährlich, sondern die beiden an den Befestigungsstellen sind etwas gefährlicher als die in der Mitte.

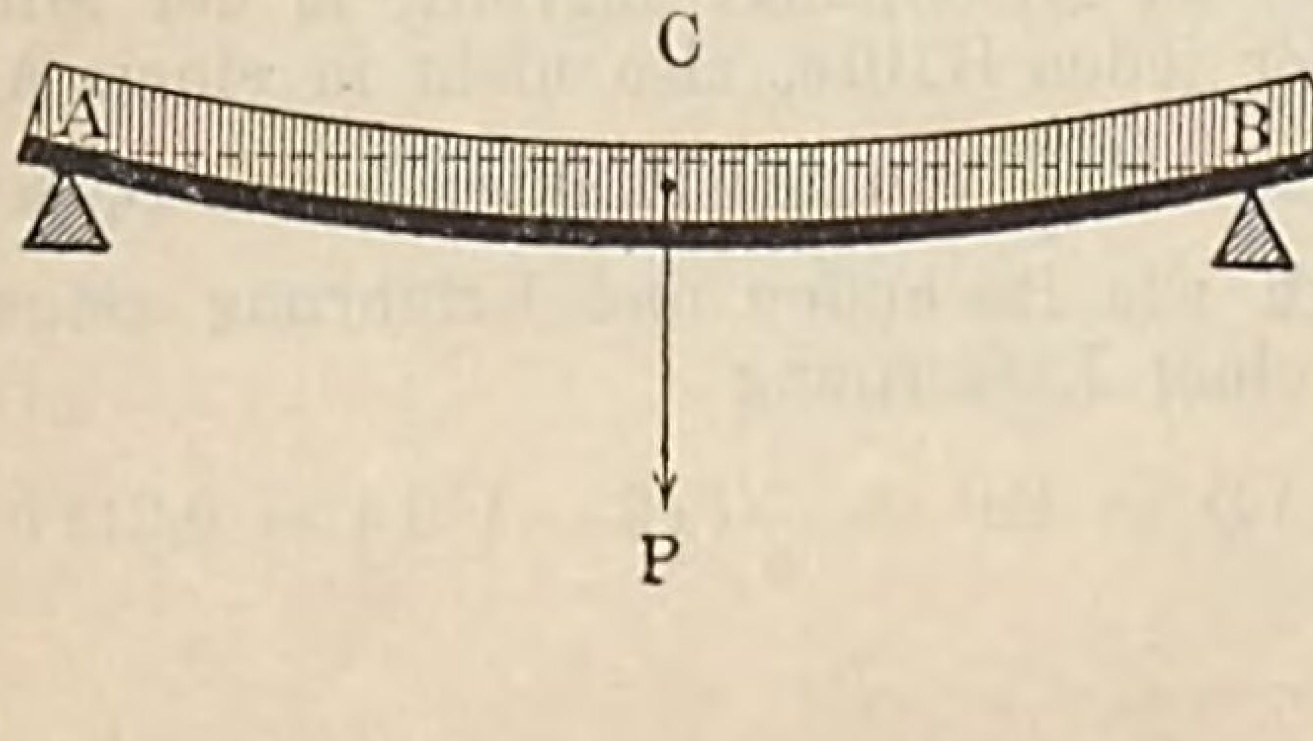
Die nähere Untersuchung dieses Falls, wie sie zuerst von *Rebhann* in Wien nachgewiesen worden ist, gibt das Resultat:

$$154). \quad . \quad . \quad . \; Pl = 12\,QS$$

d. h. im vorliegenden Fall trägt der Balken $1^1/_2$mal soviel, als wenn er in der Mitte belastet ist, und 12mal so viel, als wenn er an einem Ende befestigt und am anderen belastet wäre.

Frage 102. Nach welcher Formel lässt sich die Senkung der elastischen Linie eines an beiden Enden gestützten Stabes bestimmen, welcher sowohl durch ein in seiner Mitte wirkendes Gewicht, als auch gleichzeitig durch eine über seine ganze Länge gleichmässig verteilte Last gebogen wird, und aus welcher Betrachtung ergibt sich die Richtigkeit dieser Formel?

Figur 100.



Antwort. Wird ein an beiden Enden gestützter Stab durch ein in seiner Mitte angebrachtes Gewicht, sowie zugleich durch eine über seine ganze Länge gleich verteilte Last gebogen, so wird, wenn y die Ordinate irgend eines Punktes der elastischen Linie und x dessen Abscisse bezeichnet, die Senkung der elastischen Linie bestimmt durch die Gleichung:

$$y = \frac{(P + pl)\,x}{12\,ET}\left(\frac{3}{4}l^2 - x^2\right) - \frac{p\,x}{24\,ET}\left(\frac{1}{2}l^3 - x^3\right)$$

Liegt die elastische Faser wie in Fig. 100 mit beiden Enden auf, und ist das Gewicht P in der Mitte befestigt, so lassen sich die entsprechenden Gleichungen unmittelbar aus der Antw. auf Frage 91 ableiten.

Hilfsrechnung.

Setzt man in der nebenstehenden Gleichung 1). für $x = {}^1/_2\, l$ ein, so erhält man:

$$y = \frac{(P+pl)\,l}{12\,E\,T\,.\,2}\left(\frac{3}{4}l^2 - \frac{1}{4}l^2\right) - \frac{pl}{48\,E\,T}\left(\frac{1}{2}l^3 - \frac{1}{8}l^3\right)$$

oder:

$$y = \frac{(P+pl)\,l^3}{12\,E\,T\,.\,4} - \frac{pl\,.\,3\,l^3}{48\,.\,8\,E\,T}$$

oder:

$$y = \frac{(P+pl)\,l^3}{48\,E\,T} - \frac{pl^4}{128\,E\,T}$$

oder:

$$y = \frac{8\,P\,l^3 + 8\,pl^4 - 3\,pl^4}{384\,E\,T}$$

oder:

$$y = \frac{l^3}{384\,E\,T}\left(8\,P + 5\,pl\right)$$

Erkl. 120. Für den Fall, dass das Gewicht des Stabes unberücksichtigt bleiben soll und eine andere gleichmässig über die Länge des Stabes verteilte Last nicht vorhanden, sondern der Stab nur in seiner Mitte durch P belastet ist, erhält man aus der nebenstehenden Gleichung 1)., wenn man $p = 0$ setzt:

$$y = \frac{P\,x}{12\,E\,T}\left(\frac{3}{4}l^2 - x^2\right)$$

oder:

$$3).\quad y = \frac{P\,x}{48\,E\,T}\left(3\,l^2 - 4\,x^2\right)$$

und

$$4).\quad s = \frac{P\,l^3}{48\,E\,T}$$

Ist aber keine in der Mitte des Stabes angreifende Last, sondern nur eine gleichmässig über die Länge des Stabes verteilte Last resp. nur das Eigengewicht des Stabes in Rechnung zu bringen, also $P = 0$ zu setzen, so ergibt sich aus den nebenstehenden Gleichungen für

$$5).\quad y = \frac{p\,x}{24\,E\,T}\left(l^3 - 2\,l\,x^2 + x^3\right)$$

$$6).\quad s = \frac{5\,pl^4}{384\,E\,T}$$

oder, da $p = \frac{P}{l}$, so ist:

$$s = \frac{5\,P\,l^3}{384\,E\,T}$$

oder:

$$s = \frac{5}{128}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{P\,l^3}{E\,T}\right)$$

woraus folgt, dass im vorliegenden Fall die Senkung unter sonst gleichen Umständen nur ${}^5/_{128}$ mal so gross ist, als wenn der Balken an einem Ende befestigt und am anderen belastet ist.

Das Gewicht P und das gleichmässig verteilte Gewicht pl (wenn nämlich l die Länge $\overline{AB}$ der Faser bezeichnet) erzeugen, wie leicht nachzuweisen ist, auf jedem der Stützpunkte A und B den Druck

$$D = \frac{1}{2}\,(P + pl)$$

Man kann sich aber auch die Stützen wegdenken, die Faser in C festgehalten, und in A und B den Druck durch die aufwärts wirkenden Reaktionskräfte ersetzt, und man wird dann für den gegenwärtigen Fall in die Gleich. 1). in Antw. auf Frage 91 statt P

$$\frac{1}{2}\,(P + pl)$$

zu setzen haben. Der zweite Teil dieser Gleichung muss aber, nach der gegenwärtigen Voraussetzung negativ genommen werden, da derselbe p als Faktor enthält, welches, der Natur der Sache nach, senkrecht abwärts, also ${}^1/_2\,(P + pl)$ entgegengesetzt wirkt. Sonach erhält man aber, wenn zugleich beachtet wird, dass ${}^1/_2\, l$ statt l zu setzen ist:

$$1).\quad y = \frac{(P+pl)\,x}{12\,E\,T}\left(\frac{3}{4}l^2 - x^2\right) - \frac{p\,x}{24\,E\,T}\left(\frac{1}{2}l^3 - x^3\right)$$

Ebenso folgt die grösste Ordinate oder der Pfeil der Biegung:

$$2).\quad s = \frac{l^3}{384\,E\,T}\left(8\,P + 5\,pl\right)$$

oder:

$$s = \frac{l^3}{48\,E\,T}\left(P + \frac{5}{8}\,p\,l\right)$$

(s. nebenstehende Hilfsrechn.)

Frage 103. Welcher Schluss lässt sich aus der vorstehenden Gleichung 2). ziehen?

Erkl. 121. Aus der nebenstehenden Antwort ergibt sich mit Rücksicht auf die vorigen Gleichungen 5). und 6)., dass, wenn der Balken an beiden Enden eingemauert und die Last gleichmässig über seine Länge verteilt ist:

1). . . $y = \frac{P l x^2}{24 E T}\left(1 - 2\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$

und die grösste Senkung:

2). . . $s = \frac{1}{384} \cdot \frac{P l^3}{E T} = \frac{1}{128}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{P l^3}{E T}\right)$

woraus folgt, dass im vorliegenden Fall die grösste Senkung nur $^1/_{128}$ mal so gross ist, als wenn der Balken an einem Ende eingemauert und am anderen belastet ist.

Antwort. Die vorstehende Gleich. 2). zeigt, dass eine über die ganze Länge gleichmässig verteilte Last auf die Biegung gerade so wirkt, als ob $^5/_8$ davon in der Mitte des gewichtslosen Stabes aufgehängt wären, und dass sich die Senkungen oder Pfeile, welche bei derselben Last, die einmal in der Mitte angebracht und das anderemal über die Länge gleich verteilt wird, entstehen, wie 8 : 5 verhalten.

e). Bestimmung der Körperformen von gleicher relativer Festigkeit.

Frage 104. Welches sind die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Gattungen von Aufgaben?

Antwort. In der Praxis kommen am häufigsten zwei Gattungen von Aufgaben vor. Entweder ist

1). der Körper nach Form und Grösse schon bekannt (oder wird als bekannt angenommen) und man prüft durch Rechnung, ob er einer bestimmten Belastung genügt, d. h. man berechnet die Grösse der Materialspannung für die Querschnittseinheit, oder es sind

2). die Dimensionen eines Körpers direkt aus seiner Belastung zu berechnen.

Frage 105. Was ist in jedem der beiden vorgenannten Fälle zu berechnen, resp. näher zu bestimmen?

Erkl. 122. Da im vorhergehenden bereits die allgemeinen Formeln entwickelt sind, deren man zur Berechnung sowohl der Belastung als auch der Materialspannung und der Dimensionen prismatischer Stäbe für Biegungsbelastung bedarf, und damit zugleich die Mittel und Wege angegeben sind, einzelne Querschnitte eines beliebig geformten Körpers zu berechnen, so bleiben von den nebenstehend genannten Fällen nur noch zwei zu erörtern übrig:

α). Es ist die Form eines nicht prismatischen, sondern anders gestalteten geometrischen Körpers mit gewissen Eigenschaften gegeben und daraus ist die Tragfähigkeit (resp. sind die Dimensionen) zu berechnen, oder

β). Form und Dimensionen eines auf Biegung beanspruchten Körpers sind aus seiner Belastung zu ermitteln mit der Bedingung, dass in allen Querschnitten dieselbe Festigkeit besteht.

Antwort. Im ersten Fall braucht man immer nur den gefährlichen Querschnitt zu berechnen, oder wenn derselbe nicht besonders bekannt resp. ermittelt ist, so berechnet man die Tragfähigkeit resp. Materialspannung für einige Stellen des Körpers.

Im zweiten Fall ist zunächst zu entscheiden, ob der Körper

1). eine prismatische Form, oder

2). die Gestalt eines anderen geometrischen Raumgebildes haben soll, oder

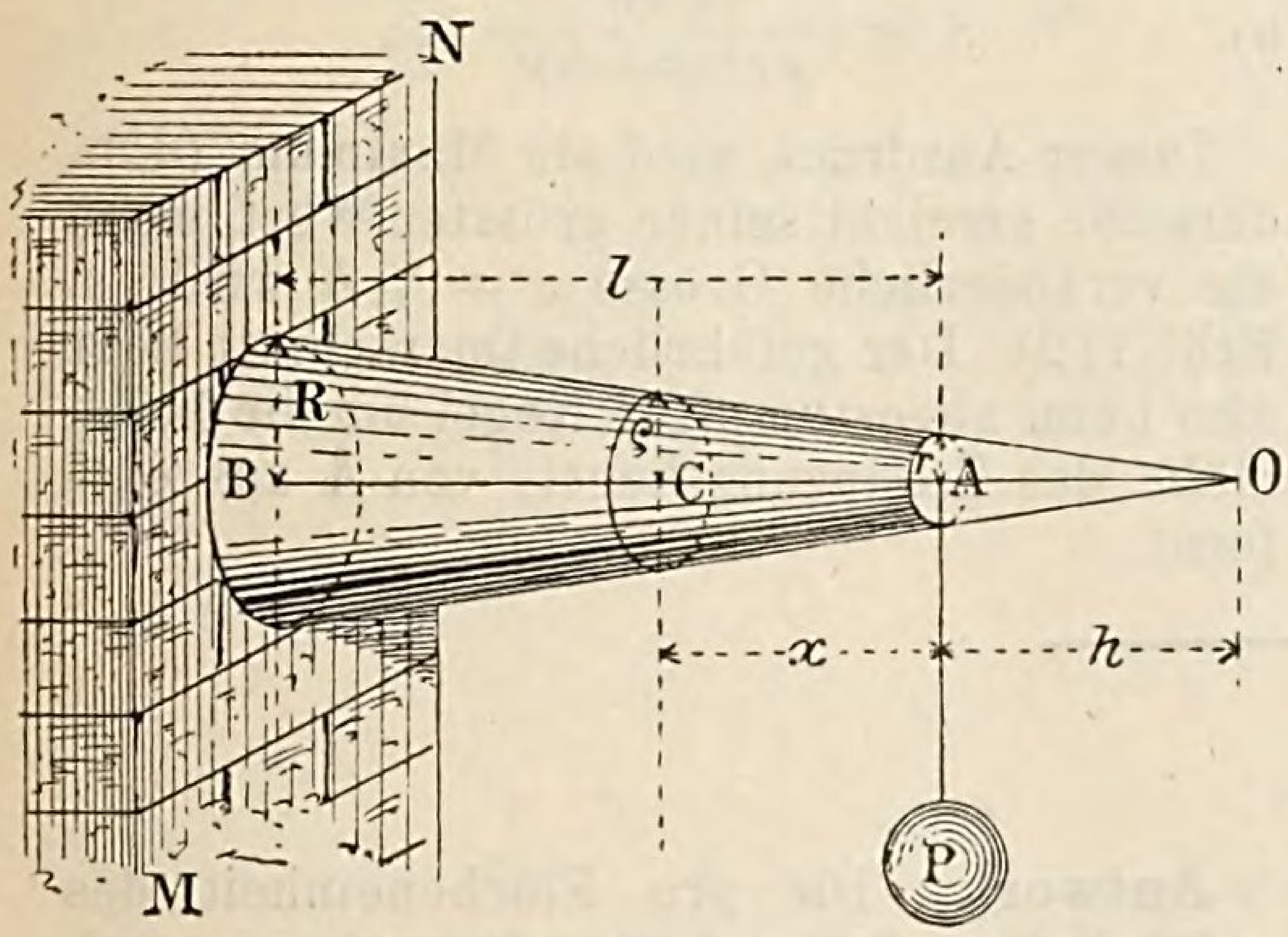
3). ob seine Form mit den Dimensionen derart aus der Belastung bestimmt werden soll, dass in jedem Querschnitt dieselbe Materialbeanspruchung, derselbe Widerstand oder dieselbe Spannung stattfindet.

α). Aus der gegebenen nicht prismatischen Form eines geometrischen Körpers ist seine Tragfähigkeit zu berechnen.

NB. Da Beispiele dieser Art in der Praxis nur selten vorkommen, so wird es genügen, hier nur ein solches zu behandeln.

Frage 106. Wo liegt bei einem Körper von der Form eines abgestumpften Kegels, der mit seiner grösseren Endfläche befestigt und durch eine an seiner kleineren Endfläche angreifende Kraft belastet ist, der gefährliche Querschnitt?

Figur 101.



Antwort. Der gefährliche Querschnitt liegt bei dem abgestumpften Kegel AB (Fig. 101) um die halbe Höhe des Ergänzungskegels AO von A aus entfernt.

Beweis. Der gefährliche Querschnitt liegt (nach Antwort auf Frage 89) da, wo die Materialspannung

$$S = \frac{Pl}{Q}$$

am grössten ist oder ein Maximum wird.

Die Radien der beiden kreisförmigen Endflächen sind R und r; ihr horizontaler Abstand $= l$. In der Entfernung $\overline{AC} = x$ vom freien Ende denken wir uns einen Schnitt, dessen Radius $= \varrho$ heissen möge und die Spannung der Flächeneinheit daselbst sei s.

Das Trägheitsmoment einer Kreisfläche ist nach Gleichung 1). Seite 98:

$$T = \frac{1}{64} d^4 \pi.$$

oder da im vorliegenden Fall $d = 2\varrho$ ist, so ist:

$$T = \frac{1}{64} (2\varrho)^4 \pi$$

oder:

$$T = \frac{1}{4} \varrho^4 \pi$$

Die Entfernung der äussersten Faserschicht von der neutralen Achse ist aber $Y = \varrho$, demnach ist, mit Rücksicht auf Formel 37). auf Seite 90:

$$\frac{Y}{T} = \frac{1}{Q}$$

oder:

$$\frac{Y}{T} = \frac{\varrho}{\frac{1}{4}\varrho^4 \pi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{Q} = \frac{4}{\varrho^3 \pi}$$

also:

$$Q = \frac{\varrho^3 \pi}{4}$$

Nach Antw. auf Frage 89). ist die Materialspannung $S = \frac{Px}{Q}$ für den vorliegenden Fall:

a). $S = Px \cdot \frac{4}{\varrho^3 \pi}$

Um nun die Unbekannte ϱ auf einfache Weise zu ermitteln, denke man sich den Kegel voll ergänzt und die Höhe des Ergänzungskegels $= h$, dann verhält sich

$$\varrho : r = (x + h) : h$$

denn die durch den Querschnitt entstehenden Dreiecke sind einander gleich, und daraus folgt:

$$\varrho = \frac{r\,(x+h)}{h}$$

Setzen wir diesen Wert von ϱ in die dritte Potenz erhoben in die obige Gleichung a). ein, so ergibt sich:

$$S = \frac{4\,P\,x}{\pi \left(\frac{r}{h}\right)^3 (x+h)^3}$$

oder:

$$\text{b)}. \quad . \quad . \quad S = \frac{4\,P\,x\,h^3}{\pi\,r^3 (x+h)^3}$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum (d. h. derselbe erreicht seinen grössten Wert, wenn die veränderliche Grösse $x = {}^1\!/_2\,h$ wird (s. Erkl. 112). Der gefährliche Querschnitt liegt also beim abgestumpften Kegel um die halbe Höhe des Ergänzungskegels von A aus entfernt.

Frage 107. Wie gross ist die pro Flächeneinheit des gefährlichen Querschnitts bei einem nach Art der Fig. 101 beanspruchten abgestumpften Kegel eintretende Materialspannung?

Antwort. Die pro Flächeneinheit des gefährlichen Querschnitts bei einem nach Art der Fig. 101 beanspruchten abgestumpften Kegels auftretende grösste Materialspannung ist

$$S_{max} = \frac{16}{27} \cdot \frac{P\,h}{\pi\,r^3}$$

Um diese Formel zu erhalten, braucht man in die Gleichung b). der vorigen Antwort für x nur den schon oben erwähnten Wert $= \frac{1}{2} h$ einzusetzen, so ergibt sich:

$$S_{max} = \frac{4\,P\,h^3 . \frac{1}{2} h}{\pi\,r^3 \left(\frac{1}{2} h + h\right)^3}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung die ersterwähnte Gleichung.

Hilfsrechnung.

$\left(\frac{h}{2} + h\right)^3$ gibt nach der Formel

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$= \frac{h^3}{8} + 3 \cdot \frac{h^2}{4} \cdot h + 3 \cdot \frac{h}{2} \cdot h^2 + h^3$$

oder:

$$= \frac{h^3}{8} + \frac{3}{4} h^3 + \frac{3}{2} h^3 + h^3$$

oder:

$$= \frac{27}{8} h^3$$

also ist:

$$S_{max} = \frac{4\,P\,h^3 \cdot \frac{1}{2} h}{\pi\,r^3 \cdot \frac{27}{8} h^3} = \frac{4\,P\,h^4 . 8}{2\,\pi\,r^3 . 27\,h^3}$$

oder:

$$S_{max} = \frac{16}{27} \cdot \frac{P\,h}{\pi\,r^3}$$

Frage 108. Welchen Wert erhält man schliesslich für die Tragfähigkeit des abgestumpften Kegels?

Antwort. Die Tragfähigkeit des abgestumpften Kegels ist:

$$P = \frac{27}{16} \cdot \frac{\pi r^3}{l} \left(\frac{R}{r} - 1\right) S$$

denn der Abstand des gefährlichen Querschnitts bei dem nach Art der Fig. 101 beanspruchten Kegels vom freien Ende ist nach Antw. auf Frage 106:

$$x = \frac{h}{2}$$

und die Höhe h des Ergänzungskegels ist, aus der in der vorhergehenden Antwort gegebenen Gleichung abgeleitet:

$$h = \frac{27}{16} \cdot \frac{\pi r^3}{P} \cdot s_{max}$$

oder geometrisch abgeleitet (siehe Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen I. Buch Seite 89):

$$h = \frac{r l}{R - r} = \frac{l}{\frac{R}{r} - 1}$$

Setzt man diese beiden Werte von h einander gleich, so fällt die Höhe des Ergänzungskegels weg und man erhält für die Tragfähigkeit des abgestumpften Kegels, wenn man im gefährlichen Querschnitt eine Maximalspannung

$$s_{max} = S$$

annimmt, die vorstehende Gleichung.

Hilfsrechnung.

Setzen wir $h = h$, so ergibt sich aus den beiden nebenstehenden Gleichungen:

$$\frac{27}{16} \cdot \frac{\pi r^3}{P} \cdot s_{max} = \frac{l}{\frac{R}{r} - 1}$$

oder:

$$\frac{27}{16} \cdot \frac{\pi r^3 . S}{l} \cdot \left(\frac{R}{3} - 1\right) = P$$

oder auch:

$$\frac{27}{16} \cdot \frac{\pi r^3}{l} \cdot (R - r) \cdot S = P$$

β). Aus der gegebenen Belastung sind Form und Dimensionen eines Körpers zu berechnen, der in allen Querschnitten dieselbe Festigkeit besitzt.

Frage 109. Wie lässt sich die Bedingung, dass in jedem Querschnitt des auf Biegung beanspruchten Körpers dieselbe Festigkeit bestehen soll, mathematisch ausdrücken?

Antwort. Die Bedingung, dass in jedem Querschnitt des auf Biegung beanspruchten Körpers dieselbe Festigkeit bestehen soll, lässt sich mathematisch folgendermassen ausdrücken:

$$S = M \cdot \frac{Y}{T} = \frac{M}{Q} = \text{konstant},$$

d. h. die grösste zulässige Materialspannung hat in allen Querschnitten des betreffenden Körpers dieselbe Grösse.

Erkl. 123. Aus der nebenstehenden Gleichung ist ersichtlich, dass die grösste in einem bestimmten Querschnitt vorkommende Spannung S einerseits von dem Moment M der biegenden Kraft, anderseits von der Querschnittsform an der betreffenden Stelle des Balkens abhängt. Gibt man nun dem Balken eine solche Form, dass das Produkt der beiden vorerwähnten Grössen in allen Querschnittsflächen gleiche Werte erhält und bezeichnet man mit M_1 und $\frac{Y_1}{T_1}$ resp. die Werte, welche die veränderlichen Grössen M und $\frac{Y}{T}$ an einer bestimmten willkürlich zu wählenden Stelle des Balkens an-

nehmen, so ergibt sich als allgemeine Bedingungsgleichung für einen Träger von gleichem Widerstand die Gleichung:

$$M \cdot \frac{Y}{T} = M_1 \cdot \frac{Y_1}{T_1}$$

Frage 110. Es wurde bereits früher bemerkt, dass ein an einem Ende befestigter, am anderen Ende belasteter Balken unter sonst gleichen Umständen immer an der Stelle brechen wird, wo er aus der Wand hervorragt, in dem für diesen Querschnitt das Moment der Belastung am grössten ist. Was folgt aus dieser Thatsache für die übrigen Querschnitte eines prismatischen Körpers?

Antwort. Aus dem was bereits früher s. Antw. auf Frage 89 über den gefährlichen Querschnitt bemerkt wurde, folgt, dass bei einem prismatischen Körper, der mit einem Ende befestigt am anderen eine Last trägt, alle übrigen Querschnitte eine unnütze Stärke besitzen, und also um so kleiner sein können, je weiter sie von der Brechungsebene oder dem gefährlichen Querschnitt oder der Befestigungsstelle entfernt sind.

Frage 111. Auf welche Weise gelangt man im allgemeinen zu einem Körper von gleichem Widerstand oder gleicher relativer Festigkeit?

Antwort. Stellt man sich die Aufgabe, sämtliche Querschnitte eines Körpers von der Befestigungsstelle desselben nach seinem freien Ende hin so abnehmen zu lassen, dass sie alle die nämliche Festigkeit besitzen, der Bruch also ebensogut in dem einen als dem anderen erfolgen kann, so erhält man einen Körper von gleichem Widerstand oder gleicher relativer Festigkeit.

Frage 112. Welcher allgemeinen Formel müssen alle Körper von rechteckigem Querschnitt, die mit einem Ende normal zu ihrer geometrischen Achse in eine feste Wand eingeschlossen und am anderen freien Ende durch eine Normalkraft belastet sind, genügen, wenn sie überall gleiche relative Festigkeit besitzen sollen?

Antwort. Alle Körper von gleicher Festigkeit und nebenerwähnter Anordnung müssen der allgemeinen Formel:

$$\frac{x}{yz^2} = \frac{l}{bh^2}$$

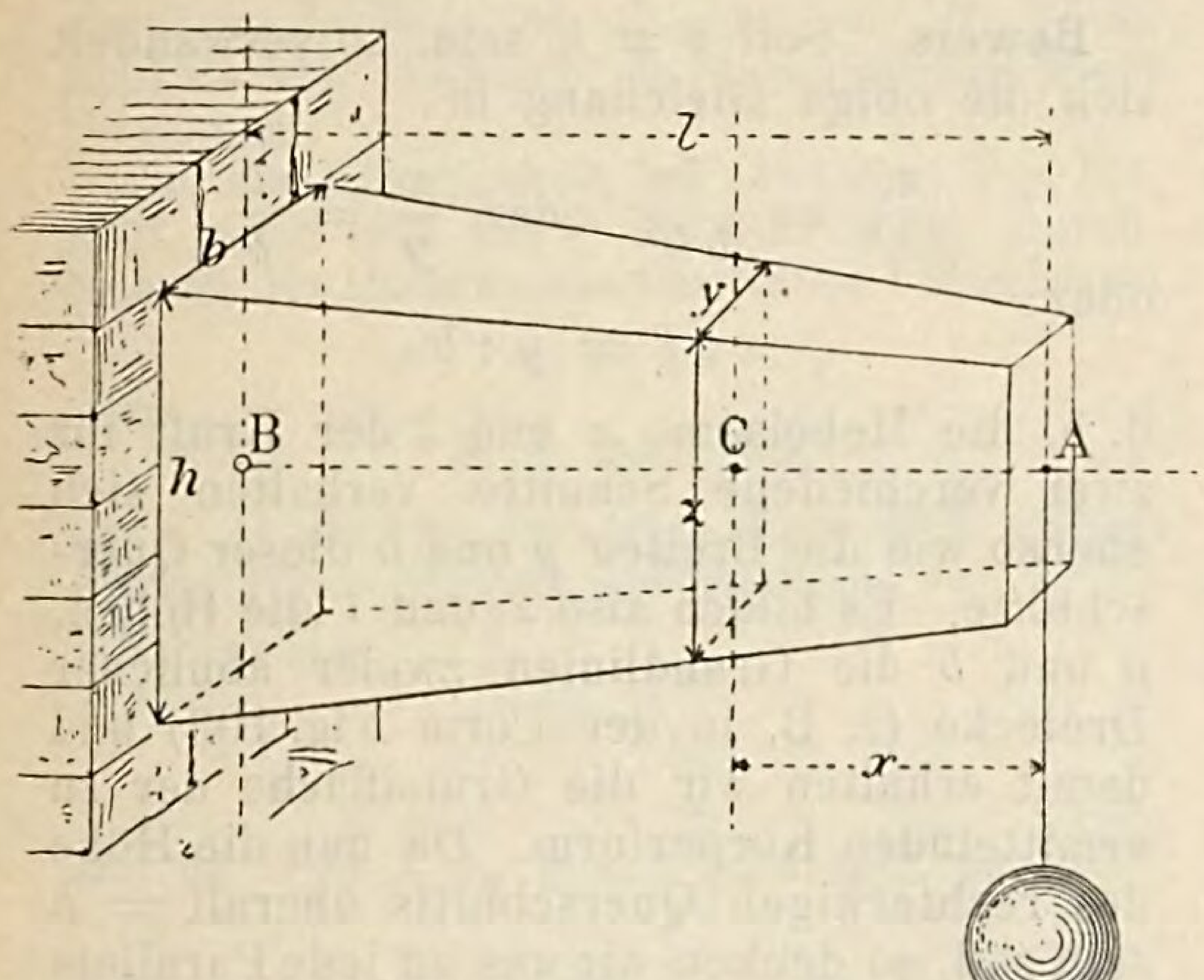
genügen, welcher auf verschiedene Weise entsprochen werden kann.

Frage 113. Auf welche Art und Weise lässt sich die nebenstehende Formel entwickeln?

Antwort. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, der Querschnitt des Balkens sei ein Rechteck und die Breite und Höhe desselben an der Befestigungsstelle seien b und h, im Abstand x vom äusseren Ende dagegen y und z, so ist für den Normalschnitt, den wir uns durch C gelegt denken, das Biegungsmoment

$$M = Px$$

Figur 102.



das Trägheitsmoment nach Gleich. 1). auf S. 91:

$$T = \frac{1}{12} y z^3$$

und der Abstand der am stärksten gespannten Faser von der neutralen Schicht

$$Y = \frac{1}{2} z$$

Setzen wir alle diese Werte in die in Antw. auf Frage 109 gegebene Gleichung

$$S = M \cdot \frac{Y}{T}$$

so ergibt sich

$$S = \frac{Px \cdot \frac{1}{2} z}{\frac{1}{12} y z^3}$$

oder:

$$S = \frac{6 P x}{y z^2}$$

An der wirklichen Befestigungsstelle in B ergibt sich in ganz derselben Weise und unter der Voraussetzung, dass dieselbe Materialspannung S besteht:

$$S = Pl \cdot \frac{1}{2} h \cdot \frac{12}{b h^3}$$

oder:

$$S = \frac{6 P l}{b h^2}$$

Beide Werte von S einander gleichgesetzt, ist:

$$\frac{6 P x}{y z^2} = \frac{6 P l}{b h^2}$$

und die gleichen Faktoren auf beiden Seiten gehoben:

$$\frac{x}{y z^2} = \frac{l}{b h^2}$$

Frage 114. Was ist aus dieser allgemeinen Formel ersichtlich, und wievielerlei Körperformen gibt es, die bei rechteckigem Querschnitt gleiche relative Festigkeit besitzen?

Antwort. Da der vorstehenden Formel auf verschiedene Weise entsprochen werden kann, so ist daraus ersichtlich, dass es für die vorliegende Beanspruchungsweise mehrere Körperformen für gleiche Festigkeit mit rechteckigem Querschnitt geben muss, und zwar kann

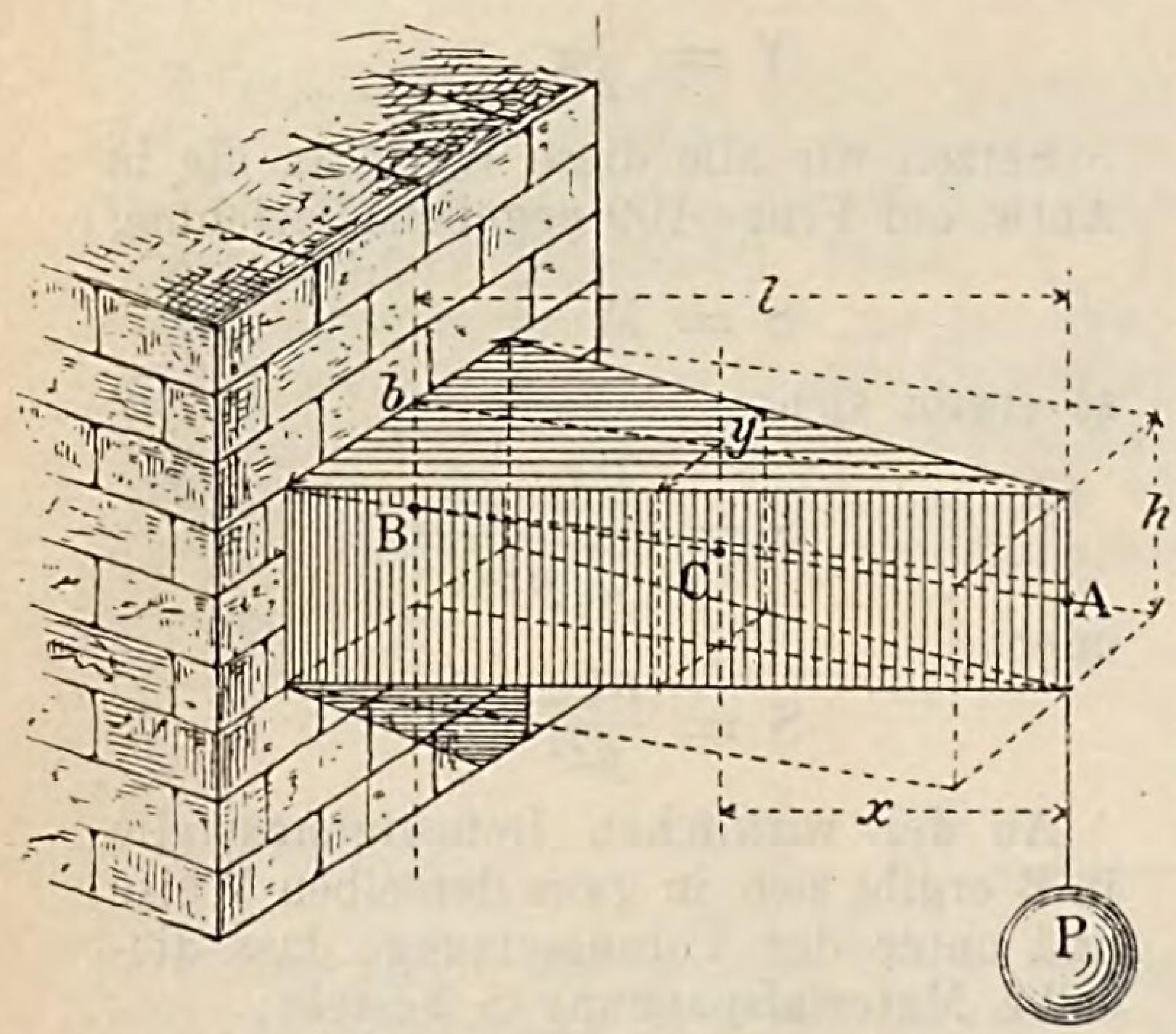
1). bloss die Breite y mit der Entfernung x sich ändern, während die Höhe $z = h$ eine unveränderliche Grösse beibehält oder konstant ist;

2). kann bloss die Höhe z mit dem Abstand x sich ändern, während die Breite $y = b$ unveränderlich bleibt, oder

3). kann sich y und z gleichzeitig mit x ändern und dabei stets proportioniert zu b und h bleiben, u. s. w.

Frage 115. Zu welcher Körperform führt die unter 1). vorgenannte Bedingung, dass die Höhe $z = h$ des rechteckigen Querschnitts konstant sei?

Figur 103.



Erkl. 124. Das Volumen des in der Fig. 103 dargestellten Körpers von konstanter Biegungsfestigkeit ist

$$V_1 = \frac{b\,l}{2} h$$

Das Volumen eines prismatischen Körpers (dessen kongruente Querschnitte normal zur neutralen Achse AB sind) von derselben Tragfähigkeit

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^2 s}{l}$$

wäre

$$V = b\,l\,h$$

Es verhalten sich demnach die Volumina und bei demselben Material die Gewichte eines solchen Körpers (Fig. 103) von gleicher Festigkeit und eines in Bezug auf Tragfähigkeit gleichwertigen prismatischen Körpers zu einander wie

$$1 : 2$$

d. h. man erzielt durch Anordnung des Körpers Fig. 103 von gleicher Biegungsfestigkeit, gegenüber dem gleich tragfähigen prismatischen (in der Fig 103 punktierten) Körpers eine Materialersparnis von 50 %.

Erkl. 125. Bei einem Träger von konstanter Höhe und gleichem Widerstand krümmt sich die elastische Linie unter Einwirkung der biegenden Kraft nach einem Kreisbogen, denn es ist nach Gleich. 1). Seite 107 der Krümmungshalbmessser

$$R = \frac{E\,T}{P\,l}$$

Setzen wir in diese Gleichung für

$$P\,l = \frac{S\,T}{Y}$$ [siehe Gleichung 9). auf Seite 79]

so ergibt sich

Antwort. Der erste der vorgenannten Fälle führt zur Keilform, wobei die Basis ein gleichschenkliges oder rechtwinkliges Dreieck ist.

Beweis. Soll $z = h$ sein, so verwandelt sich die obige Gleichung in

$$\frac{x}{y h^2} = \frac{l}{b h^2} \text{ oder } \frac{x}{y} = \frac{l}{b}$$

oder:

$$x : l = y : b$$

d. h. die Hebelarme x und l der Kraft für zwei verchiedene Schnitte verhalten sich ebenso wie die Breiten y und b dieser Querschnitte. Es bilden also x und l die Höhen, y und b die Grundlinien zweier ähnlicher Dreiecke (z. B. in der Form Fig. 103) und damit erhalten wir die Grundfläche der zu ermittelnden Körperform. Da nun die Höhe des rechteckigen Querschnitts überall $= h$ sein soll, so denken wir uns an jede Parallele zu b und y in deren Endpunkten die Höhe h normal angetragen und erhalten so die Seitenbegrenzungen des Körpers in Gestalt von Rechtecken mit der Höhe h. Das Ganze ergibt die Form des dreiseitigen Prismas oder Keils.

Für jeden beliebig angenommenen Abstand x vom freien Ende erhält man die zugehörige Breite des Querschnitts aus obiger Proportion zu

$$1). \quad . \; . \; . \; . \quad y = \frac{b}{l} \cdot x$$

woraus, wenn b und l bekannt, resp. eins oder das andere aus der Belastung P ermittelt ist, mit Hinzunahme der konstanten Höhe h sich leicht der Körper konstruieren lässt.

Die Tragfähigkeit ist für jeden Querschnitt dieselbe, nämlich

$$P = \frac{Q\,S}{l}$$

oder nach Gleichung 16). auf Seite 82:

$$2). \quad . \; . \; . \; . \quad P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^2 s}{l}$$

$$R = \frac{EY}{S}$$

Y ist die sich gleich bleibende Höhe, E und S sind ebenfalls konstant, demnach ist auch der Krümmungshalbmesser R konstant und die elastische Linie ist ein Kreisbogen. Mit Rücksicht darauf, lässt sich die Durchbiegung leicht berechnen

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, Fig. 104, folgt, wenn man mit δ die sehr kleine Durchbiegung des Balkens von der Länge l bezeichnet

$$\delta : l = l : 2R - \delta$$

oder:

$$l^2 = 2\delta R - \delta^2$$

worin δ^2 als das Quadrat einer sehr kleinen Grösse vernachlässigt werden kann.

Es ist also

$$\delta = \frac{l^2}{2R}$$

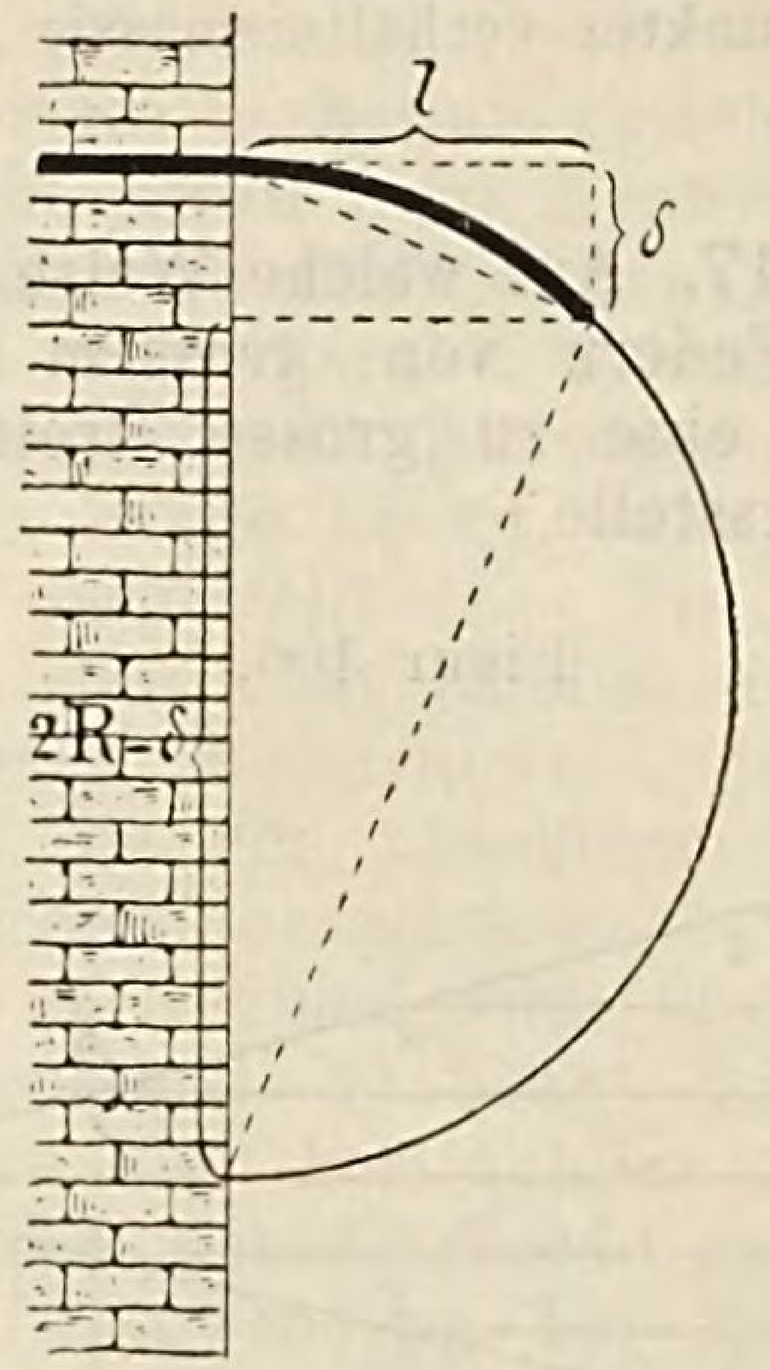
und da $R = \frac{EY}{S}$, $S = \frac{M}{Q}$, also $R = \frac{YEQ}{M}$

und da $Q = \frac{T}{Y}$ (s. Gleich. 10, Seite 79), also $R = \frac{ET}{M}$

ist, so ist die Maximaldurchbiegung

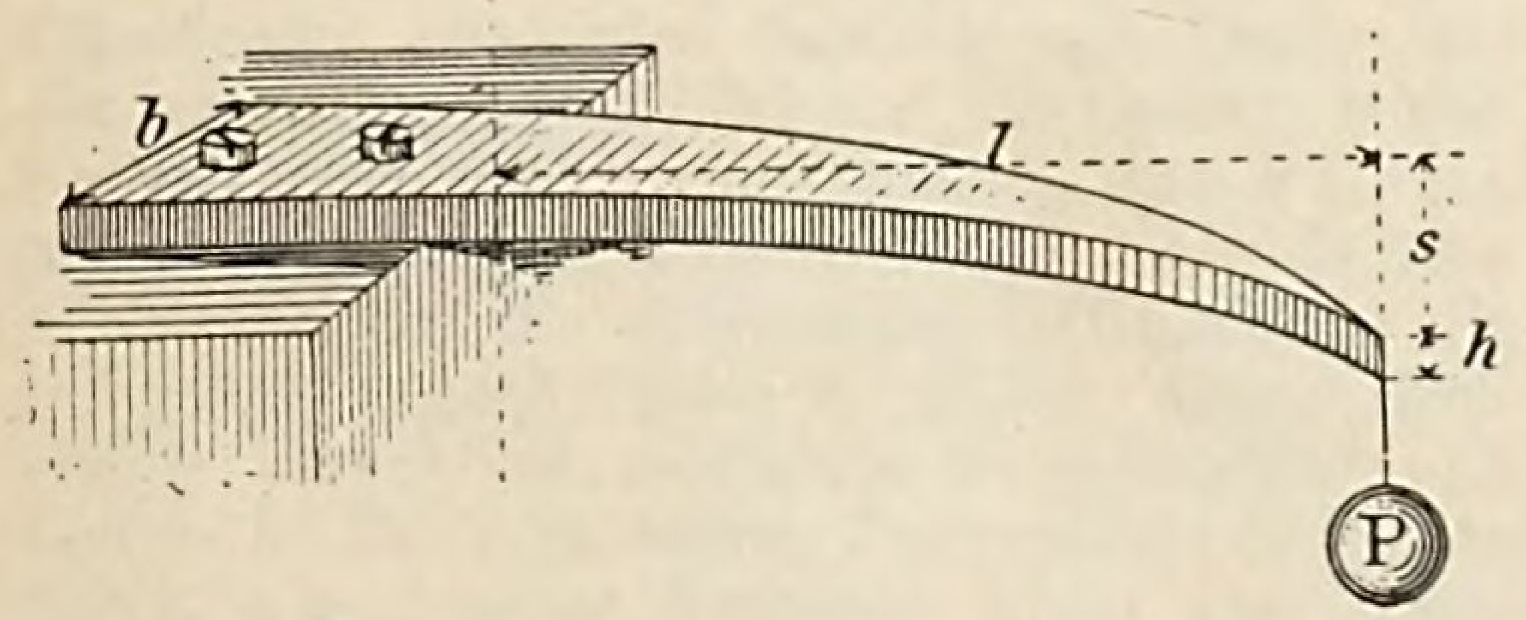
$$s = \frac{Ml^2}{2ET}$$

Figur 104.



Frage 116. Wo und warum benutzt man die oben entwickelte Form des **dreiseitigen Prismas oder Normalkeils** besonders häufig?

Figur 105.



Erkl. 126. Die im vorliegenden Fall zu berechnenden Grössen sind die Dimensionen h und b des rechteckigen Querschnitts an der Befestigungsstelle. Der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie ist nach Gleichung 1). S. 107:

$$R = \frac{ET}{Px}$$

also im vorliegenden Fall, wo $x = l$

$$R = \frac{ET}{Pl}$$

und da nach Gleichung 41). Seite 91:

$$T = \frac{1}{12} b h^3$$

so ist:

Antwort. Die oben ermittelte Form des dreiseitigen Prismas oder Normalkeils findet häufig Anwendung bei der Berechnung der **Federwerke** (Wagenfedern etc.)

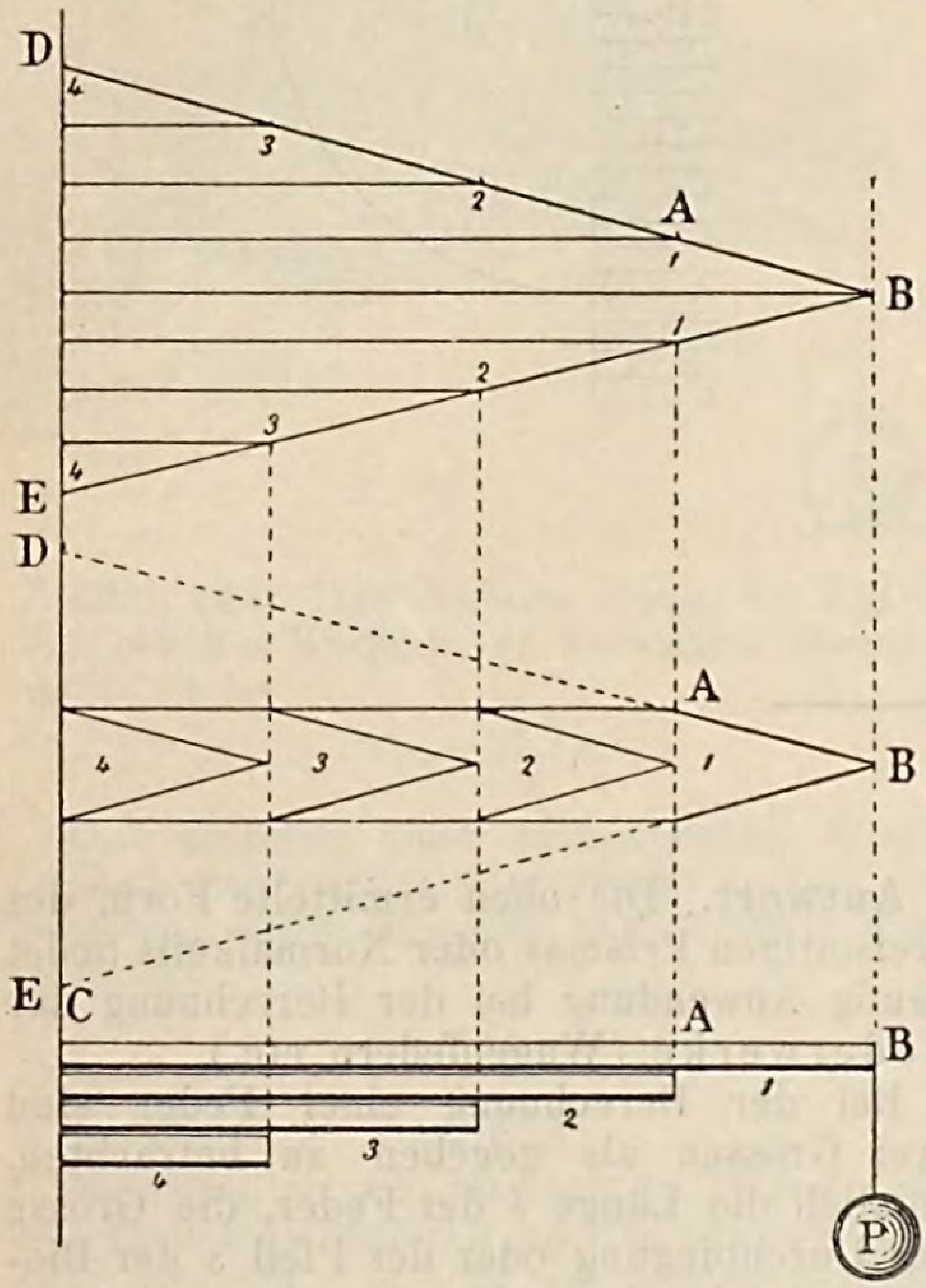
Bei der Berechnung einer Feder sind drei Grössen als gegeben zu betrachten, nämlich die Länge l der Feder, die Grösse der Durchbiegung oder der Pfeil s der Biegung, welche durch eine gegebene Kraft P erzeugt wird; ausserdem die Grösse des Elasticitätsmodulus E, sowie die grösste zulässige Spannung S, welche bei jener Durchbiegung nicht überschritten werden soll. Diejenige Form ist als die zweckmässigste anzusehen, bei welcher der Materialaufwand möglichst klein und die Biegsamkeit möglichst gross ist. Die Feder ist daher, um der ersteren Bedingung zu genügen, als Träger von gleichem Widerstande, und um der letzteren Bedingung zu genügen, als Träger von konstanter Krümmung zu konstruieren. Da die dreieckige Feder von konstanter Dicke beide Vorzüge vereinigt, so ist diese Form als die zweckmässigste zu wählen.

$$R = \frac{E b h^3}{12 P l}$$

das ist der Krümmungshalbmesser eines Kreisbogens und somit die tiefste Einsenkung s des freien Endpunktes verhältnismässig sehr gross.

Frage 117. Auf welche Weise vermeidet man bei Federn von grossem Biegungswiderstand eine zu grosse Breite an der Befestigungsstelle?

Figur 106.



Erkl. 127. Anstatt das Ende jedes einzelnen Blattes der zusammengesetzten Feder bei gleicher Dicke dreieckig zuzuspitzen, kann man annähernd auch bei konstanter Breite durch eine nach dem Endpunkt hin abnehmende Dicke denselben Zweck erreichen, wie es bei den meisten Wagenfedern zu sehen ist. Siehe die Antworten auf die folgenden Fragen.

Antwort. Um bei Federn von grossem Biegungswiderstand eine allzugrosse Breite an der Befestigungsstelle zu vermeiden, benutzt man zusammengesetzte Federwerke.

Ein solches zusammengesetztes Federwerk erhält man, wenn man sich eine Dreiecksfeder auf die in Fig. 106 angedeutete Weise durch Parallelschnitte in Streifen von gleicher Breite geteilt, hierauf je zwei mit gleichen Ziffern bezeichnete Teile zu einem Stück vereinigt und die einzelnen Stücke alsdann auf die in Fig. 106 angedeutete Weise übereinandergelegt denkt.

Unter Einwirkung einer am freien Ende B angreifenden Kraft P verhält sich die zusammengesetzte Feder in jeder Beziehung genau ebenso, wie die einfache nicht durchschnittene Dreiecksfeder BDE.

Die Tragfähigkeit ist, entsprechend der Formel 2). Seite 138 bei n Streifen von der Breite b_1 und der Dicke h

$$P = \frac{n b_1 \cdot h^2 s}{6 \cdot l}$$

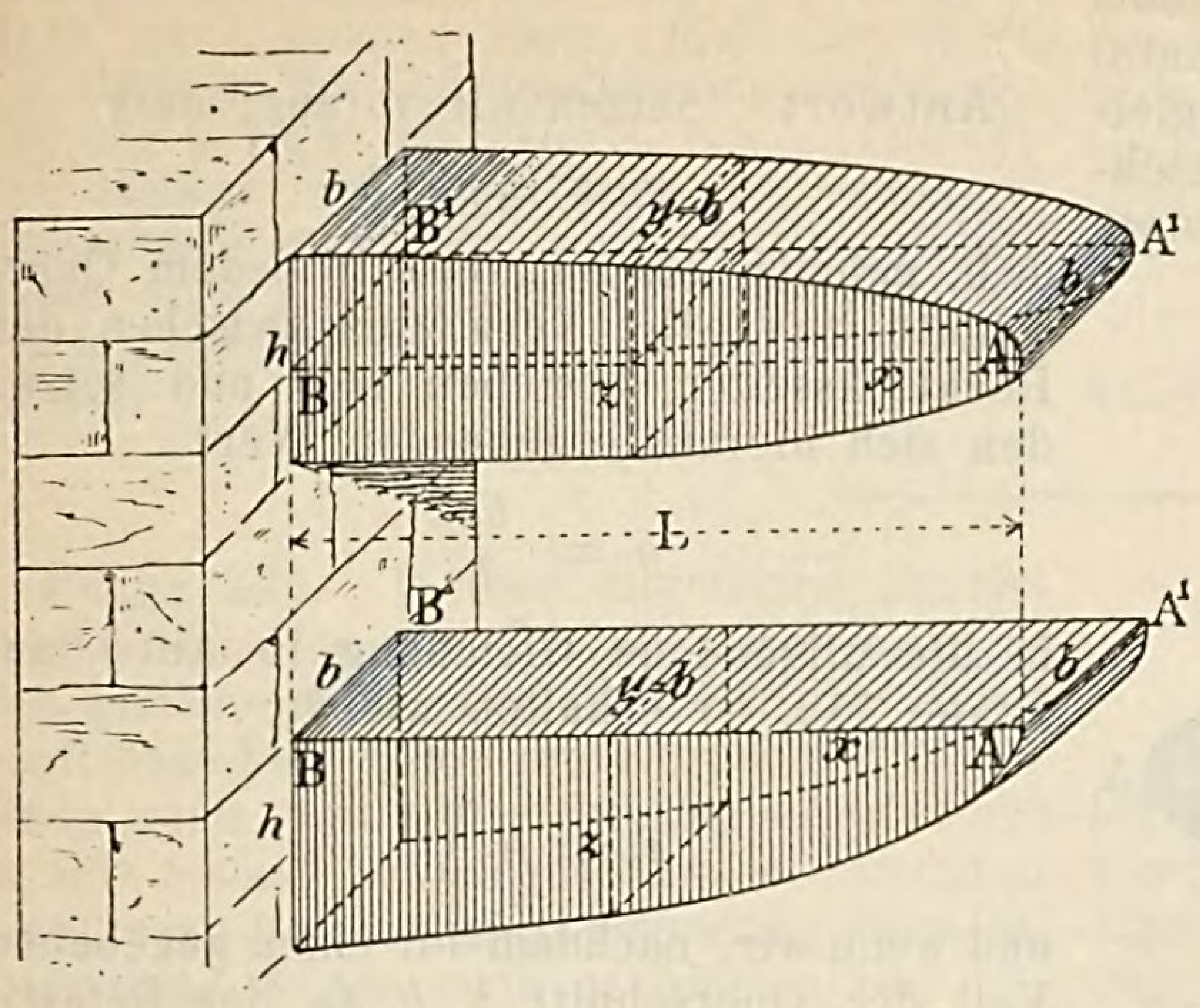
Frage 118. Zu welcher Körperform führt die zweite (in Antw. auf Frage 114 genannte) Bedingung, dass bei einem Körper von gleicher relativer Festigkeit sich bloss die Höhe z mit dem Abstand x ändern soll, während die Breite $b = y$ unveränderlich bleibt?

Antwort. Setzen wir in der allgemeinen Formel in Antw. auf Frage 112:

$$y = b$$

das heisst nehmen wir an, es sei in allen rechteckigen Querschnitten des Körpers die Breite b konstant, so geht diese Formel über in

Figur 107.



Erkl. 128. Die Parabel (v. griech. παραβολή) ist eine krumme Linie oder Kurve mit der Eigenschaft, dass die Entfernung eines jeden ihrer Punkte von einer festen Geraden $\overline{ED}$, der Leitlinie oder Directrix und die Entfernung desselben Punktes von dem festen Brennpunkt C einander gleich sind, also z. B.:

$$\overline{CG} = \overline{GH}, \quad \overline{CG_1} = \overline{G_1H_1}$$

$$\overline{CN} = \overline{NJ}, \quad \overline{CM} = \overline{MK} \text{ u. s. w.}$$

Die gerade Linie, welche durch den Brennpunkt geht und auf der Directrix senkrecht steht, heisst die Achse und das im Brennpunkt zur Achse errichtete Lot MN (Fig. 108) wird der Parameter oder das Mass der Parabel genannt.

Um das parabolische Profil (oder die parabolische Seitenansicht zu konstruieren, nehme man auf der Achse vom Scheitel A an in verschiedenen Abständen (welche mit Bezug auf die nebenstehende Gleichung die Grösse x vorstellen) eine Reihe von Punkten wie FL etc. an, errichte in ihnen Lote LO, FG etc. (welche mit Bezug auf die nebenstehende Gleichung die für jedes angenommene x mittels dieser Gleichung berechnete Ordinate z vorstellen) und verbinde die erhaltenen Endpunkte der Lote durch eine stetige krumme Linie aus freier Hand. In dem Fall, wo man für $x = \frac{1}{4} z$ oder $z = 4x$ erhält, ist $x = \overline{AC}$ der Abstand des Brennpunkts C der Parabel von deren Scheitel A und $z = \overline{NM} = p$ der Parameter der Parabel; macht man dann $\overline{AB} = \overline{AC}$ und errichtet in B zur Achse $\overline{AL}$ ein Lot DE, so ist letzteres die Directrix der Parabel und man kann dann, wenn der Brennpunkt und die Directrix bekannt sind, die Parabel ohne Rechnung weiter konstruieren, indem man mit den Abständen BF, BL, BR etc. aus Punkt C Bogen beschreibt, welche die Lote in je zwei Punkten wie GG_1, OO_1 etc. schneiden. Diese Schnittpunkte sind Punkte der verlangten Parabel.

$$\frac{x}{z^2} = \frac{l}{h^2}$$

oder:

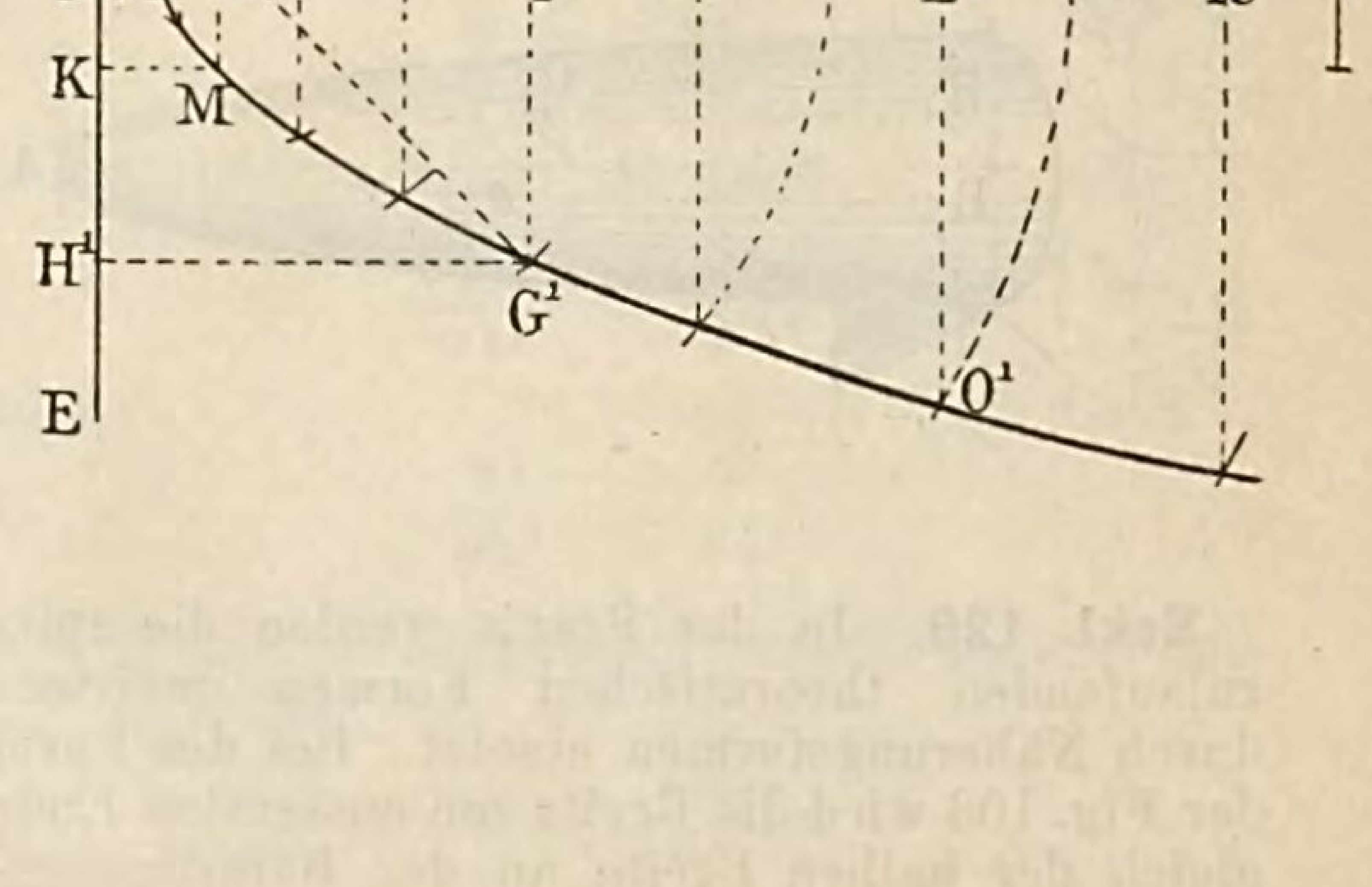
$$z = h\sqrt{\frac{x}{l}}$$

Dieses Verhältnis zwischen x und z ergibt parallel zur Kraftrichtung ein Profil oder eine Seitenansicht in Gestalt einer Parabel [1]), während senkrecht dazu die Querschnitte alle dieselbe Breite haben, wie es in Fig. 107 dargestellt ist. Die obige Formel lässt sich nämlich in zweierlei Formen konstruieren, je nachdem man die den angenommenen x entsprechend berechneten z ungeteilt nur nach einer Seite hin, oder das z jedesmal halbiert nach beiden Seiten der horizontalen Achse $\overline{AB}$ abträgt. Die nebenstehende zweite Form findet z. B. Anwendung bei den Trägern an Balkonen, desgleichen haben Balanciers, Wagebalken etc. gewöhnlich einen Längendurchschnitt, welcher aus zwei Parabeln besteht.

Diese Formen ergeben gegenüber den gleichwertigen prismatischen Körpern eine Materialersparnis von 33 %.

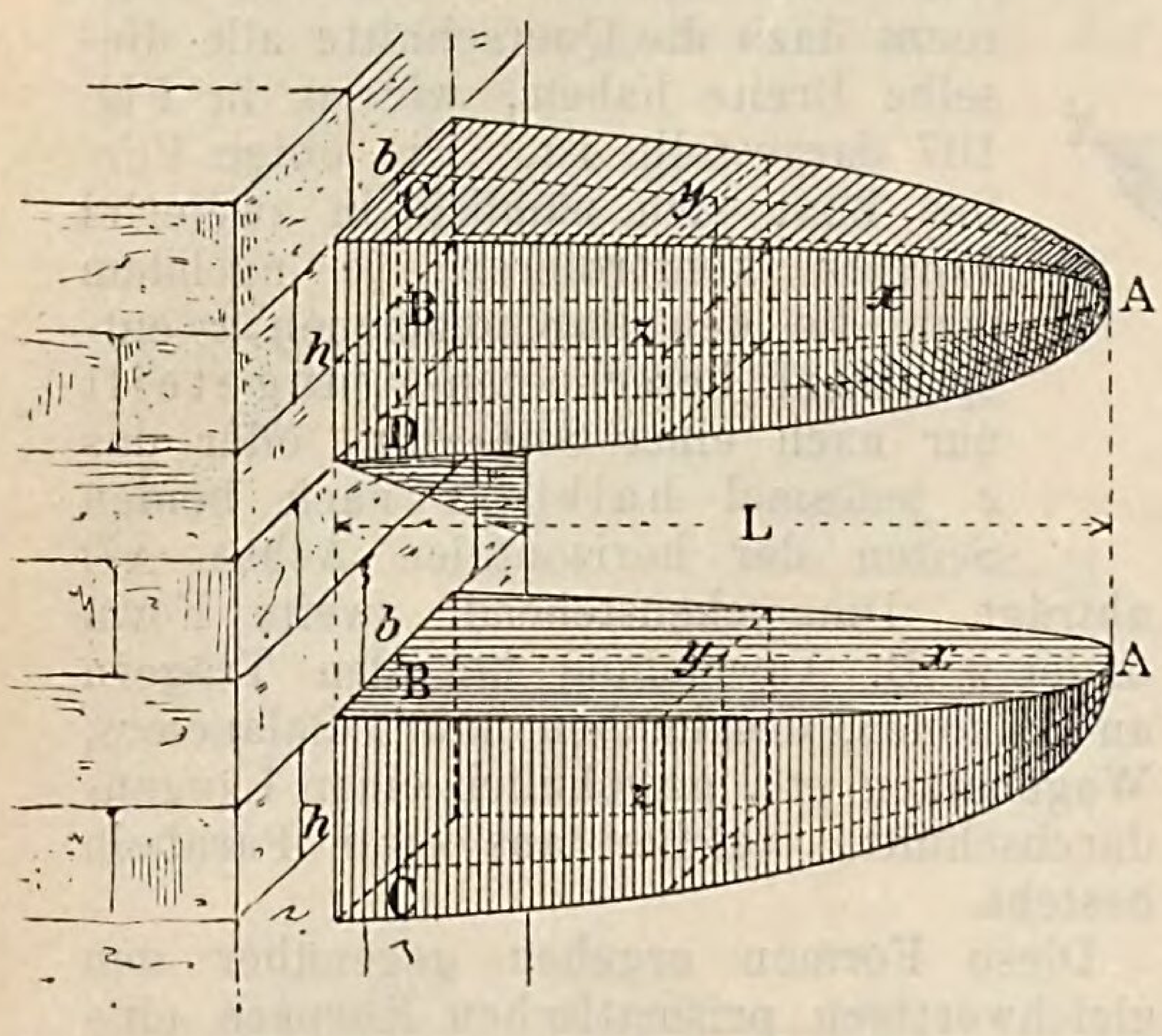
[1]) Siehe Erkl. 123.

Figur 108.



Frage 119. Zu welcher Körperform führt die dritte (in Antw. auf Frage 114 genannte) Bedingung, dass bei einem Körper von gleicher relativer Festigkeit sich y und z gleichzeitig mit x so ändern, dass dieselben stets proportioniert zu b und h bleiben?

Figur 109.



Antwort. Setzen wir voraus, dass

$$y : z = b : h$$

d. h. nehmen wir an, dass in jedem Querschnitt dasselbe Verhältnis zwischen den Rechtecksseiten bestehen soll und setzen den sich hieraus ergebenden Wert

$$y = \frac{b\,z}{h}$$

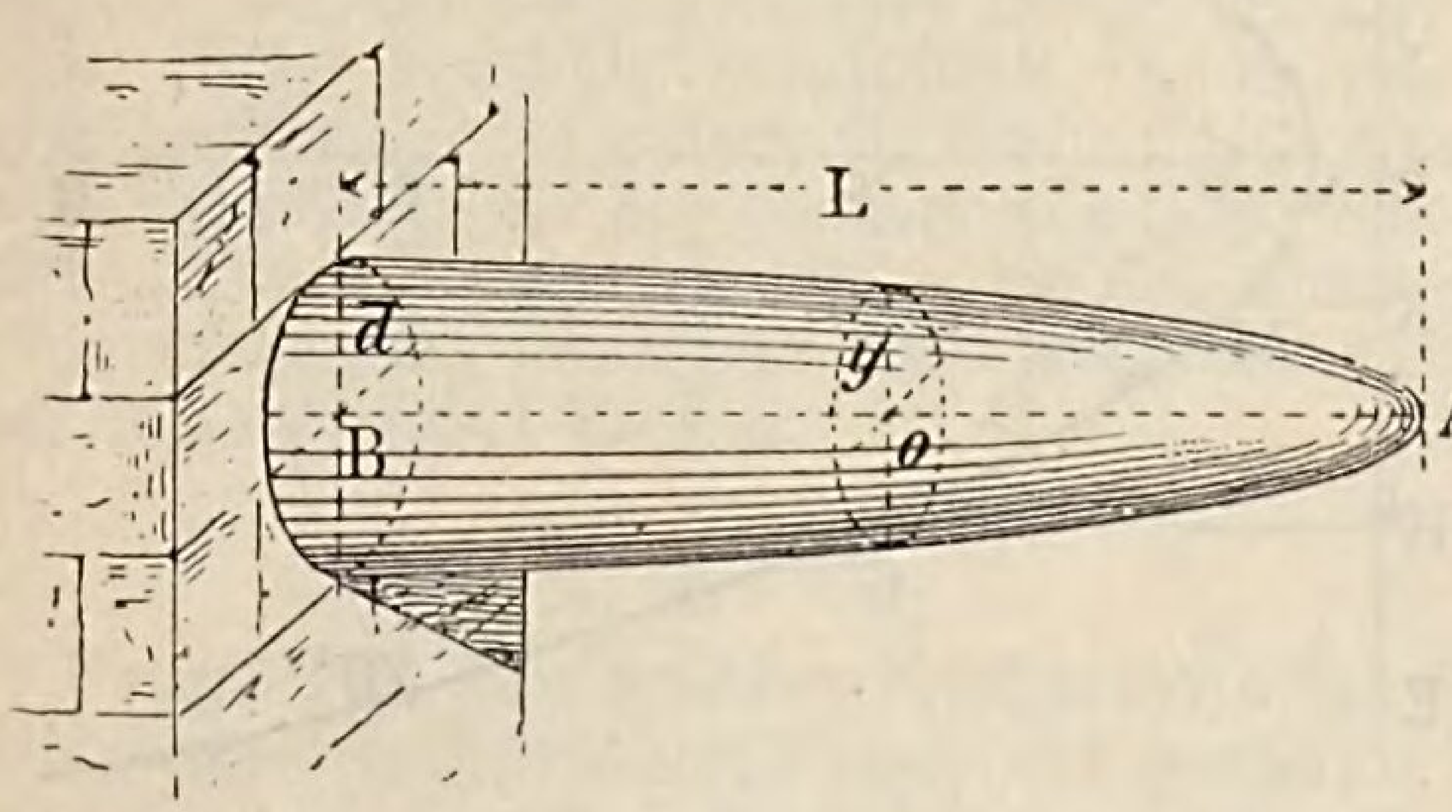
in die allgemeine Gleichung in Antw. auf Frage 112, so erhalten wir für

$$z = h \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$$

und wenn wir, nachdem für einen gegebenen Fall der Querschnitt $b.h$ an der Befestigungsstelle aus der Belastung P und der Länge l berechnet ist, für verschiedene Annahmen von x (dasselbe muss selbstverständlich immer kleiner sein als l) die zugehörigen y und z nach obigen Gleichungen berechnen und konstruieren, so erhalten wir die Körperformen der nebenstehenden Figuren, welche kubisch-parabolische Pyramiden genannt werden, wobei die kub. Höhenparabel ganz oder nur zur Hälfte beibehalten ist.

Frage 120. Nehmen wir weiter an, der Balken, der durchweg gleiche relative Festigkeit haben soll, habe anstatt eines rechteckigen Querschnitts einen Kreisquerschnitt, so führt die allgemeine in Antwort auf Frage 112 gegebene Formel zu welcher Körperform?

Figur 110.



Erkl. 129. In der Praxis werden die spitz zulaufenden theoretischen Formen meistens durch Näherungsformen ersetzt. Bei der Form der Fig. 103 wird die Breite am äussersten Ende gleich der halben Breite an der Befestigungsstelle, etwa so wie es Fig. 102 zeigt, genommen,

Antwort. Nehmen wir an, der Balken von durchaus gleicher relativer Festigkeit habe den Kreisquerschnitt, so ist die Materialspannung s in dem Querschnitt vom Halbmesser r an der Befestigungsstelle und in einem beliebigen Querschnitt vom Halbmesser ϱ nach der Formel 7), Seite 99, in welcher wir statt $d = 2\,r$ einsetzen und dieselbe dann auf s reduzieren:

$$s = \frac{32\,P\,l}{8\,r^3\pi}$$

und

$$s = \frac{32\,P\,x}{8\,\varrho^3\pi}$$

$$\frac{32\,P\,l}{8\,r^3\pi} = \frac{32\,P\,x}{8\,\varrho^3\pi}$$

oder:

$$\frac{l}{r^3} = \frac{x}{\varrho^3}$$

das ist die Gleichung einer kubischen Parabel, wie Fig. 110 eine solche darstellt. Dieselbe wird nach der obigen Gleichung konstruiert, indem man für das Bie-

und bei den Formen der Fig. 107 wird die Höhe am äussersten Ende gleich der Hälfte der Höhe an der Befestigungsstelle genommen. Bei den Formen der Figuren 109 u. 110 werden dagegen die Dimensionen des äussersten Querschnitts zu $^2/_3$ der gleichnamigen Dimensionen an der Befestigungsstelle gemacht, wodurch abgestutzte Pyramiden resp. Kegel entstehen.

gungsmoment Pl die Querschnittsdimensionen r an der Befestigungsstelle ermittelt und für beliebig, innerhalb AB angenommene x die zugehörigen Radien ϱ, berechnet nach der Formel

$$\varrho = r\sqrt[3]{\frac{x}{l}}$$

aufträgt.

Frage 121. Welche allgemeine Formel ergibt sich für die Gestalt eines Körpers von gleicher Festigkeit und für die Tragkraft desselben, wenn der Körper mit einem Ende normal zu seiner geometrischen Achse in eine feste Wand eingeschlossen und durch eine über seine Länge gleichmässig verteilte Belastung in Anspruch genommen ist?

Erkl. 130. Wenn man in der nebenstehenden Formel 1). für $y = b$ setzt, also annimmt, dass die Breite des Trägers überall die gleiche ist, so erhält man die Gleichung:

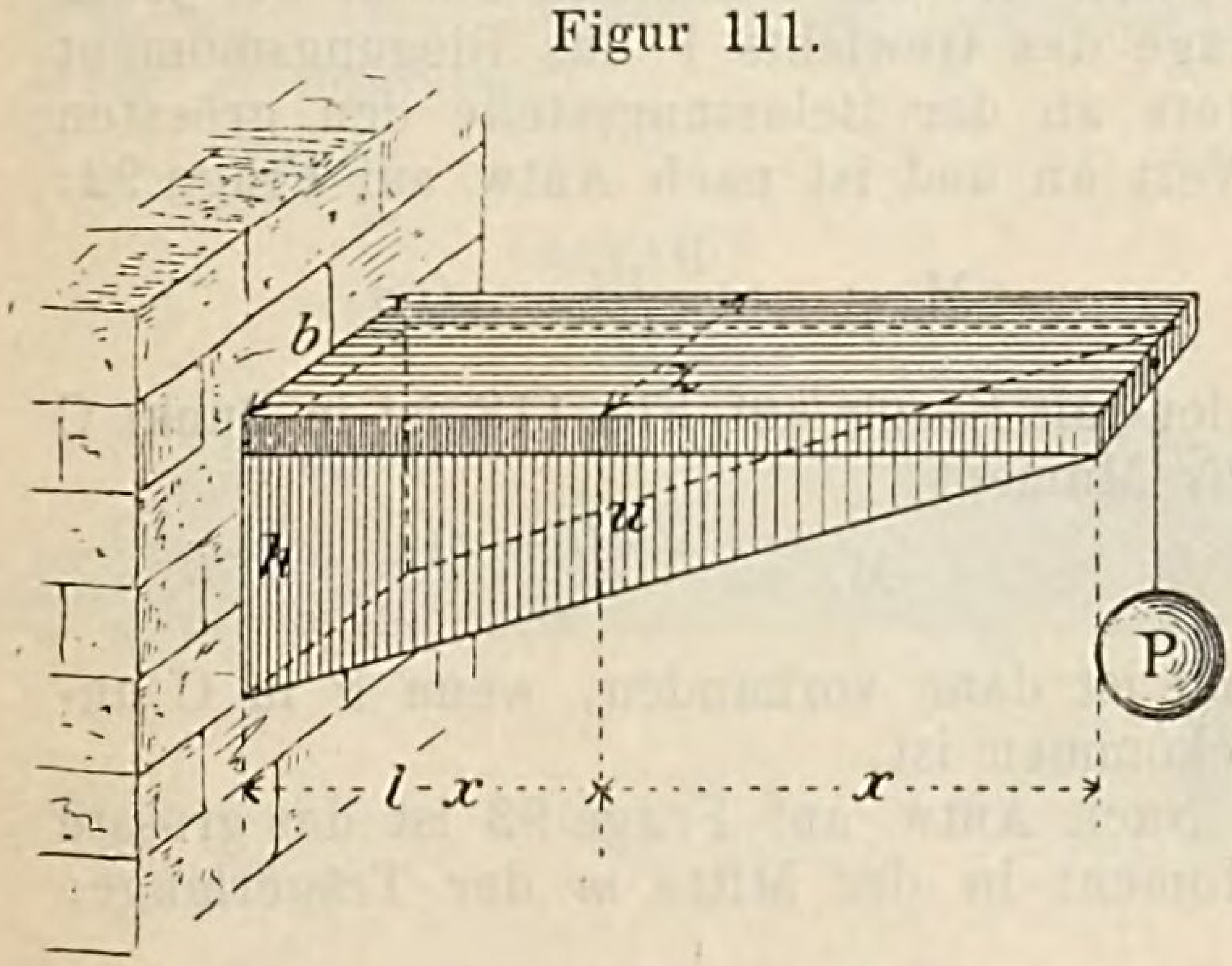
$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{l^2}{h^2}$$

oder:

$$3). \quad z = \frac{h}{l}x$$

Für diesen Fall nimmt also der Balken die in Fig. 111 dargestellte Form an, welche parallel zur Biegungsebene ein Dreieck zeigt. Die Materialersparnis beträgt in diesem Fall = 50%.

Figur 111.



Wenn dagegen $z = h$ gesetzt wird, die Höhe also eine unveränderliche Grösse sein soll, so ist die veränderliche Breite zu berechnen aus der Gleichung

$$\frac{x^2}{y} = \frac{l^2}{b}$$

oder:

Antwort. Um eine allgemeine Formel für die Gestalt und Tragkraft eines mit einem Ende befestigten Körpers von gleicher Festigkeit zu erhalten, wenn derselbe durch eine über seine Länge gleichförmig verteilte Belastung in Anspruch genommen wird, verfahren wir wieder wie in Antw. auf Frage 113, indem wir einen Balken von rechteckigem Querschnitt annehmen. Das Biegungsmoment eines solchen beträgt nach Antw. auf Frage 90:

$$\frac{1}{2}pl^2 = QS$$

folglich ist die Materialspannung an der Befestigungsstelle

$$S = \frac{pl^2}{2Q}$$

oder da nach Gleichung 15). Seite 82:

$$Q = \frac{1}{6}bh^2$$

so ist:

$$S = \frac{3pl^2}{bh^2}$$

Denken wir uns nun im Abstand x vom äusseren Ende die Querschnittsfläche von der Breite y und der Höhe z, so ist bei gleicher Materialspannung

$$S = \frac{3px^2}{yz^2}$$

und da S = S, so ist auch

$$\frac{3px^2}{yz^2} = \frac{3pl^2}{bh^2}$$

oder:

$$1). \quad \frac{x^2}{yz^2} = \frac{l^2}{bh^2}$$

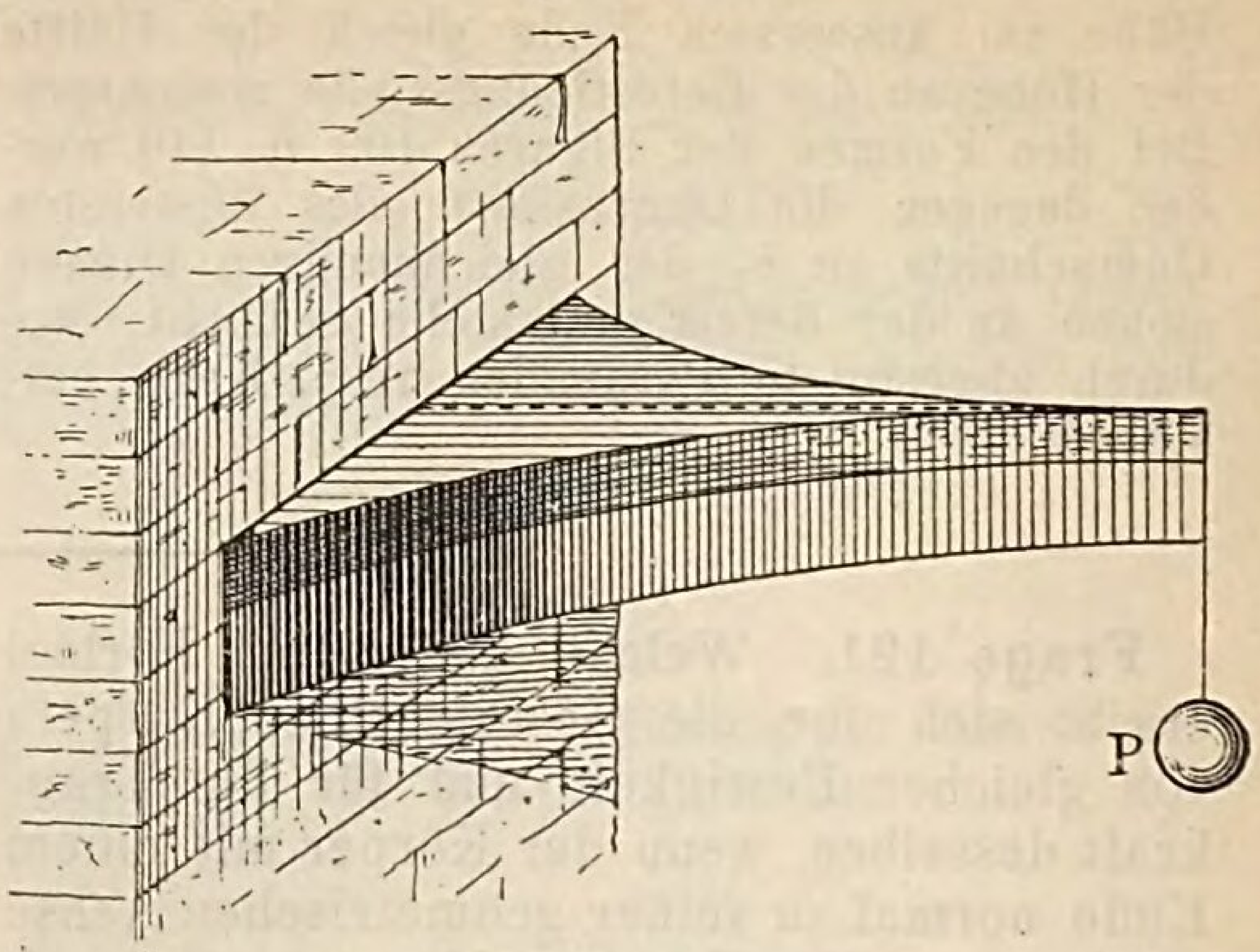
und für die Tragfähigkeit erhält man, wenn $pl = P$ ist:

$$2). \quad P = \frac{bh^2S}{3l}$$

$$4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{b x^2}{l^2}$$

welche zeigt, dass in letzterem Fall die Begrenzung der Grundrissform durch zwei Parabeln gebildet wird, deren Scheitelpunkte mit dem freien Endpunkt zusammenfallen und deren gemeinschaftliche Achse rechtwinklig zur Achse des Balkens gerichtet ist (Fig. 112).

Figur 112.



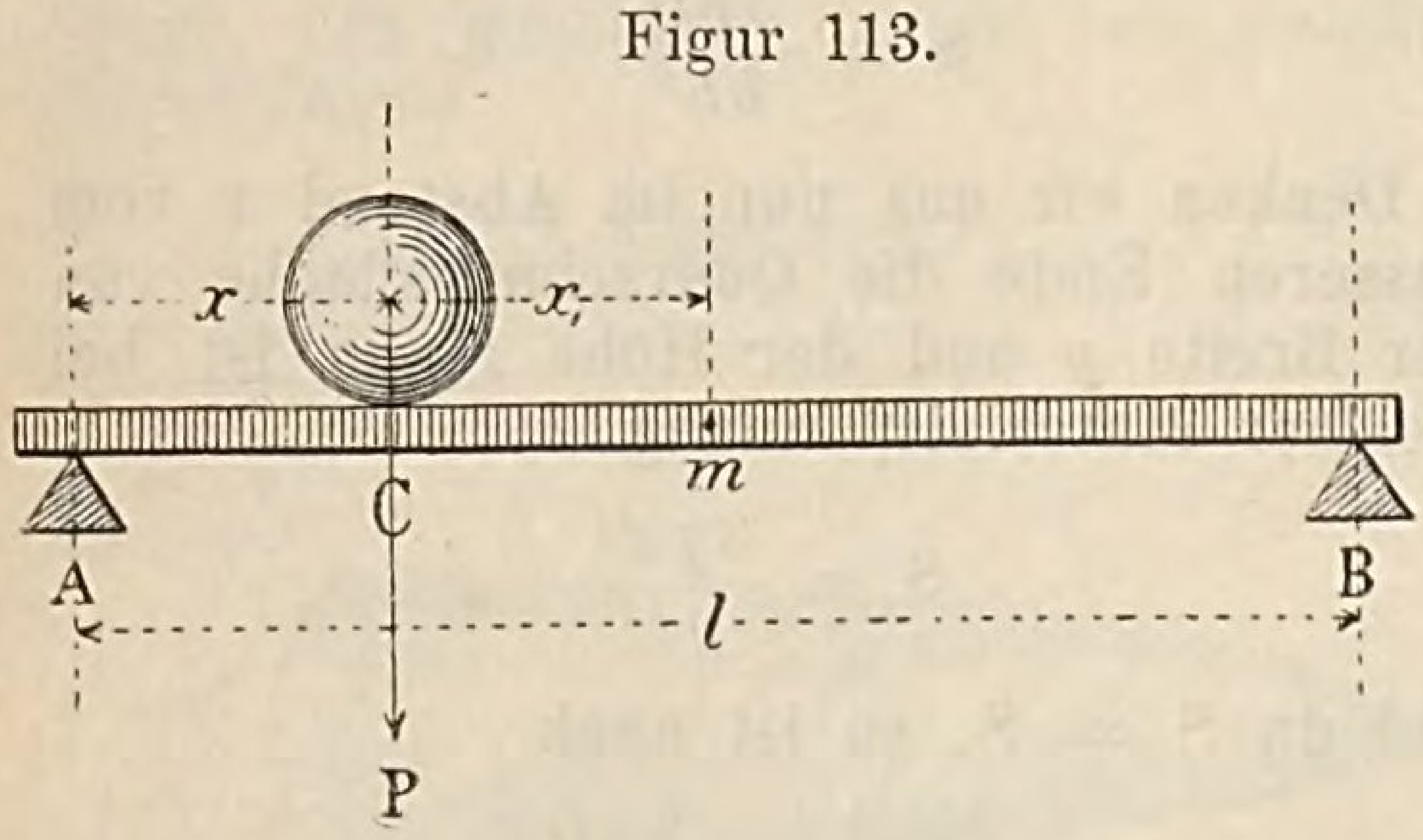
Frage 122. Welche Körperform muss man einem an beiden Enden unterstützten Träger geben, wenn derselbe in der Mitte mit P belastet, überall gleiche Festigkeit besitzen soll?

Antwort. Soll ein an beiden Enden unterstützter und in der Mitte mit P belasteter Träger überall gleiche Biegungsfestigkeit besitzen, so muss jede Hälfte desselben genau die Dimensionen erhalten wie ein an einem Ende eingeklemmter, am freien Ende belasteter Träger.

Die Belastung ist dann $\frac{1}{2}$ P, die Länge $\frac{1}{2}\,l$.

Frage 123. Welche Körperform erhält man, wenn ein an beiden Enden unterstützter Träger, über den sich die Einzellast P bewegt, überall gleiche Biegungsfestigkeit haben soll?

Figur 113.



Erkl. 131. Wenn ein Träger von gleicher Oberflächenspannung an beiden Enden aufliegen und in der Mitte belastet werden soll, so kann man ihm nach Antw. a. Frage 122 mit Bezug auf die in Antw. a. Frage 118 entwickelte Gleichung die Gestalt von zweien gleichen Parabeln geben, die in der Mitte an den Stellen ihrer grössten Querschnitte zusammenhängen, und deren Scheitelpunkte an den Enden des Trägers liegen.

Antwort. Bei der in Fig. 113 dargestellten Art der Belastung nimmt bei jeder Lage des Gewichts P das Biegungsmoment stets an der Belastungsstelle den grössten Wert an und ist nach Antw. auf Frage 92:

$$M_{max} = \frac{P\,l_1 l_2}{l} = Q\,S$$

oder mit Bezug auf Fig. 113 ist in Punkt C das Moment

$$M_1 = \frac{P\,x\,(l - x)}{l}$$

und ist dann vorhanden, wenn P in C angekommen ist.

Nach Antw. auf Frage 93 ist das grösste Moment in der Mitte m der Trägerlänge:

$$M = \frac{1}{4} P\,l = Q\,S$$

woraus nach angenommener Breite b die Höhe h zu berechnen ist.

Bei C sowohl als in der Mitte soll nun

$$\frac{M_1}{Q_1} = \frac{M}{Q} = S$$

konstant sein.

Auch in diesem Fall ist dann der Widerstand gegen Biegung in allen Querschnitten gleich gross. Das Widerstandsvermögen im Vergleich zu einseitig befestigten Trägern von gleicher Länge und gleichem grössten Querschnitt ist vervierfacht.

Solche Träger, welche ähnlich wie die Wagebalken in der Mitte gestützt und an beiden Enden gleich belastet sind, pflegt man in derselben Weise zu gestalten, um denselben bei möglichst geringem Gewicht eine genügende Festigkeit zu erteilen.

Da nun nach Gleichung 15). Seite 82 für rechteckigen Querschnitt

$$Q = \frac{1}{6} b h^2$$

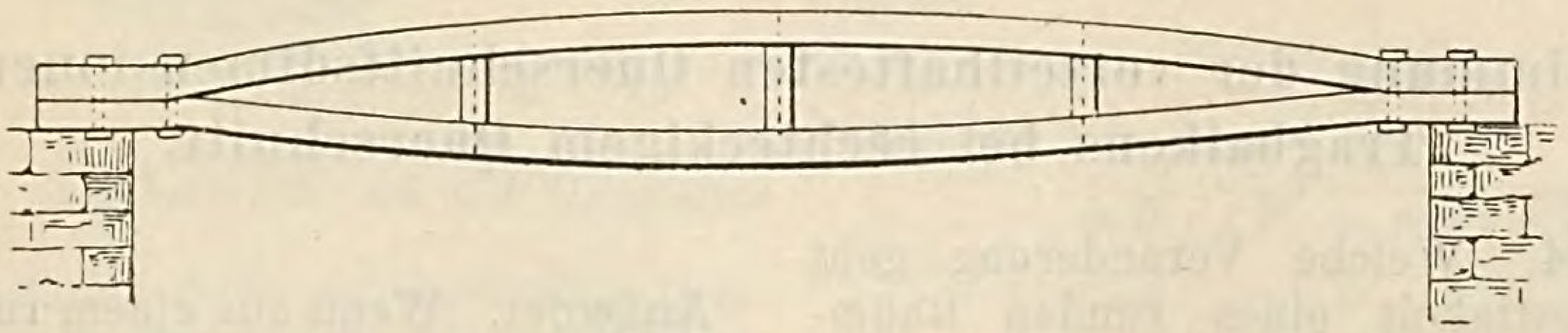
so ist, wenn man die veränderliche Höhe mit z und die vorläufig veränderlich angenommene Breite mit y bezeichnet:

$$\frac{M_1}{Q_1} = P \frac{(l-x)}{l} x \cdot \frac{6}{y z^2}$$

und

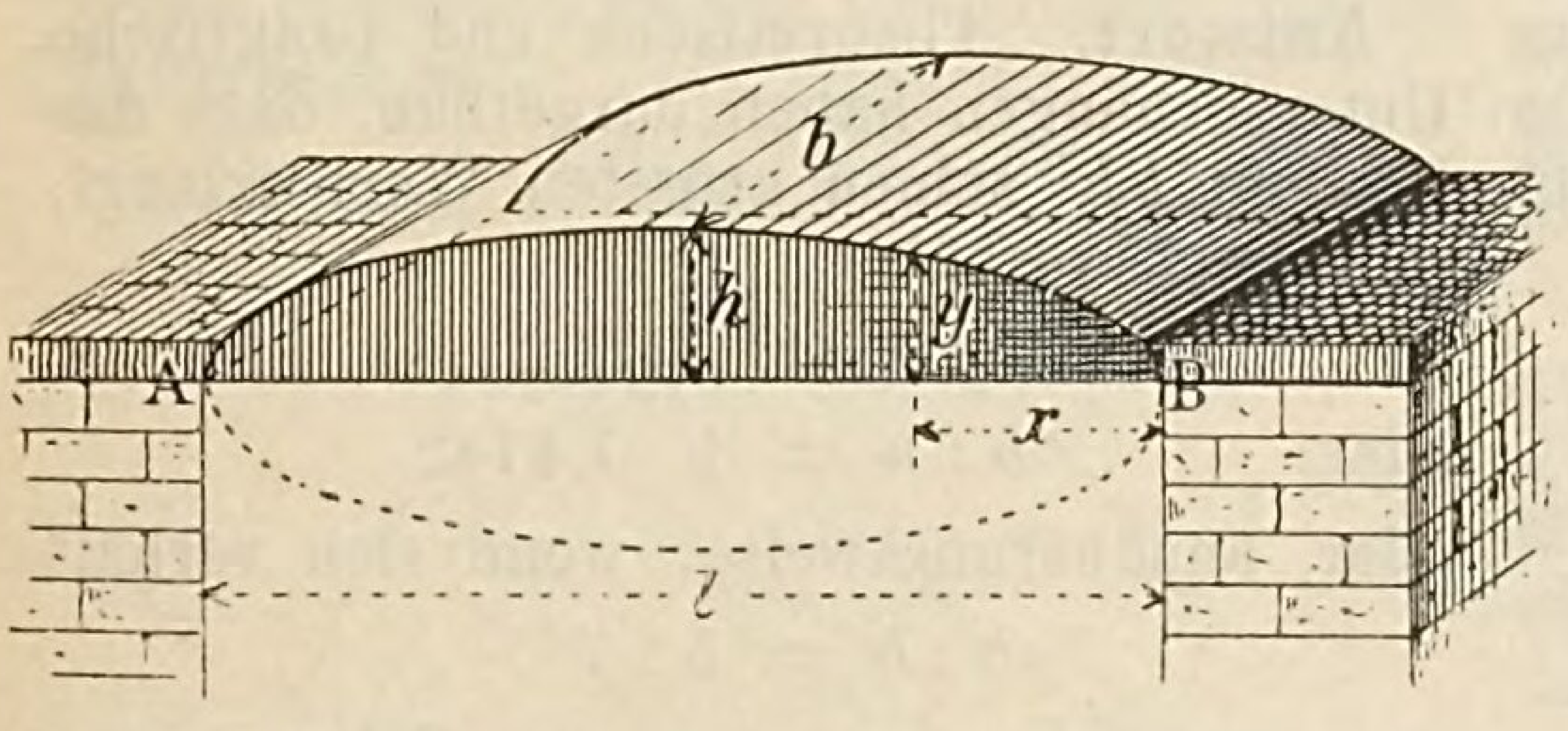
$$\frac{M}{Q} = \frac{P l}{4} \cdot \frac{6}{b h^2}$$

Figur 114.



Da die inneren Teile eines Trägers zu seiner relativen Festigkeit verhältnismässig viel weniger beitragen als die äusseren Kohäsionsbänder, so kann ohne erhebliche Beeinträchtigung des Widerstandsvermögens ein Teil aus der Mitte eines parabolisch gestalteten Trägers entfernt werden. Sein Gewicht wird dadurch weit mehr verringert als seine relative Festigkeit. Es ist daher vorteilhaft bei gegebenem Gewicht des Trägers einen möglichst grossen Teil dieser Masse nach den äusseren Kohäsionsbändern zu versetzen. Die Fig. 114 zeigt zwei Balken, die an den Enden zusammengeschraubt und in der Mitte ausgebogen worden sind, um dadurch ihren Widerstand gegen Biegung in der angedeuteten Weise zu vergrössern.

Figur 115.



Da der Scheitelpunkt der Begrenzungskurve in die Mitte fallen muss, so ist es zweckmässig, den Anfangspunkt des Koordinatensystems von A in die Mitte m zwischen die Stützpunkte zu verlegen, dadurch, dass man für die Abscissen x den Ausdruck $\left(\frac{1}{2} l - x_1\right)$ setzt.

Es wird dann

$$\frac{M_1}{Q_1} = P \frac{\left(\frac{1}{2} l + x_1\right)\left(\frac{1}{2} l - x_1\right)}{l} \cdot \frac{6}{y z^2}$$

oder:

$$\frac{M_1}{Q_1} = \frac{6 P \left(\frac{1}{4} l^2 - x_1{}^2\right)}{l y z^2}$$

und diesen Wert dem oben für $\frac{M}{Q}$ angegebenen Wert gleichgesetzt:

$$\frac{6 P \left(\frac{1}{4} l^2 - x_1{}^2\right)}{l y z^2} = 6 P \frac{l}{4 b h^2}$$

oder:

$$\frac{\frac{1}{4} l^2 - x_1{}^2}{l y z^2} = \frac{l}{4 b h^2}$$

oder:

$$\frac{y z^2}{b h^2} = \frac{l^2 - 4 x_1{}^2}{l^2}$$

woraus bei unveränderlicher Breite

$$y = b$$

$$\frac{z^2}{h^2} = 1 - \frac{x_1{}^2}{\left(\frac{1}{2} l\right)^2}$$

oder:

1). $z = \frac{2h}{l} \sqrt{\frac{l^2}{4} - x_1{}^2}$

Erkl. 132. Setzt man in der nebenstehenden Formel $P = pl$, d. h. bedeutet P die über die Länge l gleichförmig verteilte Gesamtlast, und p die auf die Längeneinheit von l kommende Belastung, so hat dieselbe Formel auch Giltigkeit für einen an beiden Enden aufliegenden, gleichmässig belasteten Träger.

Die Begrenzungskurve des Trägers wird darnach eine halb elliptisch begrenzte Ebene (s. Fig. 115).

Die grösste Höhe h der Seitenansicht in der Mitte berechnet sich aus der Formel für die in allen Punkten konstante Tragkraft und diese selbst ist

2). $P = \frac{4}{3} \cdot \frac{b h^2 S}{l}$

(denn $QS = \frac{1}{4} Pl$ und $Q = \frac{1}{6} bh^2$)

f). Bestimmung der vorteilhaftesten Querschnittsdimensionen eines Tragbalkens bei rechteckigem Querschnitt.

Frage 124. Welche Veränderung geht mit der Festigkeit eines runden Baumstammes vor, aus dem ein vierkantiger Balken gehauen wird?

Antwort. Wenn aus einem runden Baumstamm ein viereckiger gehauen wird, so verliert durch das Behauen der Stamm an seiner Festigkeit.

Frage 125. Wie erhält man aus einem runden Stamm denjenigen viereckigen Balken, welcher die grösste relative Befestigung besitzt?

Anwort. Soll aus einem runden Baum der stärkste vierkantige Balken gehauen werden, so ergibt sich aus dem bisherigen, dass dies keineswegs jener vom grössten, d. i. quadratischen Querschnitt, sondern von jenem rechteckigen Querschnitt bh ist, für welchen bh^2, wenn man b und h als veränderlich ansieht, ein Maximum ist oder den grösstmöglichen Wert erlangt.

Frage 126. Theoretische und praktische Untersuchungen haben ergeben, dass welches Verhältnis zwischen Höhe und Breite des rechteckigen Querschnitts das günstigste ist?

Antwort. Theoretische und praktische Untersuchungen haben dargethan, dass das Produkt bh^2 seinen grössten Wert erlangt, wenn sich verhält

$$b : h = 1 : \sqrt{2}$$

oder: $$b : h = 1 : 1{,}4142$$

oder, annäherungsweise, wenn sich verhält

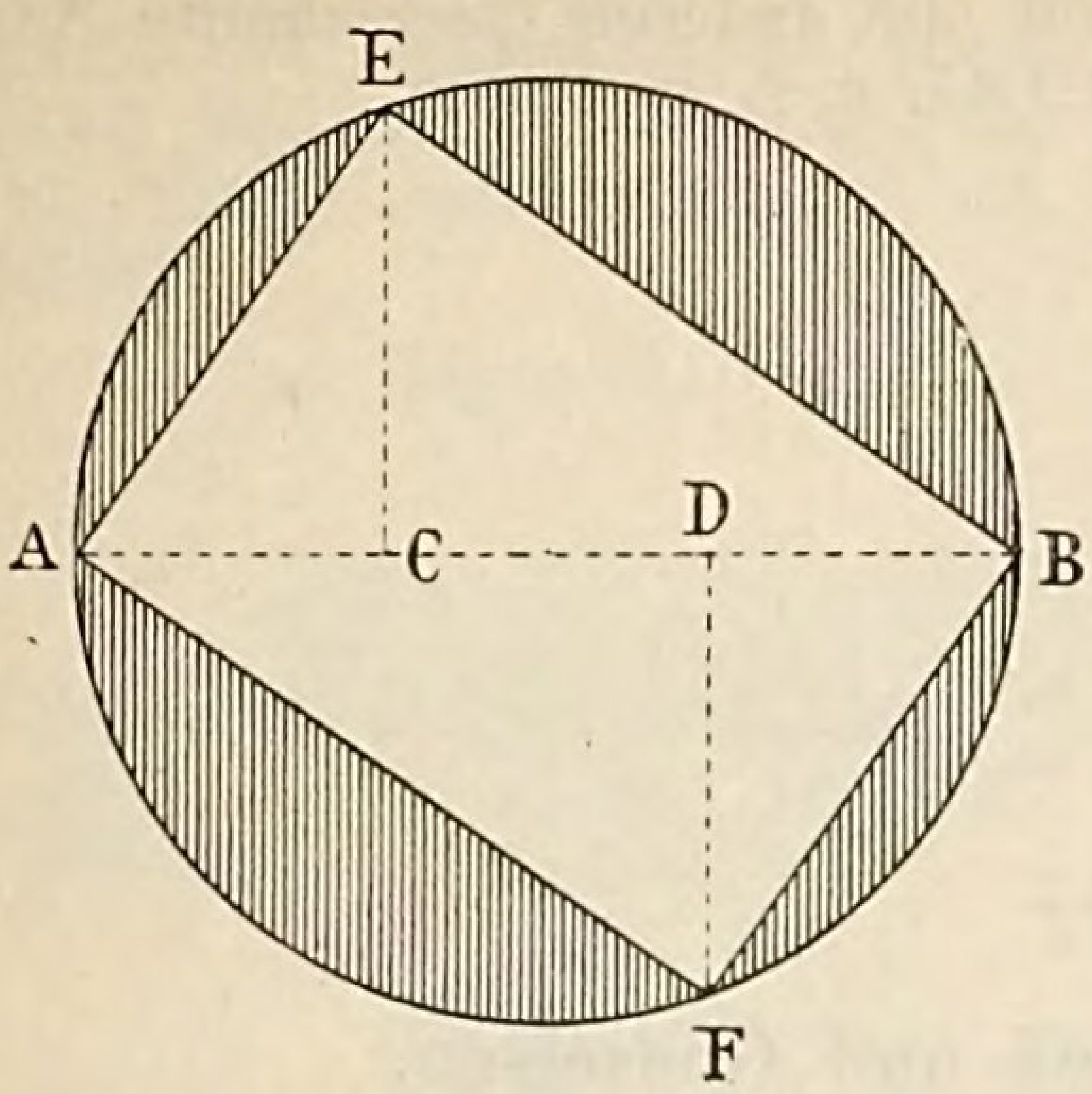
$$b : h = 5 : 7$$

vorausgesetzt, dass man den Balken dann hochkantig stellt, d. h. h zur senkrechten Höhe und b zur horizontalen Breite nimmt.

Frage 127. Durch welche einfache Konstruktion erhält man dieses vorteilhafteste Verhältnis von $b : h$?

Antwort. Dieses vorteilhafteste Verhälnis von $b : h$ erhält man durch folgende einfache Konstruktion:

Figur 116.



Erkl. 133. Ein Lehrsatz aus der Geometrie lautet:

„Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck aus der Spitze des rechten Winkels das Perpendikel auf die Hypotenuse fällt, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, von denen jedes dem ganzen und eins dem dem andern ähnlich ist"

und es verhält sich:

$$\overline{AC}:\overline{EC}:\overline{AE} = \overline{EC}:\overline{BC}:\overline{BE} = \overline{AE}:\overline{BE}:\overline{AB}$$

Erkl. 134. Bei dem in Fig. 116 dargestellten Querschnitt und der hochkantigen Lage ist der Balken gegen jenen, dessen Querschnitt ein in den Kreis $\overline{AB}$ einbeschriebenes Quadrat bildet, im Verhältnis von 2,83 : 3,1 stärker.

Man teile den Durchmesser $\overline{AB}$ des Baumstammes (s. Fig. 116) in drei gleiche Teile, errichte in den Teilpunkten C und D die Lote $\overline{CE}$ und $\overline{DF}$ und verbinde die Punkte A, E, B und F des Kreisumfangs, so ist AEBF der verlangte rechteckige Querschnitt und $\overline{AE} = \overline{BF} = b$ und $\overline{AF} = \overline{EB} = h$, denn es ist, wenn man den Durchmesser $\overline{AB} = d$ setzt, nach einem geometrischen Satz (s. Erkl. 133):

$$\overline{AC}:\overline{AE} = \overline{AE}:\overline{AB}$$

oder:

$$\frac{1}{3}d : b = b : d$$

folglich:

$$b^2 = \frac{1}{3}d^2$$

Ebenso hat man:

$$\overline{AD}:\overline{AF} = \overline{AF}:\overline{AB}$$

d. i.:

$$\frac{2}{3}d : h = h : d$$

folglich

$$h^2 = \frac{2}{3}d^2$$

Hieraus ergibt sich:

$$b^2 : h^2 = \frac{1}{3}d^2 : \frac{2}{3}d^2$$

oder:

$$b^2 : h^2 = 1 : 2$$

und daher:

$$\sqrt{b^2} : \sqrt{h^2} = \sqrt{1} : \sqrt{2}$$

oder:

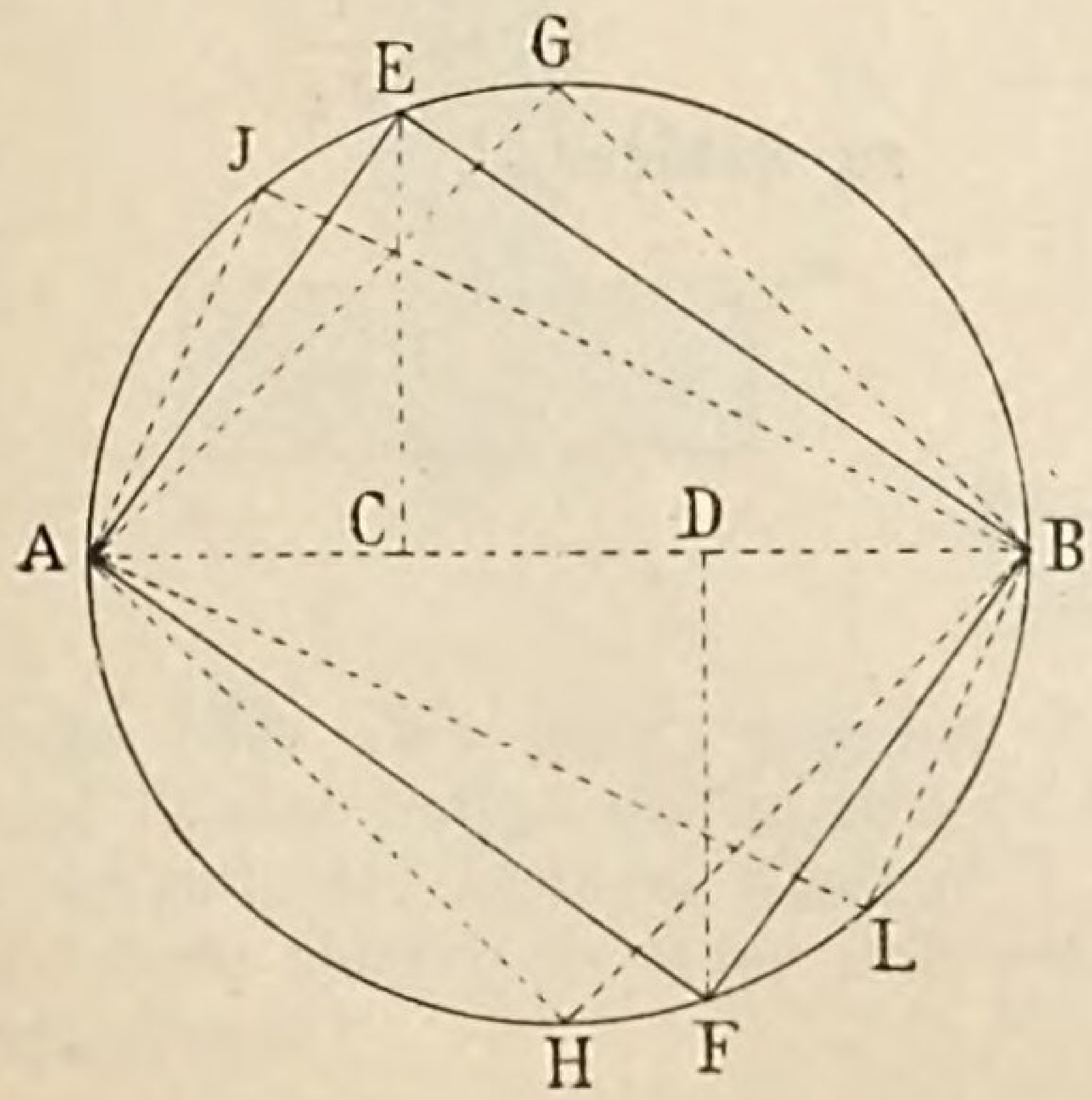
$$b : h = 1 : 1{,}4142$$

oder annäherungsweise

$$b : h = 5 : 7$$

Frage 128. Wie kann man sich (ohne Anwendung höherer Mathematik) davon überzeugen, dass der auf die vorgenannte Weise erhaltene Balken die grösste relative Festigkeit hat?

Figur 117.



Antwort. Dass der auf die genannte Weise erhaltene Balken in der That die grösste relative Festigkeit hat, ergibt sich durch folgende einfache Untersuchung:

Man zeichne in grossem Massstab für irgend einen Umfang des Baumstammes, Fig. 117, den nach dem genannten Verhältnis gebildeten Querschnitt AEBF. Sodann nehme man für Breite und Höhe des Querschnitts andere Verhältnisse an, so dass einmal die Breite etwas grösser ist als obige Breite $\overline{AE}$, das andere Mal aber kleiner. Auf diese Weise erhält man z. B. die zwei Querschnitte AGBH und AJBL.

Misst man die Breiten $\overline{AE}$, $\overline{AG}$ $\overline{AJ}$ und die Höhen $\overline{EB}$, $\overline{GB}$, $\overline{JB}$, und bildet damit jedesmal das Produkt bh^2, mit dem bekanntlich die Festigkeit zu- oder abnimmt, so ergibt sich, dass das Produkt aus

Erkl. 135. Man sieht auch, dass wenn man mit der Konstruktion neuer Querschnitte fortfährt, die Tragfähigkeit abnimmt, bis der Querschnitt ein Quadrat wird. Die Tragfähigkeit wächst alsdann, bis man anderseits wieder den meisttragenden Querschnitt erhält, nimmt alsdann wieder ab und wird zu Null, wenn der Punkt E oder G mit B zusammenfällt.

Fragt man nach dem nötigen Durchmesser des runden Stammes für die verlangten Holzstärken b und h des rechteckigen Balkens, so ergibt eine einfache Rechnung, dass derselbe nahe $= 0,7$ der Summe $b + h$ der Holzstärken sein muss.

$\overline{AE} . \overline{EB}^2$ grösser ist als jedes Produkt, das man für die anderen Querschnitte AGBH und AJBL u. s. w. erhält.

g). Träger von Schmiedeeisen und Gusseisen.

Frage 129. Wovon ist die Tragfähigkeit eines Trägers abhängig und inwiefern wird das erwähnte Gesetz berücksichtigt?

Antwort. Es wurde schon mehrfach erwähnt, dass die Tragfähigkeit eines Trägers nach Gleichung 11). Seite 79:

$$M = Pl = QS$$

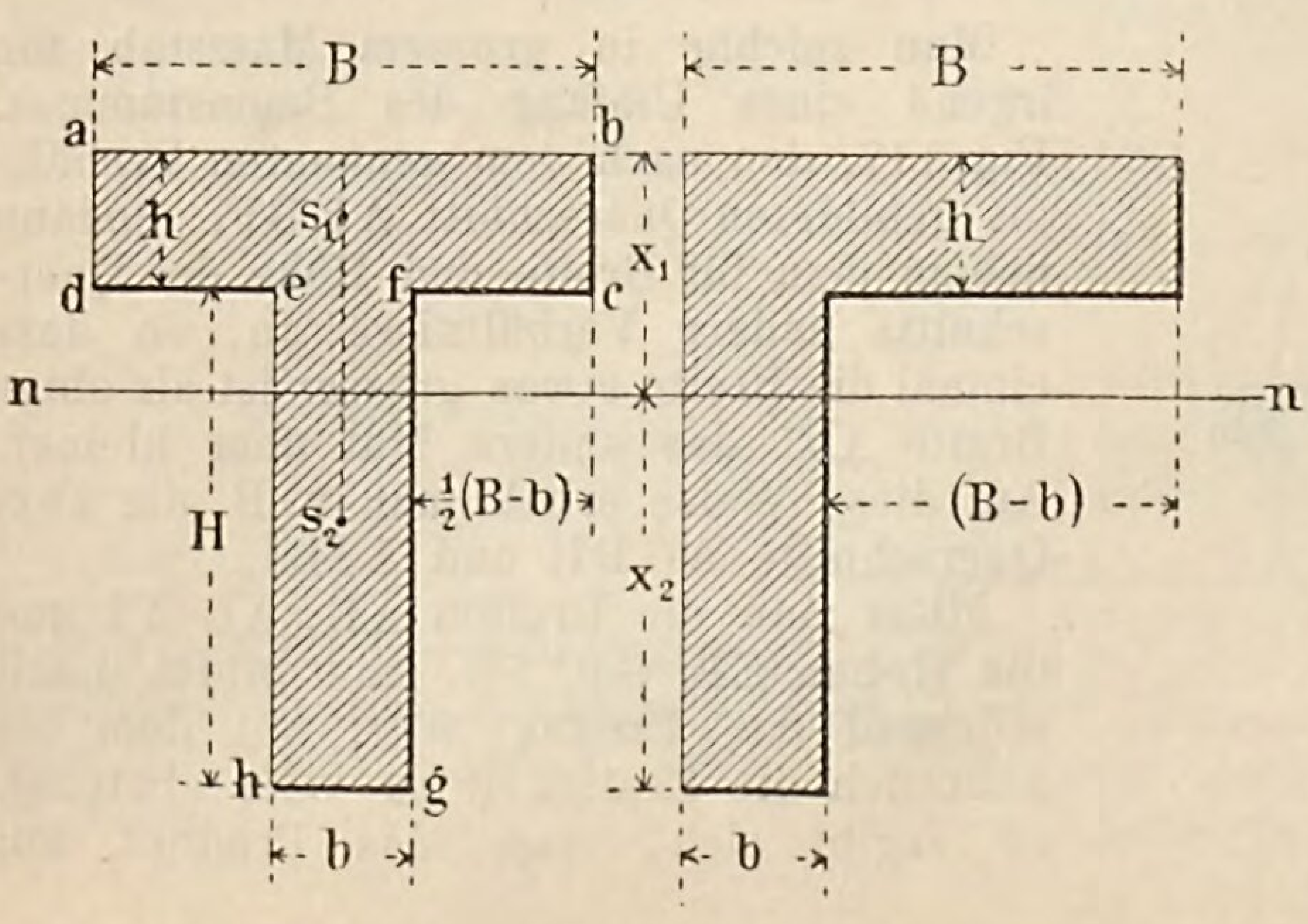
abhängig ist von der Grösse der zulässigen Beanspruchung S.

Frage 130. Da nach Tabelle Seite 32 der Sicherheitskoeffizient S bei Schmiedeeisen für Zug und Druck denselben Wert hat (nämlich 900 kg pro □cm Querschnitt), so folgt daraus, dass welcher Querschnitt für schmiedeeiserne Träger am vorteilhaftesten ist?

Antwort. Da bei Schmiedeeisen S für Zug und Druck den gleichen Wert hat, so werden für auf Biegung beanspruchte schmiedeeiserne Träger diejenigen Querschnitte oder Profile die vorteilhaftesten sein, bei denen zu beiden Seiten der neutralen Achse die maximalen, d. h. grössten Spannungen den vollen Wert für S gleichzeitig erreichen können, die also nur ein Widerstandsmoment haben oder deren neutrale Achse den Querschnitt symmetrisch teilt.

Frage 131. Welches Widerstandsmoment ist bei unsymmetrischen Querschnitten zur Berechnung der Tragfähigkeit zu wählen?

Figur 118. Figur 119.



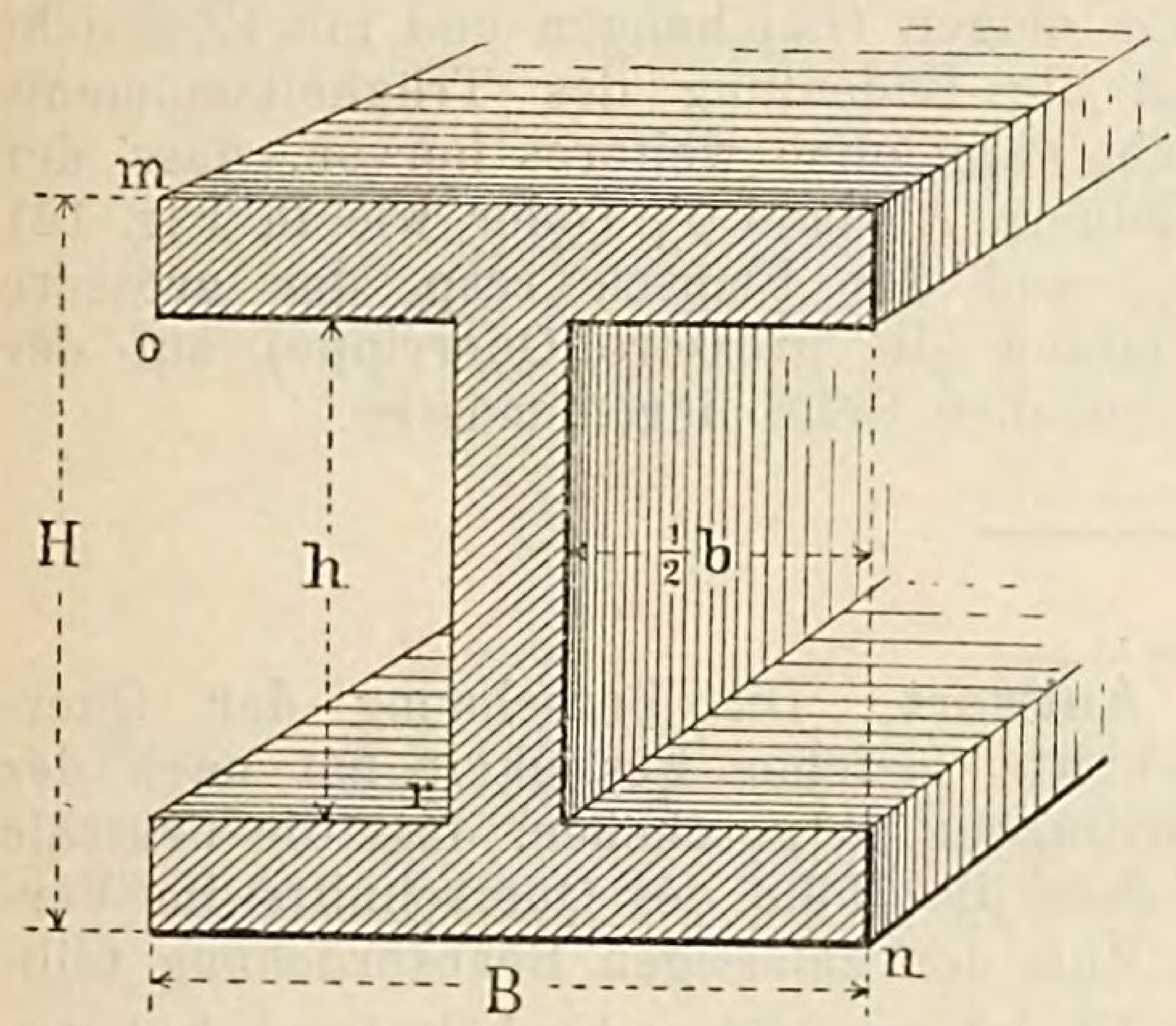
Antwort. Ist der Querschnitt nicht symmetrisch, wie z. B. Fig. 118 u. 119, so hat man zur Berechnung der Tragfähigkeit das kleinere Widerstandsmoment

$$Q_2 = \frac{T}{x_2}$$

zu wählen.

Frage 132. Wie verhält sich die Druckfestigkeit des Gusseisens zu seiner Zugfestigkeit und was folgt daraus für gusseiserne Träger mit symmetrischen Querschnitten?

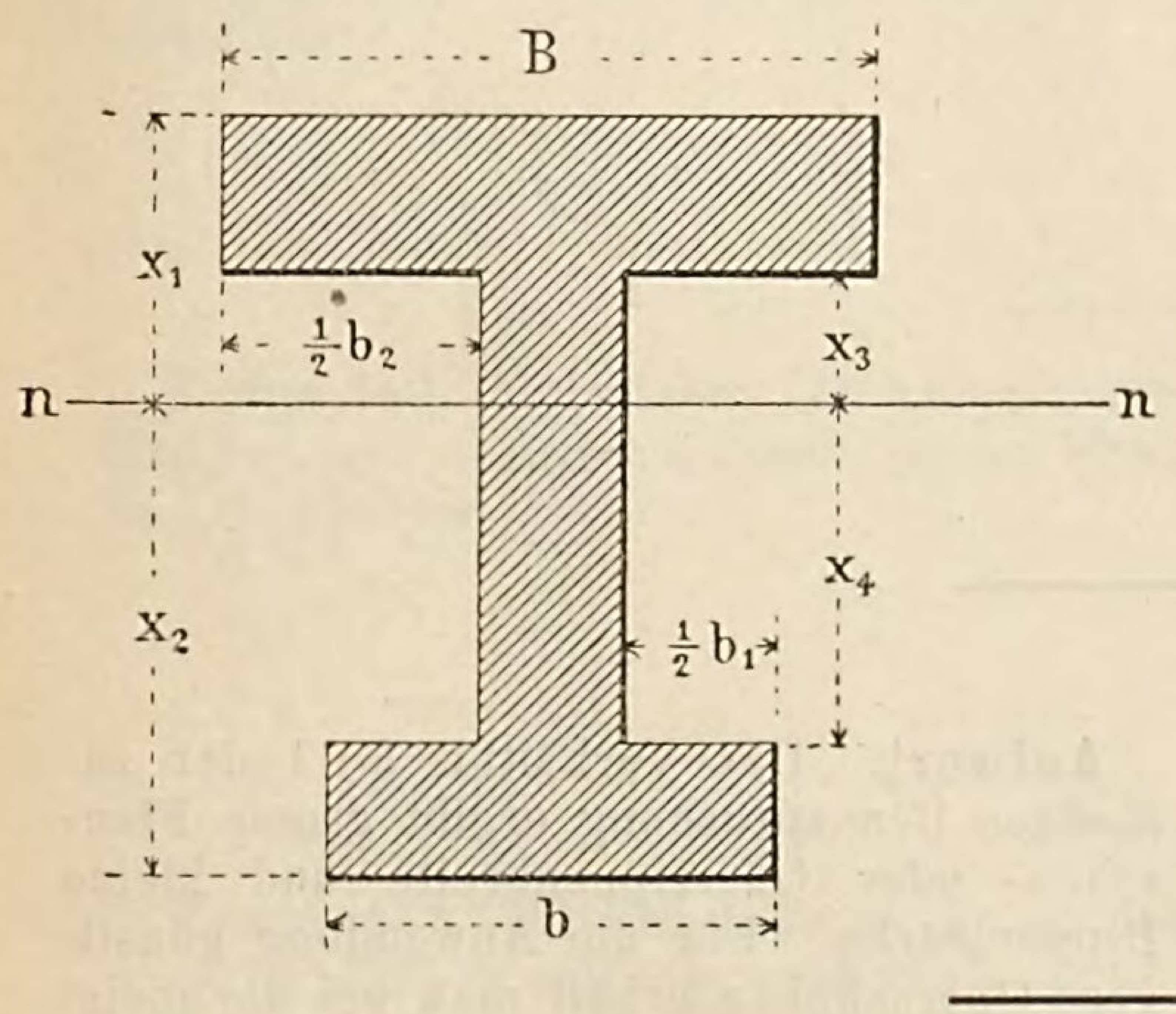
Figur 120.



Antwort. Die Festigkeit des Gusseisens ist nach Tabelle Seite 32 dreimal so gross gegen Druck (900 kg pro □ cm) als gegen Zug (300 kg pro □ cm); es werden demnach symmetrische Profile oder Querschnitte wie Fig. 120 mit gleich grossen Widerstandsmomenten nicht vorteilhaft und mit Materialverschwendung an der auf Druck beanspruchten Seite verbunden sein.

Frage 133. Wie müssen sich somit für volle zulässige Beanspruchung auf jeder Seite der neutralen Achse die Abstände der äussersten Schichten verhalten und wie nennt man solche Profile?

Figur 121.



Antwort. Für volle zulässige Beanspruchung auf jeder Seite der neutralen Achse müssen sich die Abstände der äussersten Schichten von der neutralen Achse $Y_1 : Y_2$ verhalten wie

$$1 : 3 = S_1 : S_2$$

Man nennt solche Profile: Querschnitte gleicher Festigkeit, und dieselben haben meist die in Fig. 121 dargestellte Form.

Frage 134. Wo muss, gleicher Festigkeit auf beiden Seiten der neutralen Achse entsprechend, der kleinere Abstand Y_1 und die grössere Querrippe oder der grössere Flansch liegen?

Antwort. Gleicher Festigkeit auf beiden Seiten der neutralen Achse entsprechend muss

$$Q_1 S_1 = Q_2 S_2$$

oder:

$$\frac{T}{Y_1} \cdot S_1 = \frac{T}{Y_2} \cdot S_2$$

und folglich:

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

sein. Ist Y_2 der grössere Abstand, so ist S_2 die grössere zulässige Beanspruchung. Aus obigen Gleichungen und mit Rücksicht auf die Bedeutung des Trägheitsmoments geht dann ohne weiteres hervor, dass der kleinere Abstand Y_1 (oder wie in Fig. 121 x_1) und der Flansch resp. der grössere Flansch (die grössere Querrippe) auf der gezogenen Seite liegen müssen.

Erkl. 136. Bei der Berechnung der Tragfähigkeit eines gegebenen Profils ist das kleinere der beiden Produkte Q_1S_1 oder Q_2S_2 in Rechnung zu ziehen.

Frage 135. Die Berechnung der Querschnitte gleicher Festigkeit hat nach welcher Bedingung zu geschehen?

Antwort. Die Berechnung der Querschnitte gleicher Festigkeit hat nach der Bedingung zu geschehen, dass die neutrale Achse die Höhe des Querschnitts im Verhältnis der zulässigen Beanspruchung teilt.

Nimmt man dieses Verhältnis nach Antw. auf Frage 132 u. 133 gleich 1 : 3 an, so ist der Abstand der neutralen Achse von der äusseren Kante des Flansches oder der Querrippe (resp. des grösseren Flansches) $= \frac{1}{4}h$, wenn h die Höhe des Querschnitts ist.

Erkl. 137. Nach nebenstehender Antwort hat man also in der Gleichung 12).:

$$x = \frac{f_1y_1 + f_2y_2 + \cdots f_ny_n}{f_1 + f_2 + \cdots f_n}$$

(s. Antw. auf Frage 57)

für x den Wert $\frac{1}{4}h$ zu setzen.

Für die Höhe h und die Flanschendicke nimmt man passende Dimensionen an und drückt diese durch die Rippenstärke b der Mittelrippe aus. Als die Unbekannte, welche die erwähnte Bedingung zu erfüllen hat, ist die Flanschenbreite anzunehmen.

Für einen bestimmten Fall berechnet man dann aus der Gleichung

$$M = Pl = QS$$

den Wert von Q und je nachdem man S für Zug oder für Druck eingesetzt hat, setzt man den erhaltenen Wert dem bereits gefundenen Ausdruck für Q_1 oder Q_2 gleich, woraus dann b, die Höhe des Querschnitts und die Flanschenbreite desselben erfolgt (siehe die nachfolgend gelösten Aufgaben).

Frage 136. Was ist noch über die Form des Querschnitts zu bemerken, wenn man das Verhältnis 3 : 1 zu Grunde legt?

Antwort. Das Verhältnis 3 : 1 der zulässigen Beanspruchung ergibt grosse Flanschen- oder Querrippenbreite und kleine Rippenstärke. Für die Anwendung günstigere Qnerschnitte erhält man bei der meist üblichen Annahme der zulässigen Beanspruchung 500 kg pro □cm für Druck und 250 kg für Zug, also für das Verhältnis

$$\frac{S_1}{S_2} = 2$$

h). Bestimmung des Elasticitätsmodulus resp. der Grösse *S* durch Biegung von Stäben.

Frage 137. Die in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten Formeln sind streng genommen nur wie lange anwendbar?

Antwort. Die in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten Formeln sind auf bestimmte Fälle streng genommen nur solange anwendbar, als die betreffenden Körper eine vollkommene Elasticität besitzen; aber auch dann verlangen sie noch, dass der durch äusseren Druck gebogene Stab nur eine geringe Formveränderung erfahre, denn das neutrale Band soll durch den Schwerpunkt des Stabes gehen und die Länge des letzteren soll von dem Hebelarm der Kraft nicht merklich abweichen.

Frage 138. Auf welche Weise kann man nur erfahren, inwieweit die vorgenannten Bedingungen eingehalten werden müssen?

Antwort. Inwieweit die vorgenannten Bedingungen eingehalten werden müssen, inwieweit Abweichungen von denselben im allgemeinen oder in einzelnen Fällen ohne Störungen auf die gesetzlich erwarteten Resultate bleiben, darüber kann nur die experimentelle Prüfung entscheiden.

Frage 139. Warum hat man eine überaus grosse Menge von Versuchen zur Bestimmung des Elasticitätsmodulus, resp. zur Bestimmung des Sicherheitskoeffizienten S ausgeführt?

Antwort. Da das relative Tragungsvermögen der verschiedenen Baustoffe, insbesondere dasjenige des Holzes und des Eisens sehr oft zu Rate gezogen werden muss, so liegen über diesen Gegenstand zahlreiche experimentelle Untersuchungen vor.

Frage 140. Bei vielen der ausgeführten Experimente suchte man nur welche Frage zu beantworten?

Antwort. Bei vielen der ausgeführten Versuche hatte man sich nur die Frage gestellt, welche Kraft erforderlich sei, um einen Stab von parallelepipedischer Form oder einen in dieser Weise behauenen Balken zu brechen.

Frage 141. Worin stimmen die zu dem vorgenannten Zweck angewendeten Methoden überein?

Antwort. Die zu genanntem Zweck angewandten Methoden stimmen darin überein, dass der zu untersuchende Stab oder Balken in wagerechter Lage an einem Ende eingeklemmt oder eingemauert und am anderen Ende durch Gewichte belastet wurde oder dass derselbe an beiden Enden auf zwei, um die Länge l von einander ent-

fernten Stützen frei aufliegend in der Mitte belastet und in jedem Fall die durch das Gewicht hervorgebrachte Biegung beobachtet wurde.

Frage 142. Wovon ist in beiden der vorgenannten Fälle der Widerstand gegen das Zerbrechen abhängig?

Erkl. 138. Nach den früher erörterten Formeln ist für den an einem Ende befestigten und am anderen Ende belasteten Stab

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{bh^2 S}{l}$$

sowie für den an beiden Enden befestigten und in der Mitte belasteten Stab

$$P = \frac{4}{6} \cdot \frac{bh^2 S}{l}$$

Antwort. In beiden der vorgenannten Fälle ist der Widerstand gegen das Zerbrechen aus den schon früher angegebenen Gründen direkt der Breite und dem Quadrat der Höhe, aber umgekehrt der Länge proportional und ist überdies abhängig von der besonderen Beschaffenheit des Stoffes, d. h. von der durch Erfahrung festgestellten Grösse.

Frage 143. Warum ist es nicht zulässig, die von der Beschaffenheit des Materials abhängige Spannung S aus der Kenntnis des Elasticitätsmodulus E theoretisch abzuleiten?

Erkl. 139. Unter den sehr zahlreichen Versuchen über die Biegung der im Bau- und Maschinenwesen gebräuchlichen Stoffe, die hauptsächlich, ja fast ausschliesslich zu dem Zweck ausgeführt wurden, gute Erfahrungsgrundlagen für die Praxis zu gewinnen, zeichnen sich die von *Eytelwein* über die verschiedenen Werkhölzer, sowie die von *Gerstner* über Holzarten und Eisen durch die Sorgfalt und Genauigkeit in der Ausführung sowie die Ausführlichkeit aus, mit welcher die wesentlichen Einzelnheiten der Versuche mitgeteilt sind. Man ist dadurch in den Stand gesetzt, den Grad der Zuverlässigkeit der meisten ihrer Beobachtungen noch jetzt zu prüfen, und theoretische Konstanten, deren sie für ihre Zwecke selbst nicht bedurften, oder sonst aus Gründen unbeachtet liessen, noch jetzt aus ihren Angaben abzuleiten.

Der Apparat, dessen sich *Gerstner* bediente, ist im wesentlichen der in Antw. auf Frage 145 beschriebene. Doch bestimmte er die Pfeilhöhe mittels eines Fühlhebels, dessen kürzerer Arm von dem sich senkenden Stab niedergedrückt wurde, während der längere an einem Massstab hinglitt und dadurch die eingetretene Aenderung in starker Vergrösserung dem Auge darbot.

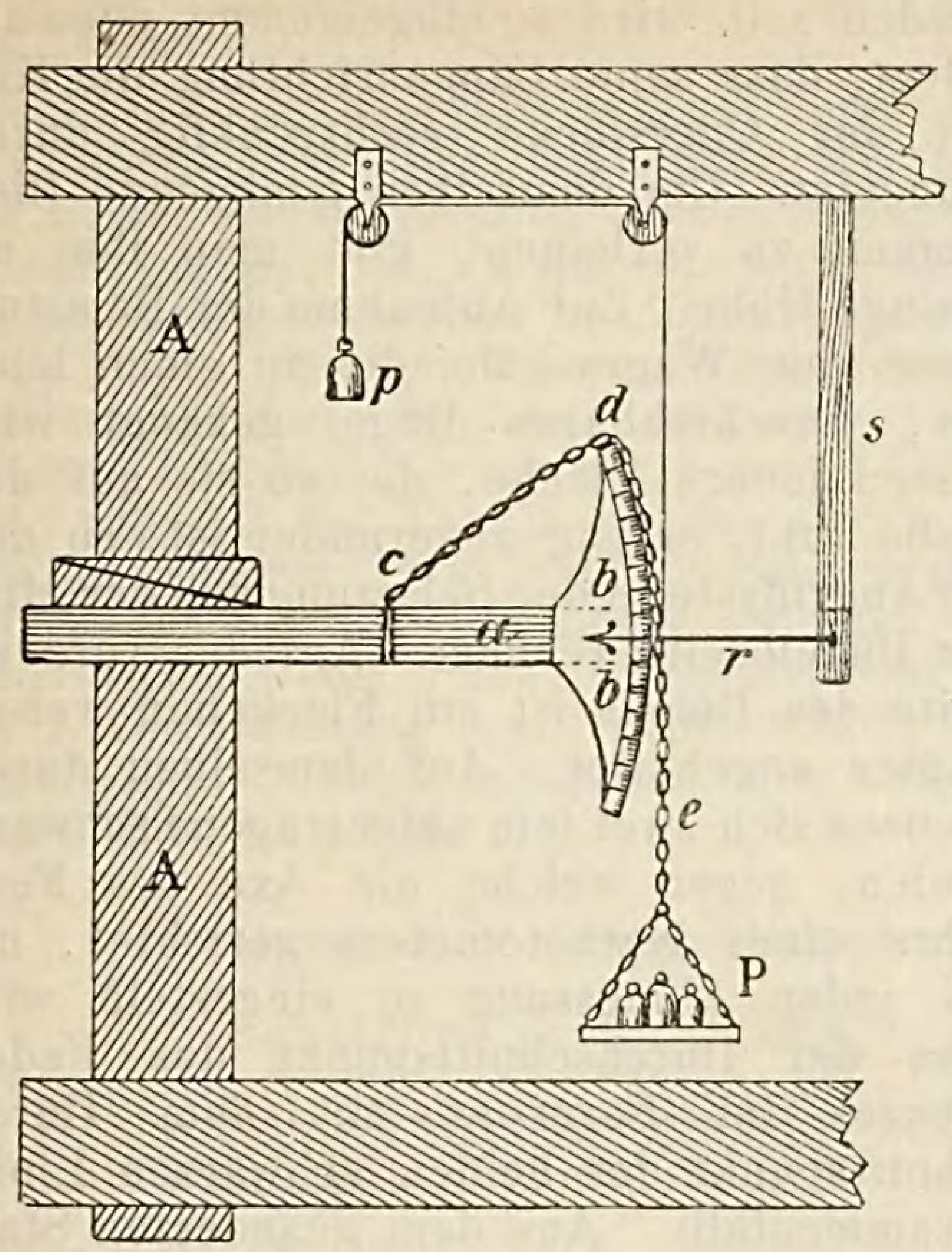
Antwort. Die von der Beschaffenheit des Materials abhängige Erfahrungskonstante S würde sich aus dem bekannten Elasticitätsmodulus theoretisch ableiten lassen bei einem Stab, der bis zum Augenblick des Bruchs, im Sinn der Dehnung sowohl wie der Zusammendrückung, vollkommen elastisch bliebe und bei welchem bis zu dieser Grenze der Widerstand gegen Zusammendrückung dem gegen Dehnung gleich wäre. Beide Bedingungen treffen jedoch wahrscheinlich bei keinem Körper bis zur Grenze des Bruchs zu.

Insbesondere findet man, dass Holz und Schmiedeeisen lange schon vor dem Bruche eine bleibende Biegung annehmen, sowie auch, dass bei den stärkeren Biegungen die Zusammendrückung im Vergleich zur Dehnung zurückbleibt. Infolge davon rückt das neutrale Band, welches anfangs in der Mitte des Stabes liegt, allmählich nach der zusammengedrückten Seite desselben und fällt im Augenblicke des Bruchs mit der konkaven Aussenfläche zusammen. Die Bestimmung des Wertes S erfordert daher für jedes Material eine besondere Untersuchung.

Frage 144 Welcher Methode bediente sich *Beaufoy*, um die Tragkraft verschiedener Holzarten zu messen?

Antwort. Es wurde das eine Ende des zu prüfenden prismatischen Körpers *aa* in einen starken Balken AA fest eingekeilt, trug am anderen Ende ein eigens vorge-

Figur 122.



richtetes, auf dasselbe geschobene Bogenstück bb, damit die Richtung des herabziehenden Seiles cde stets zu der Längenachse desselben normal sei; an dieses Seil wurde eine Wagschale P befestigt, und durch ein Gegengewicht p über eine wenig Reibung verursachende Rolle gezogen, balanciert, und wenn dann die Wagschale mit Gewichten beschwert war, so gab ein Zeiger r, an einer herabgehenden Stange s befestigt, die Biegung in Graden an, und die Summe der bis zum Zerbrechen aufgelegten Gewichte in Pfunden die absolute Tragkraft oder das Maximum der relativen Festigkeit des untersuchten Körpers. Hiermit lässt sich dann auch diejenige Last finden, durch welche der Körper beschwert werden kann, ohne dass seine Form bleibend verändert wird, oder nach deren Wegnahme er seine vorige Gestalt wieder annimmt, und welche man als das Maximum ansehen kann, womit er in der Anwendung beschwert werden darf.

Erkl. 140. *Beaufoy* fand vermittelst des in Fig. 122 dargestellten Apparats, dass verschiedene Stücke der nämlichen Holzart sehr ungleiche, zuweilen bis auf das Doppelte steigende Tragkraft zeigten, dagegen waren die Krümmungen derselben so lange sehr regelmässig, als sie nicht über die Hälfte des Maximums ihrer relativen Festigkeit belastet wurden. Die Versuche wurden nur mit den zum Schiffsbau brauchbaren Holzarten angestellt, haben indes auch einige allgemeine Resultate ergeben. Als das stärkste Holz zeigte sich das der Pechtanne (pitch-pine) und zunächst nach dieser das der englischen Eiche mit geraden Fibern. Gleich lange Parallelepipeda von ungleichen Dimensionen zeigten eine nach etwas mehr als dem Kubus der Seiten des Querschnitts zunehmende Tragkraft; wurden sie aber in mehrere ähnliche Parallelepipeda zerschnitten, so nahm ihre Tragkraft ab wie die Quadratwurzeln der Zahl der Stücke, in welche sie zerschnitten waren.

Frage 145. Welcher Apparat eignet sich sowohl zur Untersuchung von Stäben, welche nur mit einem Ende befestigt und am anderen belastet, als auch zur Untersuchung von Stäben, welche an beiden Enden befestigt und in der Mitte belastet sind?

Antwort. Der in Fig. 123 abgebildete Apparat ist gleich dienlich zur einen wie zur anderen Verfahrungsweise. Die oberen Querstücke desselben sind aus starkem Holz verfertigt, ihre Oberflächen parallel laufend, genau horizontal gerichtet und oben abgeschliffen. Der senkrechte Abstand ihrer scharfen Kanten beträgt genau 500 Millimeter. Auf beiden Querstücken sind eiserne Vorrichtungen zum Einklemmen der Stäbe angebracht.

Erkl. 141. Die in nebenstehend beschriebener Weise angestellten Versuche führten zu dem Resultat, dass innerhalb gewisser Grenzen die Senkungen eines gebogenen Stahlstabes den Belastungen oder auch die Zunahmen der Senkungen den Zunahmen der Belastungen proportional sind, ganz so wie es die Gleichung 1). Seite 115:

$$P = \frac{3EsT}{l^3}$$

oder wenn wir aus Gleichung 14). Seite 82 für $T = \frac{1}{12}bh^3$ einsetzen:

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{Ebh^3s}{l^3}$$

(worin s die Senkung bedeutet)

verlangt.

Man sollte meinen, dass aus der für eine gewisse Länge eines Stabes gefundenen Senkung diejenige für beliebige andere Länge und Belastung desselben Stabes sich müsse ableiten lassen, denn aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$Pl^3 : P_1 l_1^3 = s : s_1$$

Ist demnach der Pfeil der Biegung s_1, welcher der Länge l_1 und dem Gewicht P_1 angehört, bekannt, so sollte sich nach den theoretischen Vorstellungen, welche der Gleichung zu Grunde liegen, finden:

$$s = \frac{l^3 P}{l_1^3 P_1} \cdot s_1$$

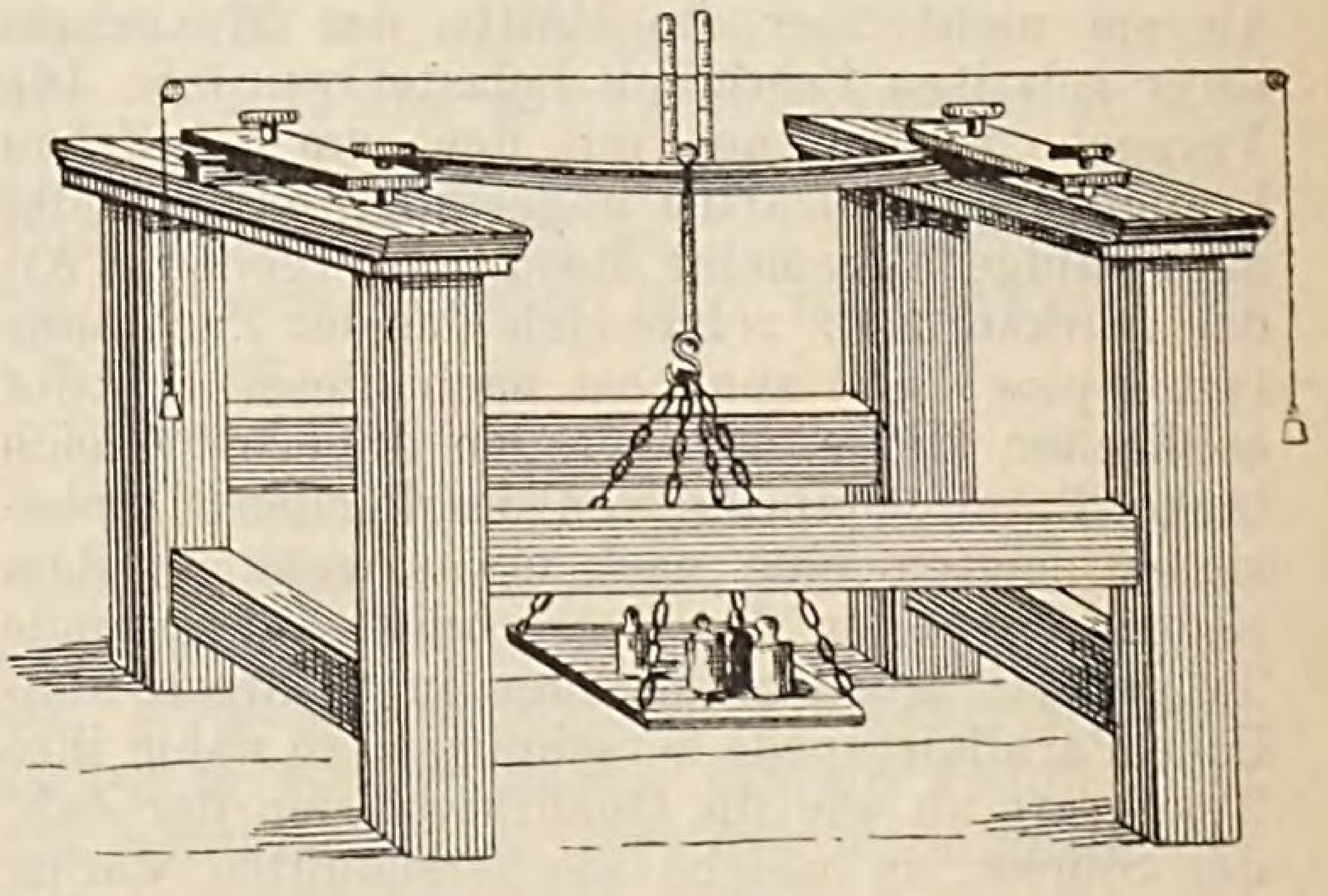
Die wirklichen Senkungen sind aber bedeutend grösser als die berechneten, und zwar nehmen die Abweichungen verhältnismässig zu, wenn man den gebogenen Teil des Stabes verkürzt.

Diese Unterschiede beruhen nicht auf irrigen theoretischen Voraussetzungen, sondern auf der Schwierigkeit, denjenigen Teil der Stablänge, welcher auf die Biegung Einfluss hat, genau zu messen. Der hieraus hervorgehende Fehler in der richtigen Beurteilung der Biegung elastischer Stäbe verschwindet, wenn dieselben eine sehr grosse Länge besitzen, so dass diejenige des eingeklemmten Teils nur noch einen kleinen Abschnitt der ganzen Länge betragen. Der eingeklemmte Teil des Stabes ist nämlich nicht teilnahmlos an der die Biegung bedingenden Dehnung und Zusammendrückung. Beide dringen vielmehr zwischen den Backen der Klemme, wenn auch unter vergrössertem Widerstand, in das Innere ein und bewirken dadurch ganz dasselbe, als wenn der aus der Klemme hervortretende Schienenteil eine grössere Länge hätte.

Aehnliche Schwierigkeiten treten hervor, wenn ein Stab an beiden Seiten in den Apparat Fig. 123 eingeklemmt wird. Da also die Pfeilhöhe der Belastung nicht genau proportional bleibt, so gelten alle theoretischen Folgerungen, welche man aus den früher gegebenen Formeln für die Pfeilhöhe s zieht, nur zwischen engen Grenzen der Formveränderungen.

Der Stab, dessen Verhalten untersucht werden soll, wird so eingeklemmt oder aufgelegt, dass seine Längenrichtung die Kanten der Querstücke rechtwinklig durchschneidet. Um demselben genügende Biegsamkeit zu verleihen, gibt man ihm nur geringe Höhe. Zur Aufnahme der Belastung dient eine Wageschale, die an einen leichten, verschiebbaren Bügel gehängt wird, dessen innere Fläche, da wo sie auf dem Stabe ruht, mässig abgerundet ist, so dass die Angriffsstelle der Belastung von der Mitte der Bügelbreite rechnet. Auf der vorderen Seite des Bügels ist ein Fleckchen weisses Papier angeheftet. Auf demselben durchkreuzen sich zwei fein aufgetragene schwarze Linien, gegen welche die Axe des Fernrohrs eines Kathetometers gerichtet, und bei jeder Abmessung so eingestellt wird, dass der Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes im Fernrohr mit dem Durchschnittspunkt der beiden schwarzen Linien zusammenfällt. Aus dem geänderten Stand des letzteren, der auf dem Massstab des Kathetometers unmittelbar abgelesen werden kann, erfährt man die Senkung oder die Pfeilhöhe des gebogenen Stabs.

Figur 123.



Eytelwein wandte, um die einer Belastung P entsprechende Durchbiegung zu finden, einen Horizontalfaden, sowie eine, in der Mitte auf dem Balken aufsitzende Skala an (s. Fig. 123).

Erkl. 142. In ähnlicher Weise wie das Eisen in seiner Beschaffenheit als Stahl, Schmiedeeisen und Gusseisen, sind noch mehrere andere Körper auf ihre Biegungselasticität untersucht und die gewonnenen Resultate zugleich mit denen des Eisens in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden. Die Temperatur während der Beobachtungszeit war die des Zimmers zwischen 0 bis 16° C. Die berechneten Elasticitätskoefficienten beziehen sich stets auf geringe Biegungen. Letztere sind nur der besseren Uebersicht willen in der Tabelle auf den Druck von 1 Kilo reduziert. Die Stäbe hatten parallelepipedische Form. Ihre Länge zwischen den Unterlagen, Breite, Höhe, sowie die Senkung für 1 Kilo Belastung in der Mitte sind in den Spalten *l*, *b*, *h* und *s* angegeben. Alle Längenmasse sind Millimeter.

Bezeichnung der Stäbe.	*l*	*b*	*h*	*s*	*E*
Gussstahl	500	8,52	2,40	12,64	20 966
Schmiedeeisen	500	10,30	2,66	8,15	19 780
Gusseisen, Oberfläche rauh . .	510	11,00	4,40	2,81	12 595
„ Oberfläche geschliffen	510	10,51	4,00	3,58	13 772
Kupfer	500	9,90	2,60	14,45	12 719
Messing	500	9,70	2,50	19,80	10 168
Zink	500	9,90	3,60	6,00	11 276
Blei	500	10,10	3,74	28,00	2 112
Fensterglas	500	7,50	3,00	20,60	7 491
Spiegelglas, gewöhnliches . . .	500	9,50	2,65	26,80	6 600
Eichenholz	500	10,05	4,55	44,00	835
Buchenholz	500	10,05	4,79	29,50	959
Tannenholz	500	9,90	4,89	16,00	1 699

Frage 146. An welchem Uebelstand leidet die Bestimmung des Elasticitätsmodulus mit Hilfe des vorerwähnten Apparats?

Antwort. Wenn man bei Benutzung des in Fig. 123 dargestellten Apparats sicher innerhalb der Grenzen vollkommener Elasticität bleiben will, so hat man im allgemeinen sehr kleine Senkungen zu messen, so dass die hierbei unvermeidlichen Fehler manchmal nicht unerheblich das Resultat beeinflussen. Dazu kommt noch, dass jede mit der Belastung des Stabes eintretende Senkung der beiden als Auflagen dienenden Schneiden an dem Kathetometer als Durchbiegung gemessen wird, und die letztere somit fast immer grösser erscheint, als sie wirklich ist.

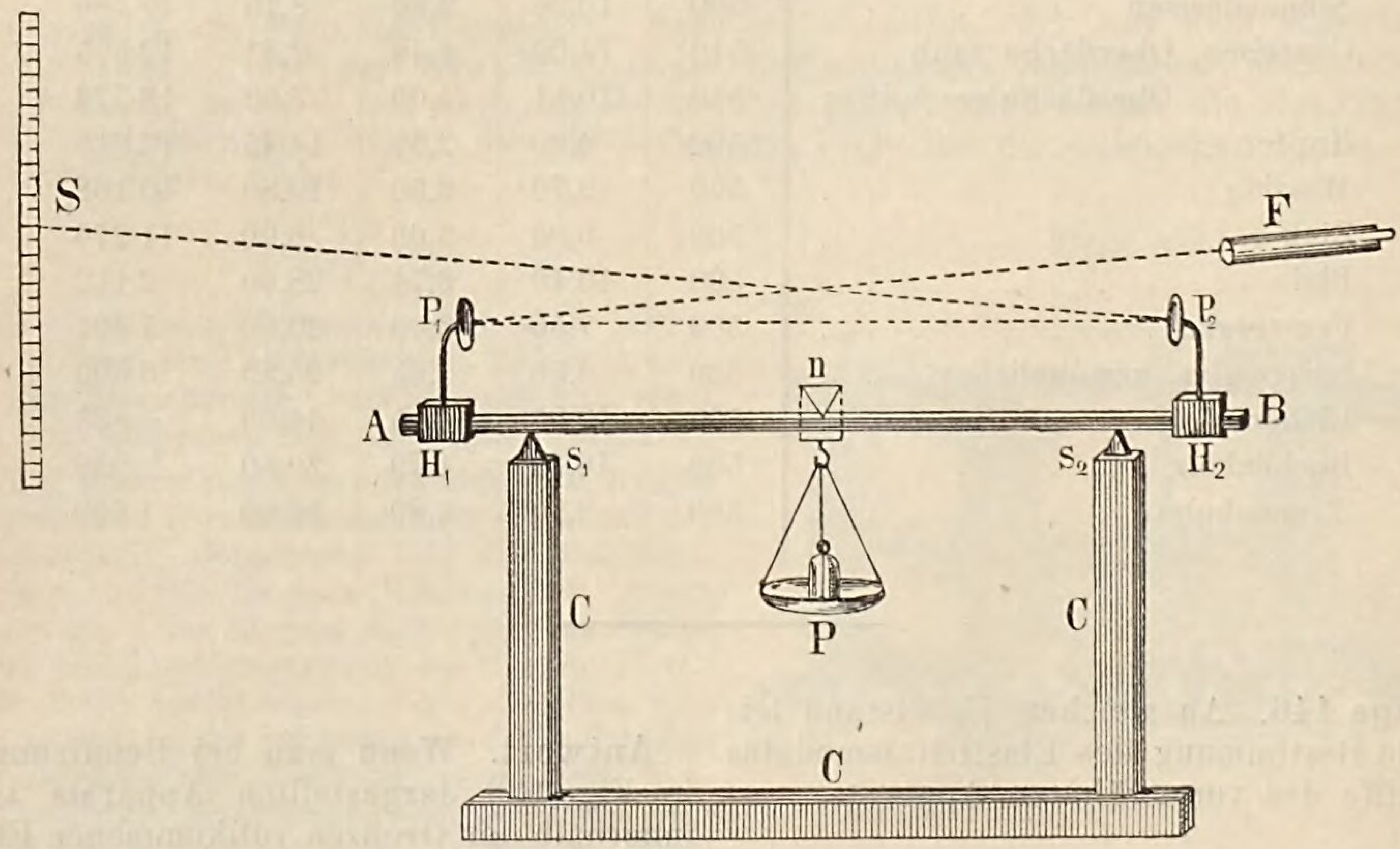
Frage 147. Bei welcher Methode und auf welche Weise hat man diese Uebelstände möglichst zu vermeiden gesucht?

Antwort. Die vorerwähnten Uebelstände hat man bei der von *W. Pscheidl* beschriebenen und ausgeführten Methode zu vermeiden gesucht. Es wird hierbei nicht die Senkung in der Mitte des Stabes gemessen, sondern die Neigungsänderung an den Stabenden. Zu diesem Zweck sind auf dem Stab über den Schneiden zwei Spiegelchen horizontal aufgekittet, so dass ihre spiegelnde Fläche nach oben sieht. Vermittelst zweier Fernrohre und Skalen wird die bei der Belastung eintretende Neigung der Spiegel bestimmt und man hat hierbei den Vorteil, dass eine infolge der Belastung etwa eintretende Neigung des ganzen Stabes ausgeschlossen ist, da die in den Fernrohren beobachteten, durch die Biegung verursachten Neigungsänderungen an den beiden Enden nach verschiedenen Seiten erfolgen.

Erkl. 143. Eine Vereinfachung der neben beschriebenen Methode bietet ein von *Arthur König* in Berlin benutztes Verfahren.

In der Fig. 124 bezeichnet AB den zu untersuchenden Stab von rechteckigem Querschnitt. Derselbe ruht auf den beiden Stahlschneiden s_1 und s_2, welche auf dem festen gusseisernen Gestell CCC angebracht sind. An den Enden des Stabes tragen die fest aufgeschobenen Hülsen H_1 und H_2 die fast senkrecht stehenden Spiegel p_1 und p_2. Durch das Fernrohr F, welches auf den Spiegel p_1 gerichtet ist, erblickt man in diesem die bereits in p_2 schon einmal gespiegelte Skala S. In der Mitte zwischen s_1 und s_2 liegt auf dem Stab die Stahlschneide r, welche vermöge einer passend angehängten Wagschale mit dem Gewicht P belastet werden kann und dadurch eine Biegung des Stabes bewirkt.

Figur 124.



Bei einer solchen Biegung wird die Neigung der Spiegel p_1 und p_2 sich ändern und demnach ein anderer Skalenteil von S am Fadenkreuz des Fernrohrs F einstehen.

Bezeichnet man die Entfernung zwischen der Skala S und dem Spiegel p_2 mit D, diejenige zwischen den beiden Spiegeln p_1 und p_2 mit d, ferner mit v die infolge der Durchbiegung in dem Fernrohr beobachtete Skalenverschiebung und endlich mit φ die hierbei eintretende Aenderung in der Neigung der Spiegel p_1 und p_2, welche für beide dieselbe ist, so ergibt sich aus einer einfachen geometrischen Betrachtung mit Rücksicht auf die geringe Grösse des Winkels φ, dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{4D + 2d}$$

Nennen wir noch l die in Betracht kommende Länge des untersuchten Stabes, d. h. den Abstand zwischen den Schneiden s_1 und s_2, ferner E den Elasticitätsmodulus, h die senkrecht stehende und b die horizontal liegende Kante des rechteckigen Stabes, so ist:

$$E = \frac{3}{4} \cdot \frac{l^2 . P}{h^3 b . \operatorname{tg}\varphi}$$

oder, wenn wir für tg φ seinen obigen Wert einsetzen:

$$E = \frac{3}{2} \cdot \frac{P l^2 (2D + d)}{v h^3 b}$$

Die mit diesem Verfahren ausgeführten Bestimmungen ergaben eine höchst befriedigende Genauigkeit.

i). Bestimmung der mechanischen Arbeits- oder Wirkungsgrösse, die zur Biegung eines Stabes nötig ist.

Frage 148. Was ergibt sich aus der für den Pfeil der Biegung ermittelten Gleichung?

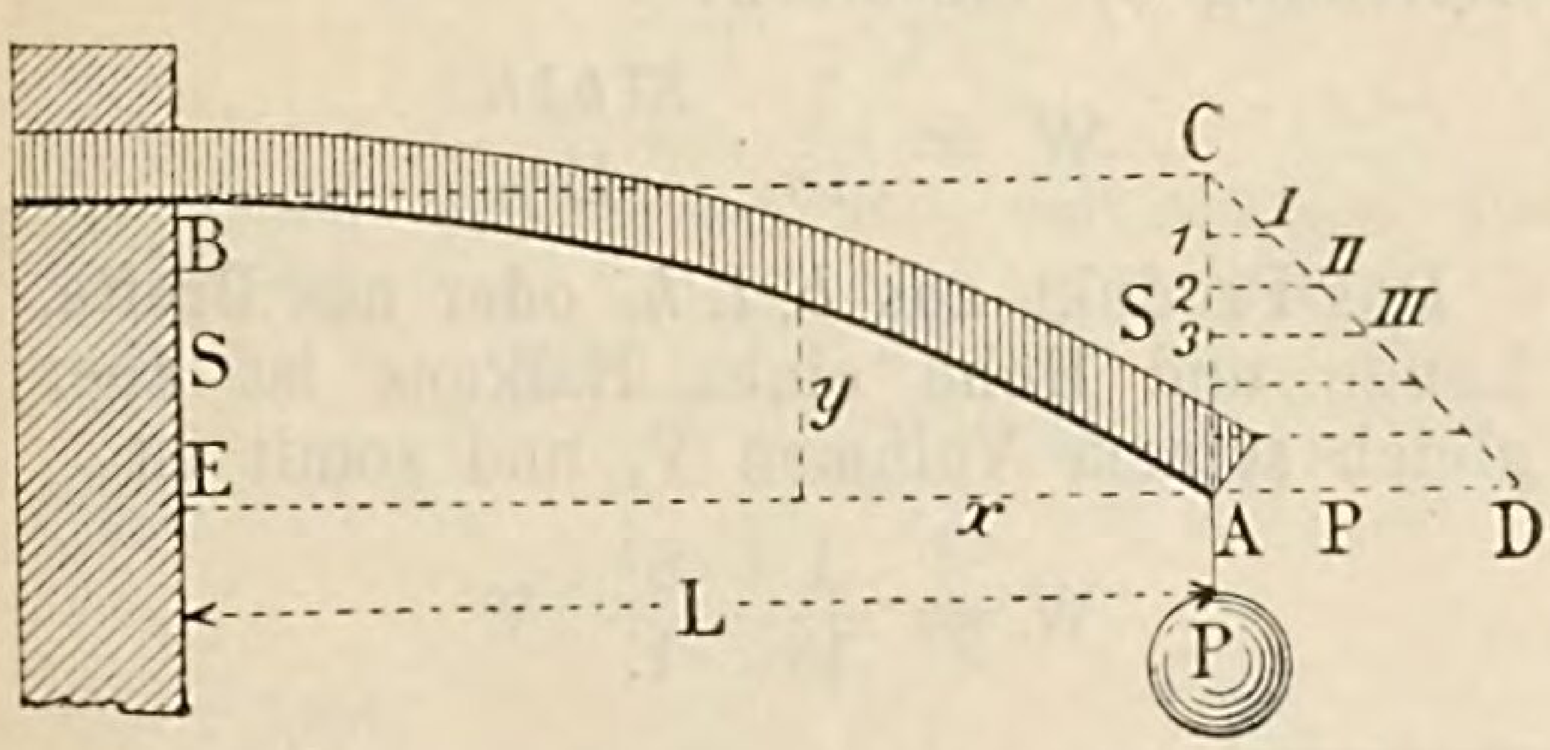
Antwort. Aus der für den Pfeil der Biegung ermittelten Gleichung:

$$s = \frac{1}{3} \cdot \frac{P l^3}{E T}$$ (s. Seite 115)

ergibt sich, dass die biegende Kraft P sich im einfachen Verhältnis mit der Senkung s ändert.

Frage 149. Wie kann deshalb die Arbeits- oder Wirkungsgrösse der Kraft P, welche zur Hervorbringung der Senkung s erforderlich ist, dargestellt werden?

Figur 125.



Antwort. Da die biegende Kraft der Senkung s entspricht, so kann die Arbeits- oder Wirkungsgrösse derselben, welche zur Hervorbringung der Senkung erforderlich ist, durch ein Dreieck ACD (Fig. 125) dargestellt werden, in welchem AC $=$ s und AD $=$ P entspricht (vergl. Antwort auf Frage 36).

Frage 150. Welcher Wert ergibt sich aus der erwähnten geometrischen Konstruktion für die Arbeitsgrösse W?

Antwort. Genau in derselben Weise wie in Antw. auf Frage 36 erhält man im vorliegenden Fall für die Arbeits- oder Wirkungsgrösse W, welche dem Flächeninhalt des Dreiecks ACD entspricht:

$$W = \frac{1}{2} P s$$

oder wenn wir hierein den bereits oben in Antw. auf Frage 148 wiederholten Wert für s setzen:

$$1). \quad \ldots \quad W = \frac{1}{6} \cdot \frac{P^2 l^3}{E T}$$

Nach Antw. auf Frage 55 ist aber die von der Kraft P hervorgebrachte Maximalspannung zu bestimmen nach der Gleichung 9).:

$$P l = \frac{S}{Y} T$$

und man erhält nach Substitution des hieraus für

$$P = \frac{S T}{Y l}$$

sich ergebenden Wertes die Gleichung:

$$2). \quad \ldots \quad W = \frac{1}{6} \cdot \frac{S^2 T l}{Y^2 E}$$

oder da nach Gleichung 10). Seite 79 für $\frac{T}{Y} = Q$ gesetzt werden kann, so ist:

$$3). \quad \ldots \quad W = \frac{1}{6} \cdot \frac{S^2 Q l}{Y E}$$

Frage 151. Was ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung für den Fall, dass der Querschnitt des auf Biegung beanspruchten Balkens ein Rechteck von den Seiten h und b bildet?

Erkl. 144. Aus den Werten von $\frac{S^2}{E}$ für die verschiedenen Materialien, wie sie in Tabelle auf Seite 38 unter $\frac{B^2}{E}$ in der vorletzten Kolumne enthalten sind, ersieht man, dass dieser Koeffizient z. B. für Gussstahl 33, für Schmiedeeisen 10,7 bis 19,6, für Gusseisen 9, für Eichenholz 4,1 ist, und dass somit der Gussstahl unter allen Materialien für diese Verwendung sich am besten eignet.

Antwort. Für den Fall, dass der gebogene Balken einen rechteckigen Querschnitt von den Seiten h und b besitzt, ist nach Gleichung 15). Seite 82:

$$Q = \frac{1}{6} b h^2 \text{ und } Y = \frac{1}{2} h$$

folglich, wenn wir diese Werte in die obige Gleichung 3). einsetzen:

$$W = \frac{1}{18} \cdot \frac{S^2 b l h}{E}$$

Das Produkt aus b, l, h, oder aus Breite, Länge und Höhe eines Balkens ist aber gleich seinem Volumen V, und somit ist

$$W = \frac{1}{18} \cdot \frac{S^2}{E} \cdot V$$

Frage 152. Welches Gesetz ergibt sich aus dieser Gleichung?

Erkl. 145. Der nebenstehende Satz gilt auch für beliebige andere Querschnittsformen. So z. B. ist für einen Balken, dessen Querschnitt ein Kreis vom Durchmeser d ist, nach Gleichung 6). Seite 99:

Antwort. Aus dieser Gleichung ergibt sich, dass die mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um den Balken bis zur Elasticitätsgrenze durchzubiegen, proportional ist einerseits dem körperlichen Inhalt, anderseits dem vom Material abhängigen

$$d = \frac{1}{32} d^3 \pi$$

und

$$Y = \frac{1}{2} d$$

Setzt man diese Werte in Gleichung 3). auf Seite 158, so ergibt sich für

$$W = \frac{1}{96} \cdot \frac{S^2 d^2 \pi l}{E}$$

oder für $\frac{d^2 \pi l}{4}$ das Volumen V eingesetzt:

$$W = \frac{1}{24} \cdot \frac{S^2}{E} \cdot V$$

Frage 153. Was ist in Bezug auf die Arbeitsgrösse zu bemerken, welche nötig ist, einen an beiden Enden gestützten Balken durch eine in der Mitte desselben wirkende Kraft zu durchbiegen?

Erkl. 146. Für eine dreieckige Feder, siehe Fig. 105, ist nach Erkl. 125:

$$s = \frac{M l^2}{2 E T}$$

oder, da

$$M = P l$$

so ist in diesem Fall:

$$s = \frac{P l^3}{2 E T}$$

und

$$W = \frac{1}{2} P s$$

oder:

$$W = \frac{1}{4} \cdot \frac{P^2 l^3}{E T}$$

und die von der Kraft P hervorgebrachte grösste Biegungsspannung wiederum zu bestimmen nach der Gleichung:

$$\frac{S}{Y} T = P l$$

aus deren Verbindung mit der vorigen die Gleichung:

$$W = \frac{1}{4} \cdot \frac{T l}{Y^2} \cdot \frac{S^2}{E}$$

oder:

$$W = \frac{1}{6} V \cdot \frac{S^2}{E}$$

sich ergibt.

In allen diesen Fällen bildet der für W gefundene Ausdruck negativ genommen den Ausdruck für die von dem Elasticitätswiderstand verrichtete Arbeit. Wenn ein Balken aus dem gebogenen Zustand wieder in den geradlinigen zurückkehrt, so verrichten die Elasticitätskräfte eine positive mechanische Arbeit von gleicher Grösse mit derjenigen, welche vorher zum Hervorbringen des gebogenen Zustandes erforder-

Biegungsquotienten $\frac{S^2}{E}$, sich aber nicht richtet nach den einzelnen Dimensionen.

Antwort. Die in Antw. auf Frage 150 entwickelten Gleichungen gelten auch für einen an beiden Endpunkten unterstützten Balken, welcher durch eine in der Mitte desselben wirkende Kraft durchgebogen wird. Denn jede der beiden Hälften eines solchen Balkens befindet sich in der Lage eines von der Kraft $\frac{1}{2}$ P durchgebogenen Balkens. Für diesen Fall hat man also in Gleichung:

$$s = \frac{1}{3} \cdot \frac{P l^3}{E T}$$

$\frac{1}{2}$ P statt P und $\frac{1}{2} l$ statt l zu setzen und erhält die Gleichungen:

$$s = \frac{1}{3} \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{l^3}{8 E T}$$

oder:

$$s = \frac{1}{48} \cdot \frac{P l^3}{E T}$$

und

$$W = \frac{1}{2} P s$$

oder:

$$W = \frac{1}{96} \cdot \frac{P^2 l^3}{E T}$$

Wenn man in letzterer den aus der Gleichung für die grösste Biegungsspannung:

$$\frac{S}{Y} T = \frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{2} l$$

sich ergebenden Wert für P substituiert, so erhält man wiederum dieselbe Gleichung, welche für den an einem Endpunkt befestigten Balken von gleicher Länge gefunden wurde.

lich war. Die lebendige Kraft, welche durch diese positive mechanische Arbeit erzeugt werden kann, ist ebenso gross wie diejenige, welche vorher beim Krummbiegen durch die negative mechanische Arbeit der Elasticitätswiderstände vernichtet werden konnte.

Frage 154. Wie erhält man die Arbeitsgrösse, welche zur Durchbiegung bis zum Bruch erforderlich ist?

Antwort. Will man die Arbeitsgrösse, die zur Durchbiegung bis zum Bruch erforderlich ist, ermitteln, so hat man in den obigen Gleichungen nur den Wert des Bruchkoeffizienten an Stelle des Sicherheitskoeffizienten einzusetzen.

k). Besonders wichtige Anwendungen der Biegungselasticität stählerner Federn.

Frage 155. Was versteht man im allgemeinen unter elastischen Federn?

Erkl. 147. Federn, welche auf Druck oder Zug in Anspruch genommen werden, bestehen aus einem besonders zusammenpressbaren oder dehnbaren Material, z. B. Kautschuk.

Die Federn aus steifem Material, wie Stahl oder Messing, haben vorherrschend Stabform und sind bei grosser Länge der Raumersparnis wegen spiralförmig aufgewickelt (s. Fig. 126) und setzen sowohl dem Zusammendrehen als auch dem Aufdrehen, wobei eine Biegung stattfindet, einen elastischen Widerstand entgegen.

Antwort. Unter elastischen Federn versteht man Maschinenteile aus elastischem Material, als Stahl, Messing, Holz, Kautschuk, die vermöge ihrer Form im stande sind,

a). Stösse aufzunehmen und zu mildern (wie z. B. die Puffer an Eisenbahnwagen);
b). Bewegungen hervorzubringen (wie z. B. die Triebfedern der Uhren, Spieldosen);
c). Pressungen oder Spannungen zu erzeugen (wie die sogen. Druck- und Spannfedern);
d). Druck- und Zugkräfte zu messen (wie die Federwagen und Dynamometer) oder
e). Töne hervorzubringen (wie z. B. die Federn der Spieldosen).

Frage 156. Welche von den vorgenannten Anwendungen der Federn sind als besonders wichtig hervorzuheben?

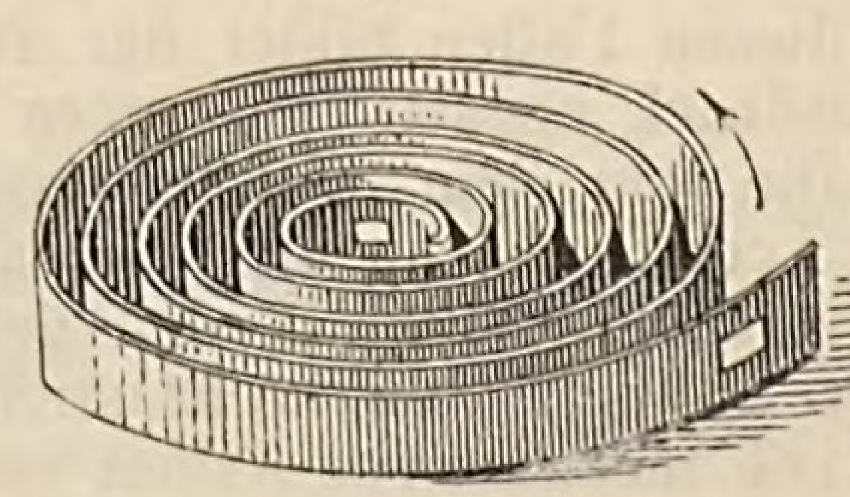
Erkl. 148. Da die Federwagen bereits bei Behandlung der Zugelasticität ihre Erledigung gefunden haben, so bleiben hier nur noch die Uhrfedern und die dynamometrischen Apparate zu beschreiben übrig.

I. Die Uhrfedern, welche die Bewegungsapparate der Taschenuhren, Spieluhren und Spieldosen sind, bestehen aus dünnen und langen Stahlstreifen, die so bearbeitet sind, dass sie von selbst die Spiralform annehmen. An ihrem inneren, von den Windungen umkreisten Ende ist eine solche Feder (s. Fig. 126) unbeweglich befestigt, während das äussere Ende sich ungehindert bewegen kann. Zieht man dieses freie Ende in der Richtung des Pfeils weiter nach

Antwort. Als besonders wichtige Anwendungen der Federn sind hervorzuheben:

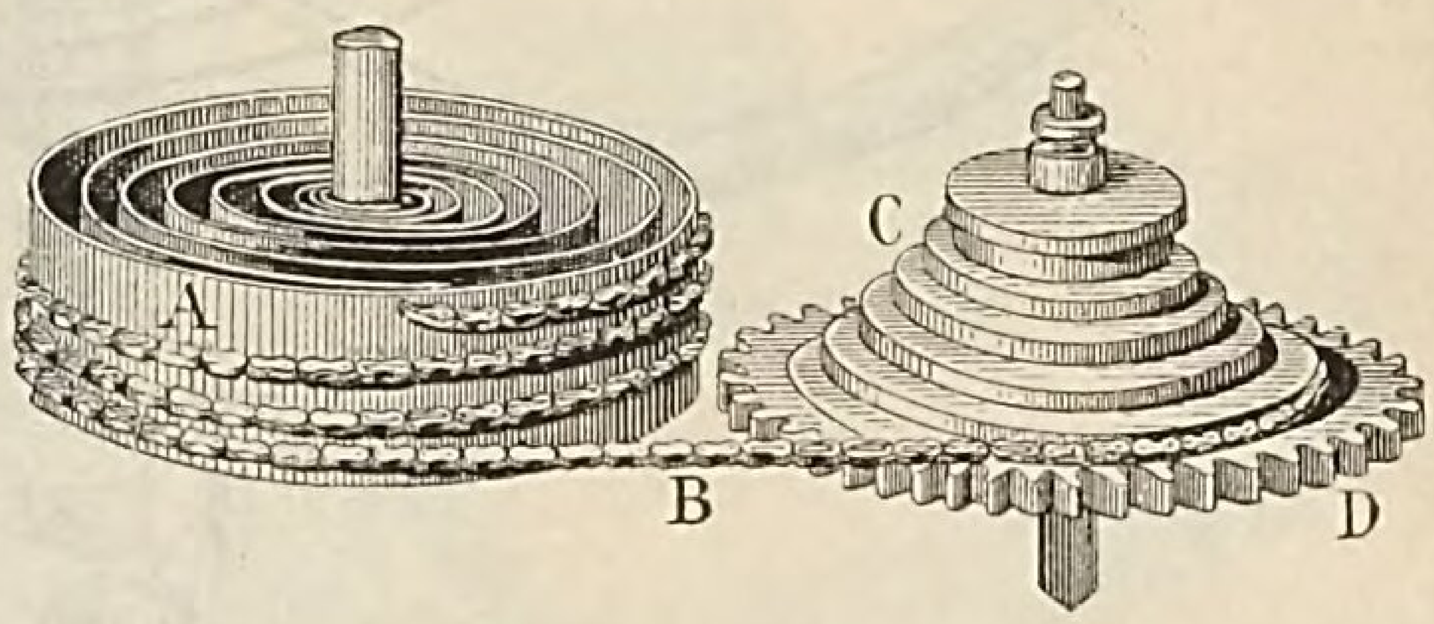
1). Die Uhrfedern,
2). die Federwagen und
3). die dynamometrischen Apparate.

Figur 126.



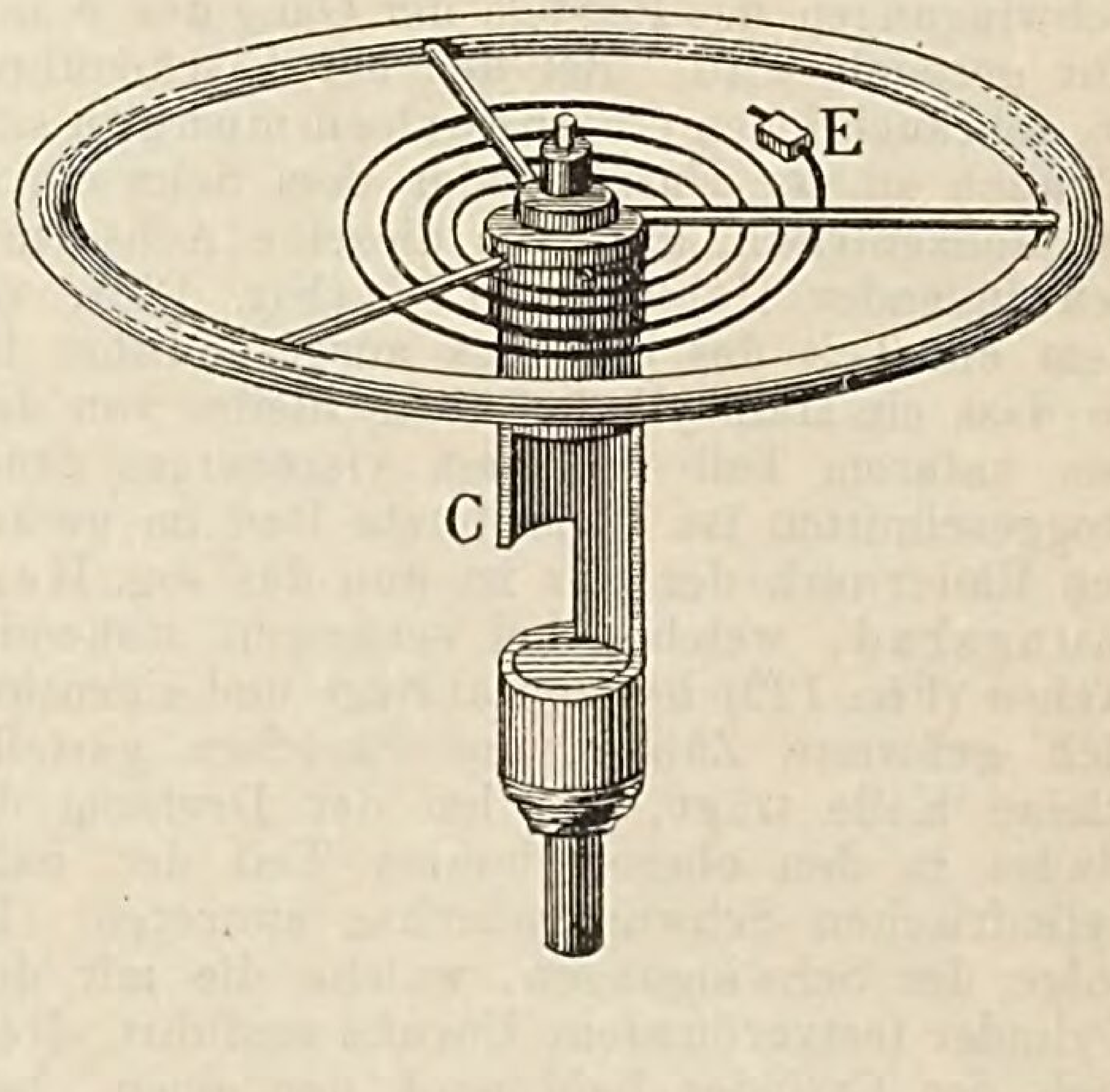
links, so werden dadurch die Windungen einander genähert, und die Feder zusammengedrückt oder gespannt. Sie strebt in der Folge sich wieder auszudehnen, das bewegliche Federende kehrt allmählich in seine frühere Lage zurück und bewegt sich in der dem Pfeil entgegengesetzten Richtung. Allein die Bewegung der Feder ist eine sehr unregelmässige, indem sie, je mehr sie zusammengerollt ist, ein um so stärkeres Bestreben hat, sich wieder auszudehnen, je mehr sie sich ausdehnt, um so mehr lässt ihre Spannung nach, so dass also die Kraft der Feder von dem Augenblick an, wo sie zu wirken beginnt, bis zu dem Punkt, wo sie ihre ursprüngliche Form wieder angenommen hat, beständig abnimmt und deshalb der Uhr ohne weiteres eine regelmässige Bewegung nicht erteilen kann. Um eine solche zu erreichen und Gleichförmigkeit in den Gang der Uhr zu bringen, hat man 1). die sog. Schnecke mit Kette eingeführt, d. h. die Feder dreht zunächst einen Cylinder A, das Federhaus, in dem sie sich befindet. Ihr inneres Ende hängt an einem feststehenden Stift (s. Fig. 127) und mit ihrem äusseren Ende ist sie an einem Punkt der inneren Gehäuse- oder Trommelwandung befestigt.

Figur 127.



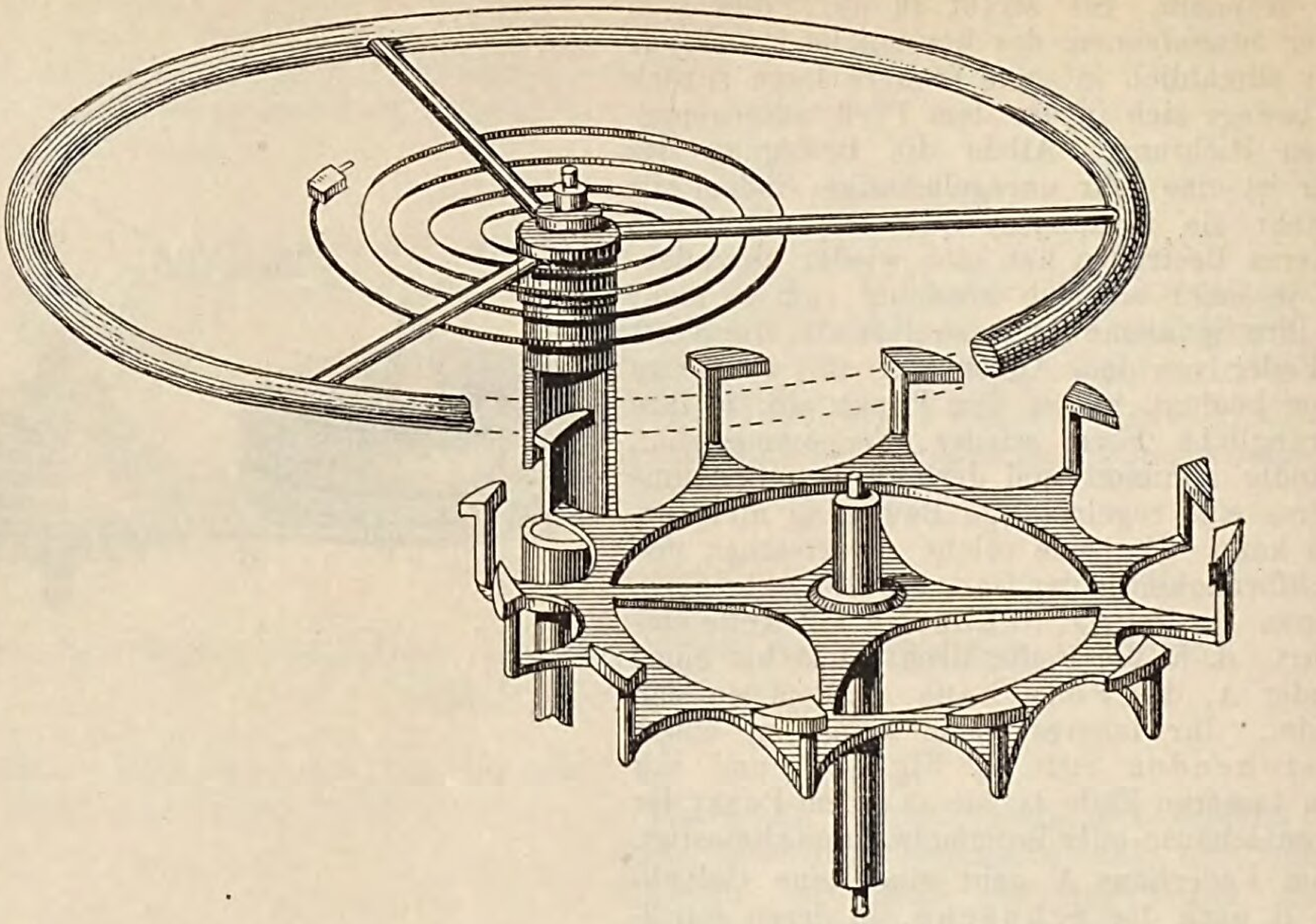
Vom Federhaus A geht eine feine Gelenkkette B nach der Schnecke, in deren spiralförmig eingeschnittenen Vertiefungen der grösste Teil ihrer Länge Platz findet. Bei der fortschreitenden Drehung des Federhauses wickelt sich die Kette allmählich von der Schnecke ab und auf den Cylinder auf, dabei wird die Spannung immer schwächer, aber zugleich werden die Hebel grösser, mit denen die Spindel gedreht wird, denn die Kette, die anfänglich am dünnsten Teile der Schnecke zog, wirkt schliesslich am grössten Umfange, und somit wird derselbe Effekt erreicht, als wenn eine gleichbleibende Kraft an einem Hebel von unveränderlicher Länge wirkte, denn durch die Form der Schnecke wird die Abnahme der Federkraft durch die gleichzeitige Zunahme des Hebelarms, an dem sie wirkt, kompensiert oder ausgeglichen.

Figur 128.



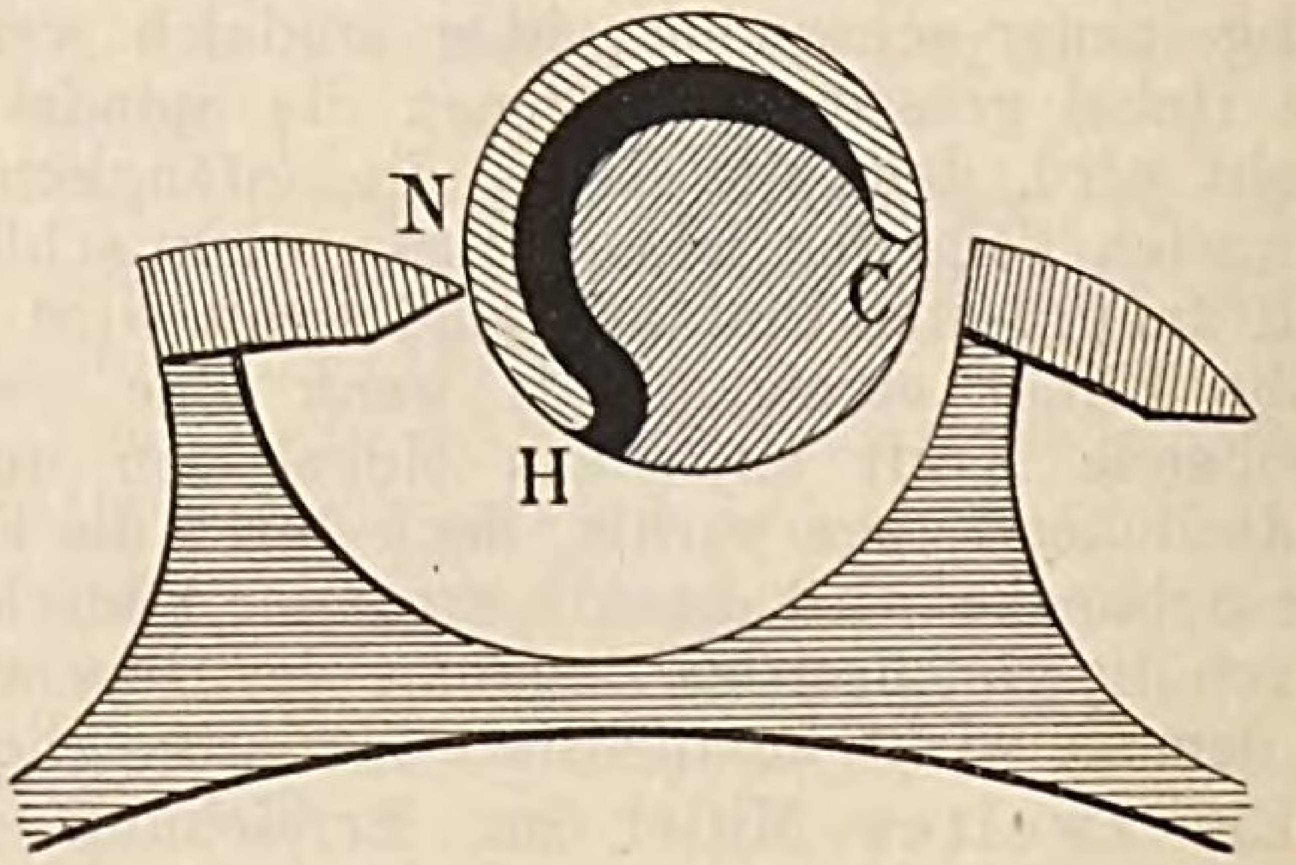
Ein zweites Mittel zur Erreichung eines möglichst gleichmässigen Ganges der Uhr ist der mit dem Räderwerk in Verbindung stehende Regulator (Unruhe genannt), bestehend aus einem kleinen Schwungrad oder Balancier, an dessen Achse eine sehr feine Spiralfeder befestigt ist, deren äusseres Ende E (s. Fig. 128) für gewöhnlich auf der Uhrplatte festsitzt. Dreht sich nun das Schwungrad nach der einen oder anderen Richtung, so verändert die Spirale ihre Form, kehrt aber infolge ihrer Elasticität in ihre vorige Lage zurück und bewegt das Schwungrad gleichfalls rückwärts. Hat die Spirale so ihre anfängliche Form wieder angenommen, so hat das Schwungrad immer noch eine gewisse Geschwindigkeit, mit welcher es sich noch kurze Zeit in der einmal angenommenen Richtung weiter bewegt und die an ihm befestigte Spirale zu einer der vorigen entgegengesetzten Formänderung zwingt, bis endlich seine Kraft verzehrt ist und

Figur 129.

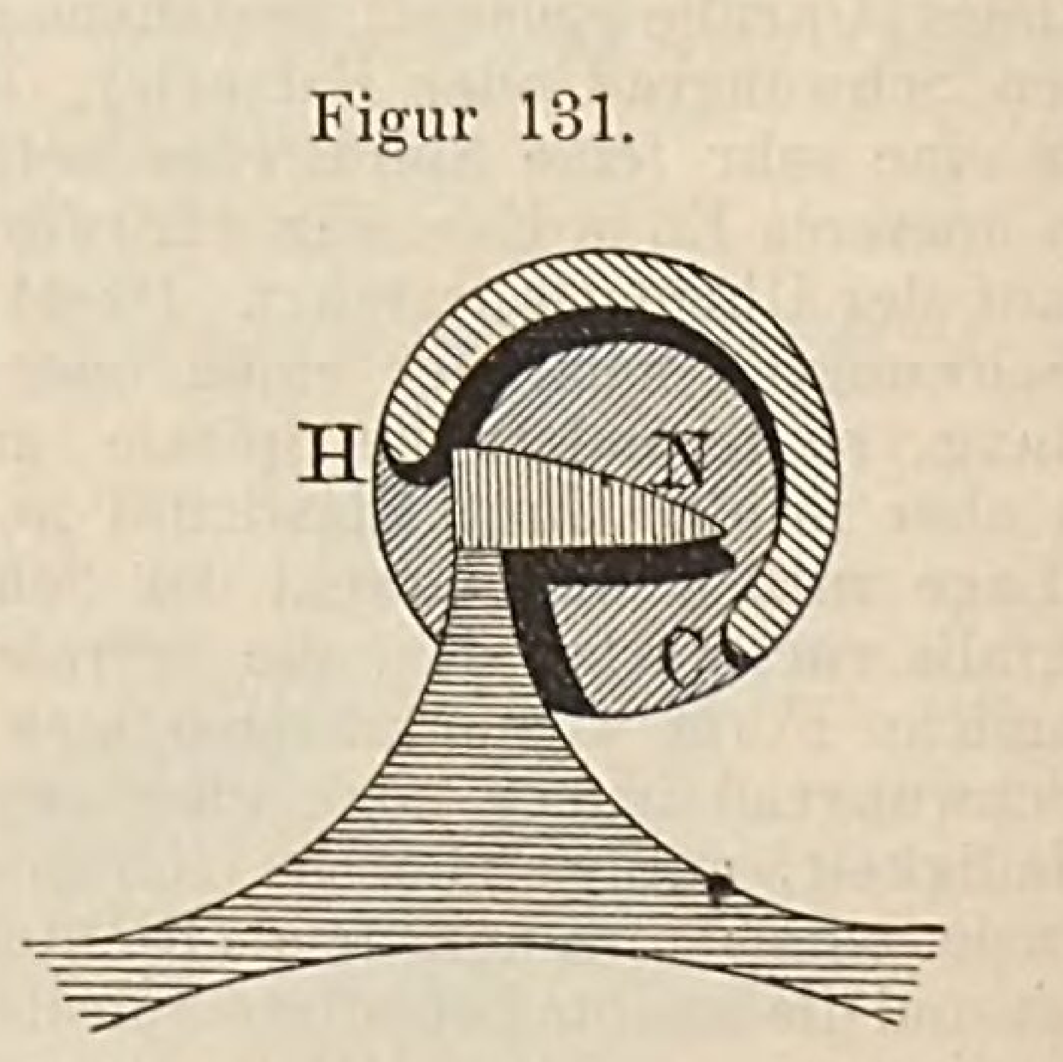


nun abermals die Elasticität der Spirale zur Wirkung kommt und das Schwungrad zurückdreht. In dieser Weise schwingt dasselbe regelmässig bald vor- bald rückwärts und reguliert dadurch den Gang der Taschenuhr, gleichwie durch die Schwingungen des Pendels der Gang der Wanduhr geregelt wird. Bei den bei Taschenuhren so gebräuchlichen Cylinderhemmungen sitzt nämlich an der Unruhe oder dem Schwungrad ein konzentrisch, d. h. um dieselbe Achse mitschwingender Hohlcylinder C (Fig. 128), von dem ein Teil des Umfangs ausgeschnitten ist, so dass ein Halbcylinder übrig bleibt, von dessen unterem Teil noch ein viereckiges Stück weggeschnitten ist. Das letzte Rad im gesamten Räderwerk der Uhr ist nun das sog. Hemmungsrad, welches bei senkrecht stehender Achse (Fig. 129) horizontal liegt und eigentümlich geformte Zähne, auf Säulchen gestellte kleine Keile trägt, die bei der Drehung des Rades in den oberen hohlen Teil der halbcylindrischen Schwungradachse eintreten. Infolge der Schwingungen, welche die mit dem Cylinder festverbundene Unruhe ausführt, dreht sich der Cylinder bald nach der einen, bald nach der andern Seite. Hierbei stösst ein Zahn des Hemmrades zunächst mit seiner Spitze an die Aussenseite des Cylinders (s. Fig. 130), bald aber nimmt letzterer die andere Lage ein und das Hemmungsrad geht einen Schritt weiter, bis es an die Innenseite des Cylinders stösst, wie es Fig. 131 zeigt. Uebrigens ist in jeder Cylinderuhr die Unruhe nebst Spiralfeder, sowie das darunter liegende Hemmungsrad so deutlich zu sehen, dass eine ausführlichere Beschreibung überflüssig erscheint.

Figur 130.

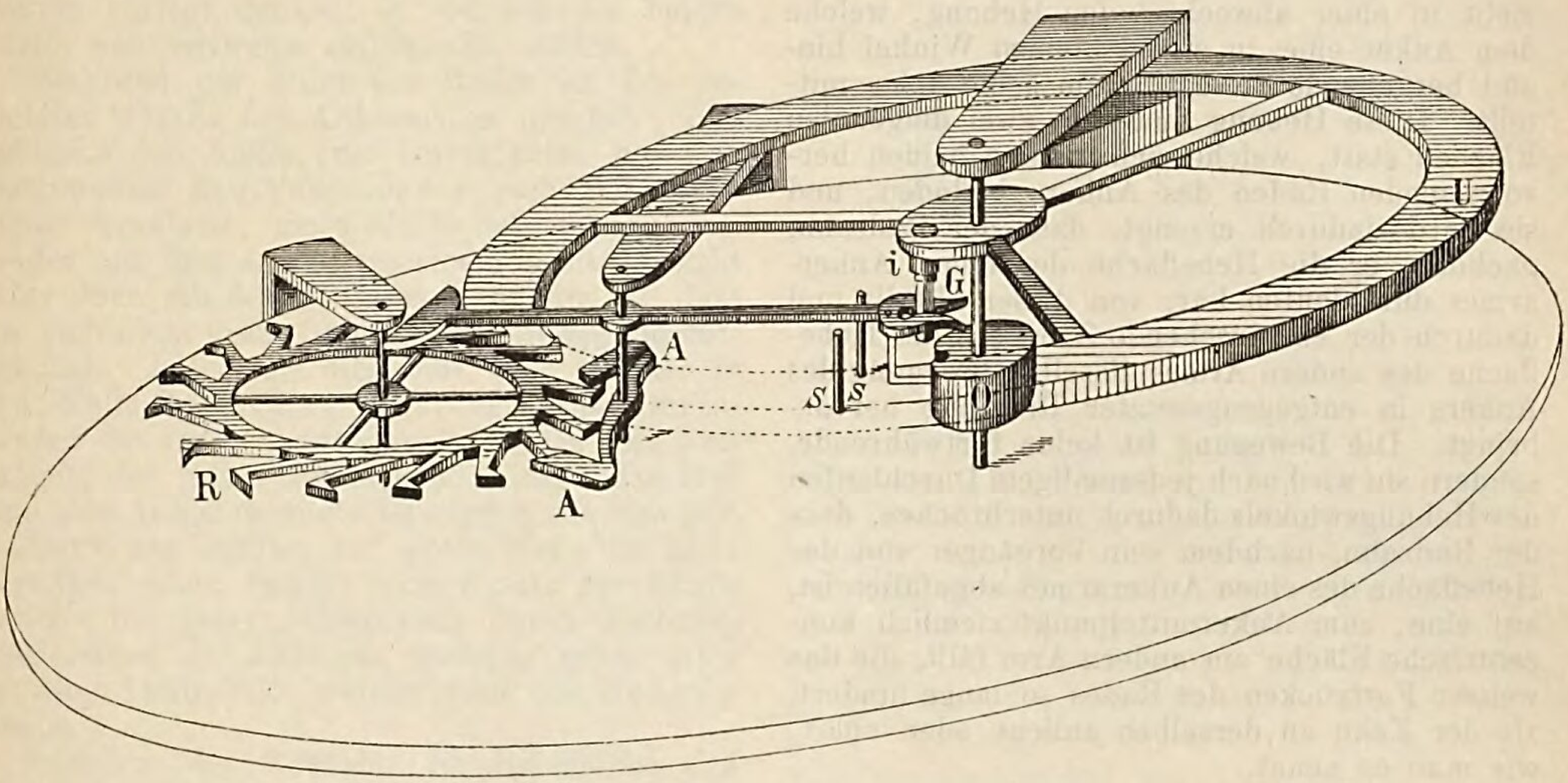


Figur 131.



Bei besseren Uhren ist aber die am meisten in praktischen Gebrauch gekommene Hemmung die sog. Ankerhemmung oder der freie Ankergang, dessen Einrichtung die Fig. 132 veranschaulicht. Die mechanische Gesamtheit eines Ankergangs besteht aus vier wirkenden Teilen; es sind dies: 1) das Rad; 2). der Anker; 3). die Gabel und 4). die Rolle.

Figur 132.



Das Gangrad R ist ein flaches Rad, d. h. ein solches, dessen Zähne in der Radebene liegen. Die Form der Zähne ist je nach der Art, in der die Hebung geschehen soll, sehr verschieden und weicht von einer scharf spitzen Form bis zu einer vollen Hebefläche ab.

Der Anker AA hat auch, je nach dem beabsichtigten Hebungssystem, eine sehr verschiedenartige Gestalt. In den meisten Fällen liegt der Körper desselben in tangentialer Richtung zum Radkreise und hat an seinen beiden Enden je einen hervorstehenden Teil, welcher nach dem Rad zu gerichtet ist und auf welchen die Einwirkung der Radzähne stattfindet. Diese Teile sind meist mit harten Edelsteinen besetzt, um Reibung und Abnutzung zu vermindern. Der Anker ist mit einem Loch in seiner Mitte auf die Ankerwelle gepasst und dreht sich mit dieser seiner Achse.

Die Gabel G ist ein Hebel, welcher mit einem Loch auf die Ankerwelle gepasst ist. Sie ist mit dem Anker so verbunden, dass sie sich mit ihm auf der gemeinsamen Achse bewegt und in einem gewissen Winkel zu der Längenrichtung des Ankers steht. Dieser Winkel ist ganz willkürlich und hängt lediglich von der Anordnung ab, welche man den einzelnen Teilen des Ganges unter sich geben will. Ist die Gabel jenseits der Ankerwelle verlängert, so dient diese Verlängerung nur, um das Gleichgewicht herzustellen, während der andere Arm der wirk-

liche Hebelarm ist. Dieser hat fast bei allen Ankergängen in seinem äussersten Ende einen Einschnitt, welcher den Anlass zu der Benennung „Gabel“ gibt.

Die Rolle O ist eine runde Scheibe, welche mit ihrem Mittelloch auf die Welle der Unruhe U so fest gepasst ist, dass letztere sich mit ihr bewegen muss. Sie trägt den Hebestift *i*, welcher in den Einschnitt der Gabel passt.

Die Wirkung von Rad und Anker besteht in einer abwechselnden Hebung, welche dem Anker eine, in einem kleinen Winkel hin- und hergehende Bewegung um seine Achse mitteilt. Diese Hebung findet an zwei diagonalen Flächen statt, welche sich an den beiden hervorragenden Enden des Ankers befinden, und sie wird dadurch erzeugt, dass der Radzahn, nachdem er die Hebefläche des einen Ankerarmes durchlaufen hat, von dieser abfällt und dadurch der entsprechende Zahn auf der Hebefläche des andern Armes dieselbe Bewegung des Ankers in entgegengesetzter Richtung hervorbringt. Die Bewegung ist keine fortwährende, sondern sie wird nach jedesmaligem Durchlaufen des Hebungswinkels dadurch unterbrochen, dass der Radzahn, nachdem sein Vorgänger von der Hebefläche des einen Ankerarmes abgefallen ist, auf eine, zum Ankermittelpunkt ziemlich koncentrische Fläche am andern Arm fällt, die das weitere Fortrücken des Rades so lange hindert, als der Zahn an derselben anliegt oder ruht, wie man es nennt.

Es durchläuft also jeder Zahn die Breite des ersten Ankerarmes, den man den Eingangsarm nennt, indem er an dessen diagonaler Hebefläche eine Drehung des Ankers um seine Achse bewirkt, die dem Hebungswinkel entspricht. Nachdem dies geschehen, fällt der Zahn von dem Eingangsarme ab und der dem Ausgangsarme zunächst liegende Zahn fällt auf die concentrische oder Ruhefläche dieses Armes. Hier bleibt er in der Ruhe liegen, bis eine Einwirkung (von der später gesprochen werden wird) die zurückgehende Bewegung des Ankers einleitet, deren erste Wirkung die Auslösung des ruhenden Zahnes ist. Diese geschieht, indem der Ankerarm ein wenig vom Rad entfernt wird, wodurch die Zahnspitze die Ruhefläche verlässt und an der angrenzenden Hebefläche des Ausgangsarmes hingleitend, den Anker seinen ganzen Hebungswinkel in entgegengesetzter Richtung wieder durchlaufen lässt. Nachdem dieses geschehen, fällt der Zahn vom Ausgangsarm ab und der dem Eingangsarm nächstliegende Zahn fällt gegen die Ruhefläche dieses Armes. Dieses Spiel, in abwechselndem Ruhen und Heben bestehend, wiederholt sich fortwährend.

Die Ruheflächen müssten eigentlich, um ihrem Zweck zu entsprechen, koncentrisch zum Ankermittelpunkt sein. Dann würde es aber ziemlich oft vorkommen, dass durch eine heftige Bewegung der Uhr der Anker zur Unzeit von der Ruhe käme, wodurch die Freiheit der betreffen-

den Unruhschwingung beeinträchtigt sein würde. Um diese Gefahr zu vermeiden, gibt man den Ruheflächen eine kleine Abweichung vom koncentrischen Kreis, welche bewirkt, dass der auf Ruhe liegende Radzahn den Anker weiter heranzieht. Dies nennt man den Zug des Ankers.

Die Bewegung von Gabel und Rolle kann man sich in zwei verschiedene Thätigkeiten zerlegt denken, in welchen die beiden Teile wechselsweise aufeinander wirken.

Während der Zahn des Rades an der geneigten Fläche des Ankerarmes hingleitet und dadurch den Anker zum Durchlaufen des ihm bestimmten Bewegungsbogens nach der einen Seite veranlasst, muss die Gabel, welche entweder mit dem Anker aus einem Stück gemacht oder doch mit demselben so verbunden ist, dass sie sich nicht drehen kann, diese Bewegung mitmachen. Indem sie dies thut, teilt sie dem in der Rolle befestigten Stift, der beim Durchlaufen des Durchgangswinkels sich in dem Einschnitt der Gabel befindet, die durch das Rad und den Anker erzeugte Bewegung mit und gibt dadurch der Unruhe, auf deren Welle die Rolle festsitzt, einen Antrieb zum Ersatz der Kraft, welche bei jeder Schwingung durch Reibung, Widerstand der Luft etc. verloren geht. Dies ist eine Thätigkeit, welche man die Hebung nennt.

Nachdem der Radzahn die Hebefläche des Ankers entlang gegangen ist, fällt er von derselben ab, und der Zahn, welcher dem andern Ankerarm am nächsten steht, legt sich gegen die Ruhefläche dieses Armes, womit die Bewegung des Ankers nach dieser Seite beendigt wird. Anker und Gabel verweilen nun in dieser Lage, während die Unruhe, vollständig frei von allem Zusammenhang mit den übrigen Teilen des Ganges, ihre Schwingung vollendet. Bei der Rückkehr derselben, welche durch die Spannung der Spiralfeder bewirkt wird, berührt der Hebestift, sobald er in den Durchgangswinkel eintritt, den Einschnitt der Gabel und teilt derselben seine Bewegung mit. Da nun der Anker gezwungen ist, die Bewegung der Gabel mitzumachen, so zieht sich der Arm, gegen dessen Ruhefläche der Radzahn liegt, etwas zurück, der Zahn gleitet von der Ruhefläche herunter und fängt auf der Hebefläche das frühere Spiel wieder an. Dies ist die zweite Thätigkeit von Gabel und Rolle, welche die Auslösung heisst.

Sobald die Auslösung beendigt ist, arbeitet der Radzahn wieder auf der Hebefläche, die da beginnt, wo die Ruhefläche aufhört, und erteilt dem Anker und mit diesem der Gabel die Bewegung durch ihren ganzen Hebungswinkel nach der andern Seite. Die Gabel gibt dadurch dem Hebestift, durch den sie eben erst die auslösende Bewegung erhielt, den Anstoss zur neuen Schwingung, so lange, bis wiederum der Durchgangswinkel durchlaufen, der Zahn abgefallen und der Zustand der Ruhe wiederhergestellt ist.

Dies Spiel der Hemmung wiederholt sich fort-

während, so dass bei jeder Schwingung der Hebestift die Gabel erst ein wenig treibt und dann sofort von ihr getrieben wird.

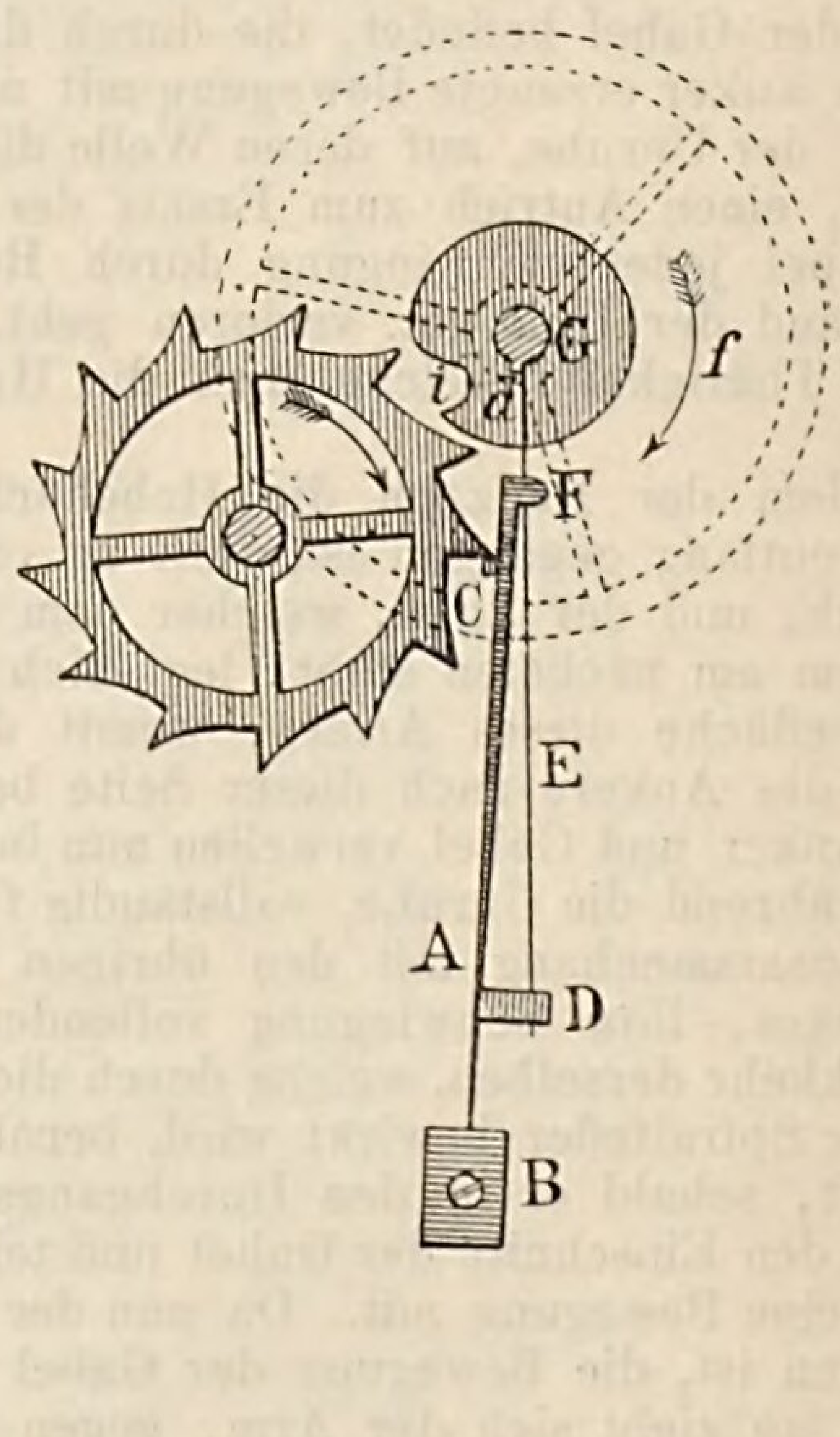
Es ist eine Eigentümlichkeit dieses Teiles des Ankergangs, dass die Thätigkeit desselben nur auf einem ganz unbedeutenden Teil der Schwingung der Unruhe stattfindet, und während des grössten Teils dieser Schwingung Gabel und Hebestift ganz ausser Berührung bleiben.

Dieser Umstand macht eben den Ankergang zu einem freien Gang und verleiht ihm alle die wertvollen Eigenschaften eines solchen.

Der Weg, den der Anker durchlaufen muss, ist in geeigneter Weise durch zwei aufrechtstehende Stifte *s s*, die sog. Prellstifte begrenzt, welche in geeigneter Entfernung an jeder Seite der Gabel stehen.

Für eine andere Klasse von Uhren, wie sie zu astronomischen Zwecken und bei Seefahrten gebraucht werden und die man Chronometer (zu deutsch „Zeitmesser") nennt, kommt die sog. Chronometerhemmung in Anwendung. Eine Feder A (Fig. 133), deren Dicke von einem Ende zum andern immer mehr abnimmt, ist mit ihrem dünneren Ende in dem festen Stück B eingeklemmt. Diese Feder trägt einen kleinen Vorsprung C, gegen welchen die einzelnen Zähne des Steigrades bei der Drehung desselben anstossen müssen; ausserdem trägt sie eine Klemme D, in welcher eine zweite, viel dünnere und daher sehr biegsame Feder E befestigt ist. Letztere geht unter dem am Ende der Feder A sitzenden Haken F hinweg, so dass sie unter dem Haken ohne allen Widerstand sich abwärts, d. h. wenn die Teile der Figur senkrecht gedacht werden, in einer Richtung von oben nach unten bewegen kann, wenn sie sich dagegen aufwärts bewegt, so nimmt sie den Haken F und deshalb auch die Feder A mit und hebt dieselben ebenfalls in die Höhe. Auf der Achse G der Unruhe befindet sich ein Daumen (Auslösestein) *d*, welcher die Schwingungen des letzteren mitmacht und bei jeder Oscillation gegen das Ende der dünnen Feder E stösst. Nehmen wir an, dass die Unruhe in der Richtung des Pfeiles *f* schwinge; der Daumen *d* stösst dann von oben her gegen die Feder E, drückt sie herab und schlüpft, indem diese einen Augenblick sich niederbiegt, darunter weg; gleich darauf springt E in ihre natürliche Lage zurück; bei dieser Bewegung bleibt die Feder A unbeweglich und daher steht während dieser Zeit auch das Steigrad durchaus still. Schwingt aber die Balance gleich darauf nach der entgegengesetzten Richtung, so hebt der Daumen *d* die Feder E mit in die Höhe, diese hebt ihrerseits die Feder F und den Vorsprung C, wodurch der vorliegende Zahn frei wird und das Steigrad sich um einen Zahn drehen kann. Aber gleich darauf ist der Daumen *d* von unten nach oben unter der sich durchbiegenden Feder E durchgeschlüpft, die Feder A ist wieder frei geworden und nimmt mit dem Vorsprunge C ihre erste tiefere Lage sofort wieder ein, um so den nächstfolgenden

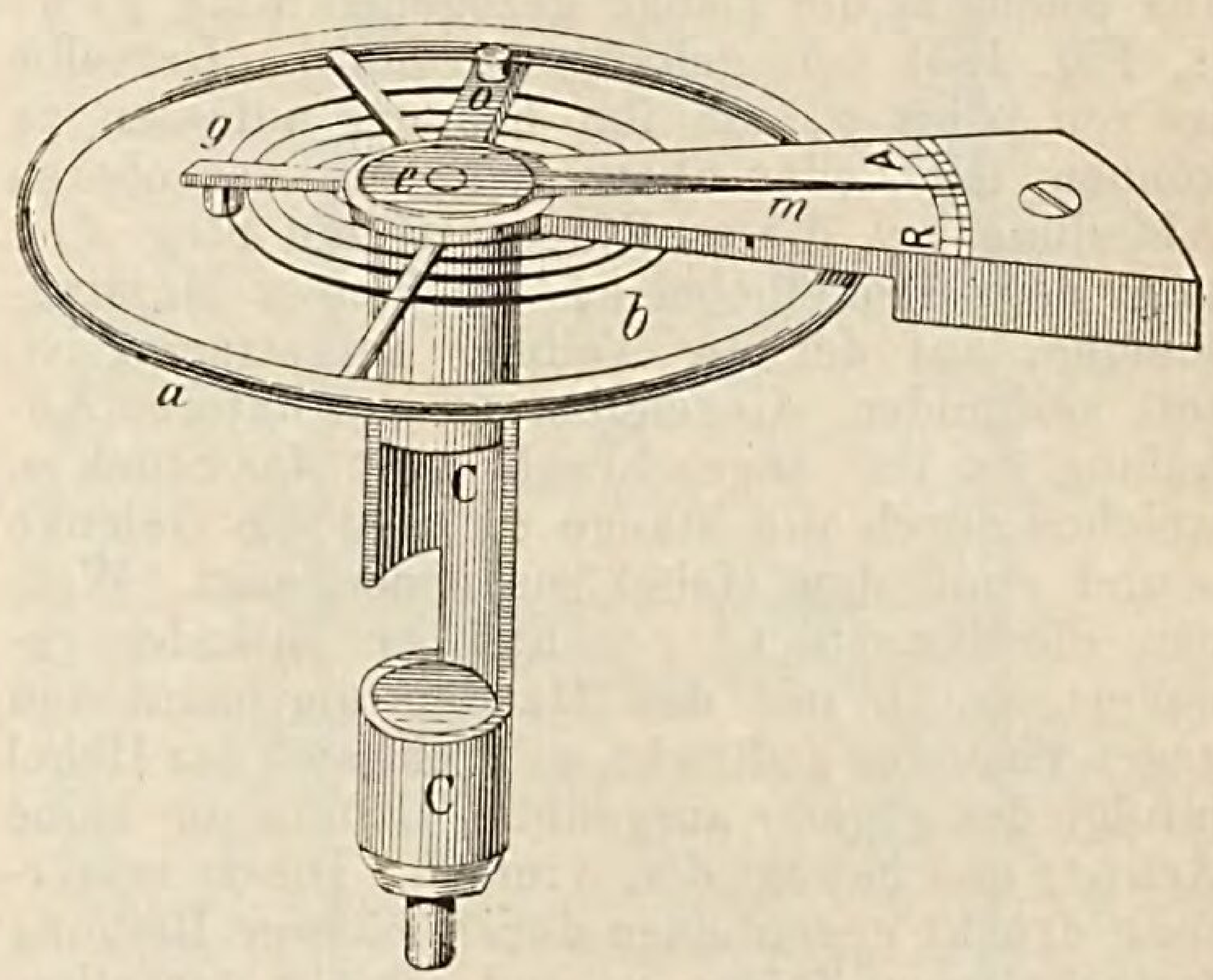
Figur 133.



Zahn des Steigrades wieder anzuhalten. In dem Augenblick, wo ein Zahn an dem Vorsprung C vorbeipassiert, stösst ein anderer Zahn desselben Rades gegen den Rand eines Ausschnittes *i* an, welcher zu diesem Zweck in einer kleinen auf der Unruhe befestigten Scheibe angebracht ist, und erteilt dadurch der Unruhe einen Stoss. Auf diese Weise wird der Unruhe durch die bewegende Kraft des Uhrwerks fast in einem Moment dasjenige an Bewegung wieder ersetzt, was sie während der Dauer einer Doppelschwingung durch die Reibung und den Widerstand der Federn verliert.

Wie ein längeres Pendel langsamer schwingt als ein kürzeres, so schwingt auch eine längere Spiralfeder langsamer als eine kürzere. Es lässt sich daher durch Verlängerung oder Verkürzung der Spiralfeder, welche mit der Unruhe in Verbindung steht, der Gang der Uhr regulieren. Zu diesem Zweck findet sich in allen besseren Uhren die in Fig. 134 dargestellte Vorrichtung: *a* ist die Unruhe, *b* die Spirale, deren äusserste Windung in dem auf der Platte angeschraubten Stück *o* befestigt ist. Die innerste Windung der Spirale ist in *e* unterhalb der Platte B auf der Achse der Unruhe selbst befestigt. Das Stück *gm* von Stahl, Rackett genannt, ist auf das aus der Platte B hervorstehende Korn *e* mit Reibung gestellt, und wird durch zwei Schrauben daran verhindert, sich zu heben. Das Ende *m* dieses Stückes bildet einen Zeiger, der bei der Drehung um *e* auf einem eingeteilten Bogen A R spielt. Das entgegengesetzte Ende *g* trägt nach unten zwei feine Stifte, welche die äussere Spiralwindung zwischen sich fassen und dadurch, dass sie diese einklemmen, das zwischen den Stiften und dem Ende *o* liegende Stück der Spirale verhindern mitzuschwingen. Man sieht nun leicht, dass ein Verstellen des Zeigers *m* nach A (avancer) hin, eine Verschiebung der Stifte *g* nach rechts und daher eine Verkürzung der Spirale zur Folge hat; letztere schwingt also schneller und der Gang der Uhr wird beschleunigt. Rückt man dagegen den Zeiger *m* nach R (retarder = verzögern) hin, so verschieben sich die Stifte bei *g* nach links, die schwingende Spirale verlängert sich und der Gang der Uhr wird verzögert.

Figur 134.



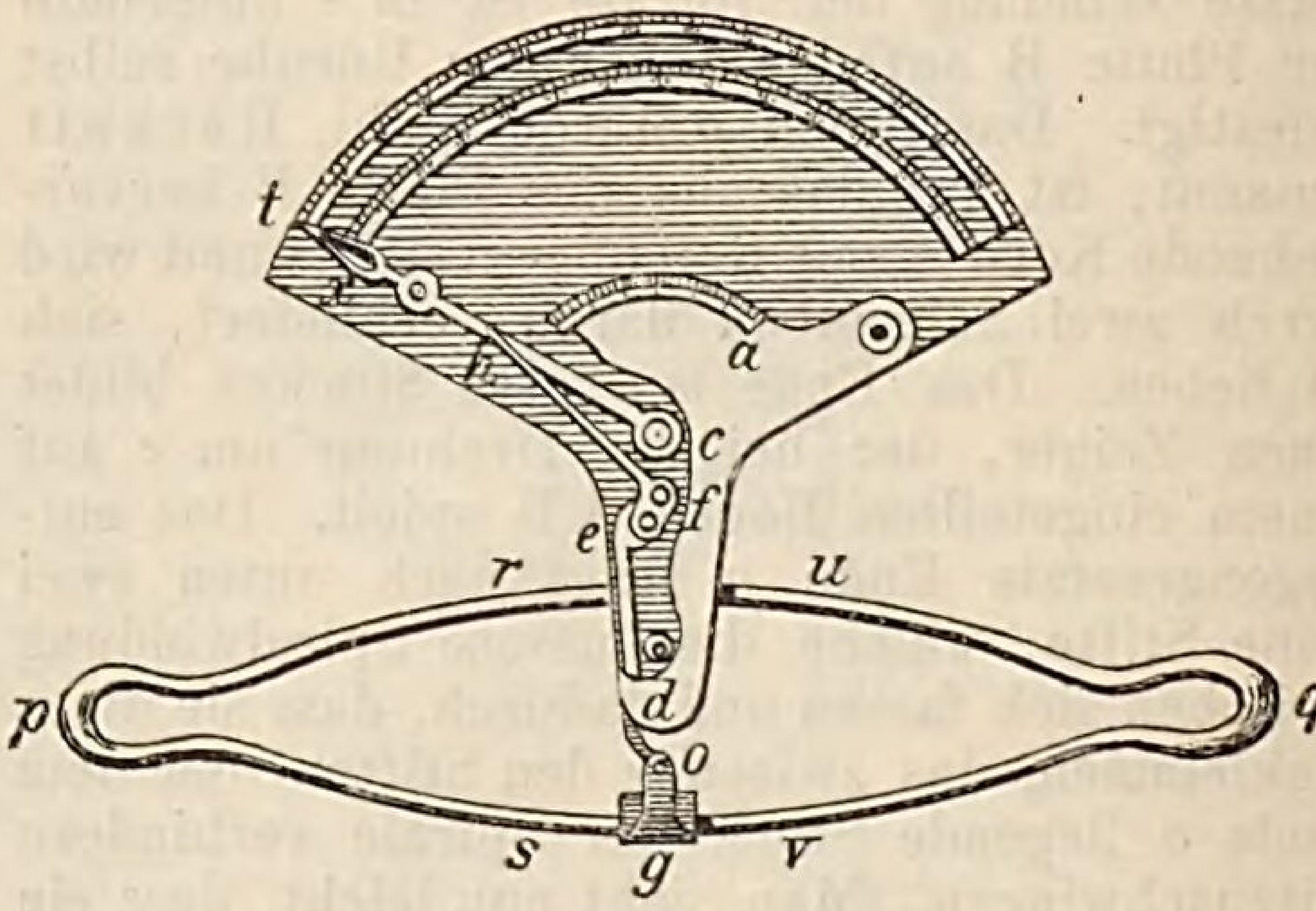
Es kann hier nicht am Platze sein, das Werk der Taschenuhr ausführlicher zu beschreiben und möge nur noch über die Leistung dieser unentbehrlichsten und allgemeinsten Maschine folgendes bemerkt sein:

Die Uhren haben zum grössten Teil die Berechnung, dass sie in der Sekunde 5 Unruheschwingungen machen, das ergibt für das ganze Jahr 157 680 000 Schwingungen. Der Durchmesser der Unruhe einer Herren-Ankeruhr beträgt durchschnittlich 18 mm, der Umfang also 56,52 mm. Rechnet man nun für jede Schwingung nur eine Umdrehung der Unruhe und denkt man sich diese Schwingungen anstatt hin und her schwingend stets in einer Richtung fortrollend,

so würde die Unruhe einer Taschenuhr in der Sekunde 28,75 cm, im Tage 24,408 km und im Jahre 8908,92 km durchlaufen. Bedenkt man, dass die Achsen der Unruhe nur $^1/_{10}$ mm dick sind und dass die Uhr ununterbrochen im Gange erhalten wird, so kann man sich eine richtige Vorstellung machen von den ungeheuren Anforderungen, die an diese kleinste aller Maschinen gestellt werden. Denn keiner Maschine, und wenn sie hunderte von Pferdekräften repräsentirt, wird zugemutet, dass sie unausgesetzt, Jahre lang, ohne jede andere Pflege als Kraftersetzung (Aufziehen) fortwährend in Bewegung bleibt.

II. Die dynamometrischen Apparate dienen zum Messen der Kraft, die ein Mensch, oder ein Tier, oder auch der Beweger einer Maschine unter gegebenen Umständen hervorbringt. Um die Zugkraft der Pferde, sowie den Widerstand zu messen, den die Wagen auf Landstrassen erleiden, benutzt man vornehmlich das Dynamometer von *Regnier*. Dasselbe besteht aus einem in die Länge gezogenen Ring *p r q s* (s. Fig. 135) von gehärtetem Stahl. Derselbe ist von *p* bis *q*, um ihn bequem anfassen zu können, mit Leder überzogen. Mit der oberen Abteilung *r u* dieses Ringes ist ein Steg *d f c* samt dem Winkelhebel *e f h* und einer Messingscheibe, auf der die Teilung aufgetragen ist, fest verbunden. Gegenüber an der unteren Abteilung *s v* fest angeschraubt sitzt das Stück *g*, welches durch die Stange *o e* und die Gelenke *o* und *e* mit dem Hebel zusammenhängt. Werden die Ringstücke *r u* und *s v* einander genähert, z. B. mit den Händen umspannt und gegen einander gedrückt, so dreht sich der Hebel infolge des gegen *e* ausgeübten Drucks um seine Achse *f* und bewegt den Arm *f h*. Dieser seinerseits drückt gegen einen durch mässige Reibung festgehaltenen Zeiger *c t* und schiebt denselben vorwärts, so dass dessen äussere Spitze *t*, sowie die innere *x* sich an entsprechenden Gradbögen hinbewegen. Die Stelle, an welcher der Zeiger stehen bleibt, zeigt in Kilogramm die Grösse des ausgeübten Drucks, also die spannende Kraft an.

Figur 135.

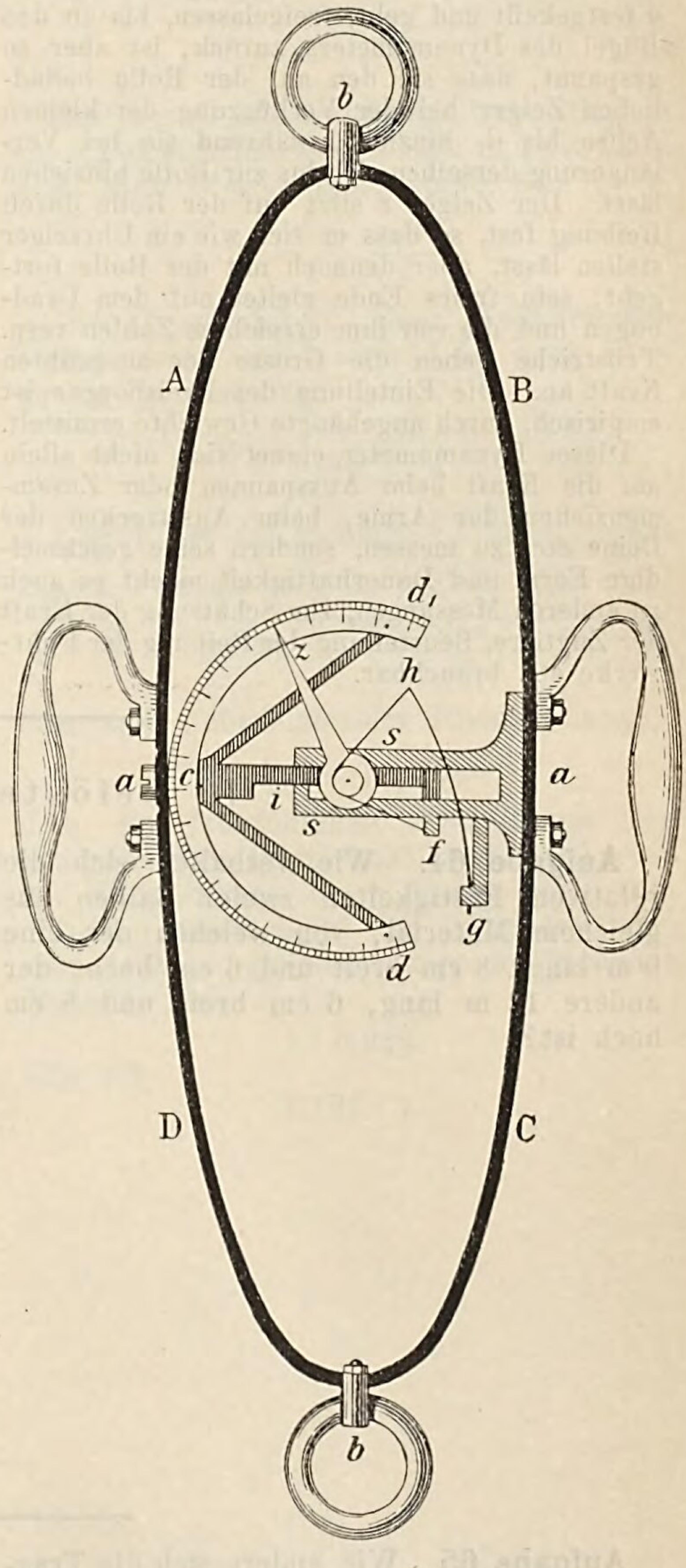


Eine gegenseitige Annäherung der Bogenstücke *r u* und *s v* kann auch dadurch bewirkt werden, dass man die Punkte *p* und *q* auseinander zieht. Jedoch ist dazu ein viel grösserer Aufwand von Kraft erforderlich. Beide Verfahrungsweisen sind nicht direkt vergleichbar und ist daher für jede eine besondere Skala notwendig. Die Einteilung dieser beiden Gradbögen oder Skalen geschieht auf dem Wege der Erfahrung. Um z. B. die obere Skala für grössere Kräfte, welche die wichtigste ist, zu graduieren, wird das Instrument bei *p* an einer Kette aufgehängt; bei *q* bringt man eine Wagschale an und belastet dieselbe mit bekannten Gewichten, deren Grösse dann an der Stelle angemerkt oder markiert wird, an welcher der Zeiger stehen bleibt. Letzterer gibt immer nur den stärksten Druck an, weil er an der Stelle des stärksten Drucks durch die Reibung festge-

halten wird, daher von allen geringeren Schwankungen unberührt bleibt. Wünscht man ein Urteil über den Mittelwert der ausgeübten Kräfte zu gewinnen, so beobachtet man die Schwankungen des Punktes *h* vor dem dritten Teilkreis *a h*, dessen Mittelpunkt in *c* liegt.

So einfach Regniers Dynamometer, und so wohl ausgedacht es ist, so ist es doch auf verschiedene Kraftäusserungen des menschlichen Körpers nicht anwendbar, und seine Fähigkeit, die Kraft des Händedrucks zu messen, von geringem Nutzen, da oft ziemlich schwache Leute hierin eine merkliche Kraft ausüben können, und überdies ist das Instrument wegen der starken Abplattung der Ellipse für den Zug in der Richtung *p q* etwas unempfindlich. Von allen diesen Mängeln ist die nachfolgende, von *G. W. Muncke* angegebene Abänderung des Dynamometers frei. Zuerst besteht, der grösseren Elasticität und Stärke wegen, der elliptische Bügel A B C D aus federhartem Stahl, ist in den schwächsten Teilen, da wo in der Figur 136 die Buchstaben A B C D stehen, $2^1/_4$ mm, bei den Handhaben *a a* gegen 3 mm, in der Gegend der Ringe aber $3^1/_2$ mm dick und durchaus $4^1/_2$ cm hoch; die grosse Achse beträgt 40, die kleine $13^1/_2$ cm. Durch die ungleiche Dicke des Bügels ist vorzüglich bezweckt, dass er an den Stellen, wo die Handgriffe und die beiden Ringe nebst dem inwendigen Mechanismus angeschraubt sind, nicht zu schwach, und somit seine Ausdehnung stets regelmässig ist. In der Richtung der kleinen Achse sind die beiden Handgriffe *a a* angeschraubt, welche zum bequemeren Festhalten etwas gepolstert, und mit Leder umwunden werden. In der Richtung der grossen Achse sind aber zwei schmiedeiserne Ringe angebracht, welche in den hinlänglich erweiterten Oehren sich frei und leicht bewegen. Die Handhaben *a a* dienen dazu, kleinere Kräfte zu messen, die Ringe aber sind für grössere und sehr grosse bestimmt. In der Mitte der Ellipse und an einem Ende der kleinen Achse ist der flache eiserne Träger *c* festgeschraubt, welcher in drei Zweige ausläuft; zwei derselben dienen als Halter des auf ihnen festgeschraubten Kreisbogens $d\,d_1$, der dritte aber ist in einer Länge von $5^1/_2$ mm ausgeschnitten und endigt in einen Haken, welcher sich zwischen den beiden an die stählerne Ellipse angeschraubten Metallschienen *s s* bewegt und dazu dient, bei etwa angewandter übermässiger Kraft, an den Handgriffen *a a* gegen den Haken *i*, in welchen die untere Stahlschiene endigt, zu fassen und die weitere Ausspannung des Dynamometers in der Richtung der kleinen Achse zu hemmen; zugleich aber, wenn eine allzu starke Kraft auf die Ringe *b b* wirkt, gegen die rechte Wand sich zu stemmen und somit eine weitere Ausdehnung nach der Längenachse unmöglich zu machen. Der sich zwischen den beiden Metallschienen *s s* fortschiebende mittlere Zweig des Trägers, der den graduierten Kreisbogen hält, trägt in der Mitte der ganzen Ellipse einen

Figur 136.



Zapfen oder Stift, auf welchem lose ein Röllchen sitzt. Ueber letzteres ist eine feine Darmsaite herumgeschlungen und mit ihrem einen Ende an dem Vorsprung *f*, mit dem andern aber an die Feder *g h* befestigt. Letztere ist der grösseren Stärke wegen doppelt, und aus einer starken Taschenuhrfeder gemacht; sie ist in einem Einschnitt einer kleinen Querstange bei *g* festgekeilt und geht, freigelassen, bis an den Bügel des Dynamometers zurück, ist aber so gespannt, dass sie den auf der Rolle befindlichen Zeiger bei der Verkürzung der kleinen Achse bis d_1 hinzieht, während sie bei Verlängerung derselben sich bis zur Rolle hinziehen lässt. Der Zeiger *z* sitzt auf der Rolle durch Reibung fest, so dass er sich wie ein Uhrzeiger stellen lässt, aber dennoch mit der Rolle fortgeht; sein freies Ende gleitet auf dem Gradbogen und die von ihm erreichten Zahlen resp. Teilstriche geben die Grösse der ausgeübten Kraft an. Die Einteilung des Kreisbogens ist empirisch, durch angehängte Gewichte ermittelt.

Dieses Dynamometer eignet sich nicht allein um die Kraft beim Ausspannen oder Zusammenziehen der Arme, beim Ausstrecken der Beine etc. zu messen, sondern seine geschmeidige Form und Dauerhaftigkeit macht es auch zu anderen Messungen, zur Schätzung der Kraft der Zugtiere, Beurteilung der Reibung der Fuhrwerke etc. brauchbar.

l). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 64. Wie verhalten sich die relativen Festigkeiten zweier Balken aus gleichem Material, von welchen der eine 9 m lang, 8 cm breit und 6 cm hoch, der andere 12 m lang, 6 cm breit und 8 cm hoch ist?

Auflösung. Nach Formel 16). Seite 82 ist die Tragfähigkeit eines Balkens von rechteckigem Querschnitt:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^2 S}{l}$$

folglich verhalten sich die relativen Festigkeiten zweier Balken von demselben Material:

$$P_1 : P_2 = \frac{b_1 h_1^2}{l_1} : \frac{b_2 h_2^2}{l_2}$$

oder für den vorliegenden Fall ist:

$$P_1 : P_2 = \frac{8 . 6 . 6}{900} : \frac{6 . 8 . 8}{1200}$$

oder:

$$P_1 : P_2 = 1 : 1$$

d. h. beide Balken haben dieselbe Tragfähigkeit.

Aufgabe 65. Wie ändert sich die Tragfähigkeit eines Balkens von 15 cm Breite, 9 cm Höhe und 4 m Länge, je nachdem derselbe auf seine breite oder schmale Seite aufgelegt wird?

Auflösung. Nach Gleich. 16). Seite 82:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^2 s}{l}$$

ist das Verhältnis der Tragfähigkeit in den beiden fraglichen Fällen:

$$P_1 : P_2 = \frac{15 . 9 . 9}{4} : \frac{9 . 15 . 15}{4}$$

oder:

$$P_1 : P_2 = 9 : 15$$

oder:

$$P_1 : P_2 = 1 : 1\frac{2}{3}$$

Aufgabe 66. Wie verhält sich die Tragfähigkeit einer cylindrischen Stange zu der einer quadratischen von gleicher Querschnittsfläche bei gleicher Länge und gleichem Material?

Hilfsrechnung.

$$P_1 : P_2 = a^3 : \frac{3}{16} d^3 \pi$$

oder:

$$P_1 : P_2 = \left(\frac{d}{2} \sqrt{\pi}\right)^3 : \frac{3}{16} d^3 \pi$$

denn da die Querschnittsflächen inhaltsgleich sein sollen, so muss:

$$a^2 = \frac{d^2 \pi}{4}$$

oder:

$$a = \sqrt{\frac{d^2 \pi}{4}}$$

oder:

$$a = \frac{d}{2} \sqrt{\pi}$$

sein. Setzen wir diesen Wert für a in die gegebene Proportion ein, so erhalten wir die oben verzeichnete Proportion oder:

$$P_1 : P_2 = \frac{d^3}{8} \pi \sqrt{\pi} : \frac{3}{16} d^3 \pi$$

oder:

$$P_1 : P_2 = \sqrt{\pi} : \frac{3}{2}$$

oder da $\sqrt{3{,}14159} = 1{,}772$ ist,

1
2|214
189
34|2515
2429
354|8690
7084
160600

$$P_1 : P_2 = 1{,}772 : 1{,}5$$

oder da:

15000 : 1772 = 0,846, so ist
14176
8240
7088
11520
10632

$$P_1 : P_2 = 1 : 0{,}846$$

Auflösung. Die Tragfähigkeit einer Stange von quadratischem Querschnitt und der Seite a ist nach Gleichung 20). Seite 84:

$$P_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3 S}{l}$$

Die Tragfähigkeit einer cylindrischen Stange vom Durchmesser d ist nach Gleichung 7). Seite 99:

$$P_2 = \frac{1}{32} \cdot \frac{d^3 \pi S}{l}$$

Lassen wir die gleichen Faktoren $\frac{S}{l}$ aus beiden Formeln weg, so verhält sich:

$$P_1 : P_2 = \frac{a^3}{6} : \frac{d^3 \pi}{32}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$P_1 : P_2 = 1 : 0{,}846$$

d. h. die Tragfähigkeit einer Stange von quadratischem Querschnitt verhält sich zu der Tragfähigkeit einer Stange von cylindrischem Querschnitt bei gleicher Querschnittsfläche, gleicher Länge und gleichem Material wie:

$$1 : 0{,}846$$

oder wie:

$$1{,}182 : 1$$

Aufgabe 67. Ein an einem Ende eingemauerter Balken von Eichenholz hat 18 cm Breite, 20 cm Höhe und 4 m freie Länge; welche an seinem freien Ende hängende (kleinste) Last würde ihn abbrechen und welche kann er sicher tragen?

(S = 120 kg pro □ cm bei 10facher Sicherheit.)

Auflösung. Nach Gleichung 16). Seite 82 ist die Tragfähigkeit:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{bh^2 S}{l}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{18 \,.\, 20 \,.\, 20 \,.\, 120}{6 \,.\, 400}$$

oder:

$$P = 360 \text{ kg}$$

d. h. der gegebene Balken wird am freien Ende bei 10facher Sicherheit eine Last von 360 kg zu tragen vermögen, oder bei einer Belastung von 3600 kg eben zerbrechen.

Aufgabe 68. Welche Last würde derselbe Balken mit Sicherheit tragen,

a). wenn er an einem Ende eingemauert, die Last aber gleichmässig über seine ganze Länge verteilt ist;

b). wenn er an beiden Enden auf Stützen liegt und die Last in seiner Mitte wirkt;

c). wenn er an beiden Enden unterstützt und die Last gleichmässig über seine ganze Länge verteilt ist?

Auflösung. a). Nach Antw. auf Frage 90 Seite 118 ist die Tragfähigkeit im vorliegenden Fall doppelt so gross, als wenn die Last an einem Ende wirkt, also mit Bezug auf die Lösung der vorigen Aufgabe ist:

$$P = 720 \text{ kg.}$$

b). Nach Antw. auf Frage 93 Seite 124 ist im genannten Fall die Tragfähigkeit viermal so gross, als wenn der Balken an einem Ende eingemauert, am andern Ende belastet ist, also:

$$P = 4 \,.\, 360 \text{ oder } P = 1440 \text{ kg.}$$

c). Ist der Balken in zwei Punkten gestützt und die Last gleichmässig über die Balkenlänge verteilt, dann ist nach Antw. auf Frage 93:

$$P = 8 \,.\, 360 \text{ oder } P = 2880 \text{ kg.}$$

Aufgabe 69. Ein Holzstab mit quadratischem Querschnitt von 2,634 cm Kante ist in seinen beiden Enden so gestützt, dass zwei seiner Querschnittskanten horizontal laufen. Die beiden Stützen stehen 98 cm von einander ab und ein in der Mitte wirkendes Gewicht von 100,8 kg bewirkt den Bruch. Wie gross ist demnach die relative Festigkeit des Stabes pro □ cm?

Hilfsrechnung.

$$\frac{3 \,.\, 100{,}8 \,.\, 98}{2 \,.\, 2{,}634^3} = \frac{302{,}4 \,.\, 98}{2 \,.\, 2{,}634^3}$$

Auflösung. Nach Gleich. 20). Seite 84 ist:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3 S}{l}$$

wenn der Balken an einem Ende eingemauert und am andern belastet ist. Im vorliegenden Fall ist aber die Tragfähigkeit viermal so gross, oder:

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3 S}{l}$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{array}{r} 302{,}4\,.\,98 \\ \hline 24192 \\ 27216 \\ \hline 29635{,}2 \end{array} \qquad \begin{aligned} 2{,}634^3 &= \log 2{,}634\,.\,3 \\ \log 2{,}634 &= 0{,}4206158 \\ &\quad .\,3 \\ &\overline{1{,}2618474} \\ \text{num-log} &= 18{,}275 \\ &\quad .\,2 \\ &\overline{36{,}55} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 29635{,}2 : 36{,}55 = \text{ca. } 810 \\ 29240 \\ \hline \quad 3952 \\ \quad 3655 \\ \hline \quad 2970 \end{array}$$

$$S = \frac{3\,P\,l}{2\,a^3}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$S = \frac{3\,.\,100{,}8\,.\,98}{2\,.\,2{,}634^3}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung ist der Festigkeitskoeffizient:

$$S = 810 \text{ kg pro } \square\text{cm.}$$

Aufgabe 70. Eine an dem einen Ende befestigte, am andern Ende mit 1000 kg belastete, 1,5 m lange Flacheisenschiene hat die Breite $b = 3$ cm. a). Wie gross muss die Höhe sein, wenn S = 800 kg pro □cm. b). Wie gross ist der Pfeil der Biegung, wenn E = 2000000 pro □cm?

Hilfsrechnungen.

1). . . $\sqrt{\frac{6\,.\,1000\,.\,150}{3\,.\,800}} = \sqrt{\frac{100\,.\,15}{4}} =$

$\sqrt{25\,.\,15} = 5\sqrt{15}$; $\sqrt{15} = 3{,}873$

$$\begin{array}{l} 9 \\ \hline 6|600 \\ \;\,544 \\ \hline 76|5600 \\ \quad 5369 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}873 \\ .\,5 \\ \hline 19{,}365 \end{array}$$

2). $\frac{4\,.\,1000\,.\,150^3}{2000000\,.\,3\,.\,19{,}365^3} = \frac{4\,.\,15^3}{6\,.\,16{,}365^3} = \frac{2250}{19{,}365^3}$

$$\begin{aligned} \log 19{,}365 &= 1{,}2870175 \\ &\quad .\,3 \\ &\overline{3{,}8610525} \\ \log 2250 &= 3{,}3521825 \\ -\log 19{,}365^3 &= 3{,}8610525 \\ \log s &= \overline{0{,}4911300-1} \end{aligned}$$

mithin:

num-log s oder $s = 0{,}30984$

Auflösung. a). Nach Formel 16). auf Seite 82 ist die Tragfähigkeit

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b\,h^2\,S}{l}$$

und hieraus ergibt sich für die zu suchende Grösse:

$$h = \sqrt{\frac{6\,P\,l}{b\,S}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$h = \sqrt{\frac{6\,.\,1000\,.\,150}{3\,.\,800}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$h = 19{,}365 \text{ cm}$$

d. h. die Höhe der Schiene beträgt 19,36 cm.

b). Nach Gleichung 2). Seite 114 ist der Pfeil der Biegung:

$$s = \frac{4\,P\,l^3}{E\,b\,h^3}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$s = \frac{4\,.\,1000\,.\,150^3}{2000000\,.\,3\,.\,19{,}365^3}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$s = 0{,}30984 \text{ cm}$$

d. h. das äusserste freie Ende der Schiene erleidet eine Biegung von 0,3098 cm oder ca. 3,1 mm.

Aufgabe 71. Wenn sich eine parallelepipedische gusseiserne Stange von 5,2 cm Breite und 1,3 cm Höhe durch ein in der Mitte aufliegendes Gewicht P = 9 kg um 0,65 cm gesenkt hat, während die Entfernung l der Stützen 1,56 m beträgt, wie gross ergibt sich dann der Elasticitätsmodulus des Gusseisens pro □cm?

Auflösung. Nach Gleichung 4). auf Seite 131 ist bei einem an beiden Enden gestützten und in der Mitte belasteten Balken der Pfeil der Biegung:

$$s = \frac{P\,l^3}{48\,E\,T}$$

Nach Gleichung 14). auf Seite 82 ist für einen Balken von rechteckigem Querschnitt:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{12}\, b h^3$$

und wenn wir diesen Wert in die obige Gleichung für T einsetzen, so ist

$$s = \frac{\mathrm{P} l^3}{4 \mathrm{E} b h^3}$$

und hieraus ergibt sich für die unbekannte Grösse:

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{P} l^3}{4 s b h^3}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\mathrm{E} = \frac{9 . 156^3}{4 . 0{,}65 . 5{,}2 . 1{,}3^3}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$\mathrm{E} = 1150296$$

d. h. der Elasticitätsmodulus des untersuchten gusseisernen Stabes ist pro Quadratcentimeter Querschnittsfläche = 1150296 kg.

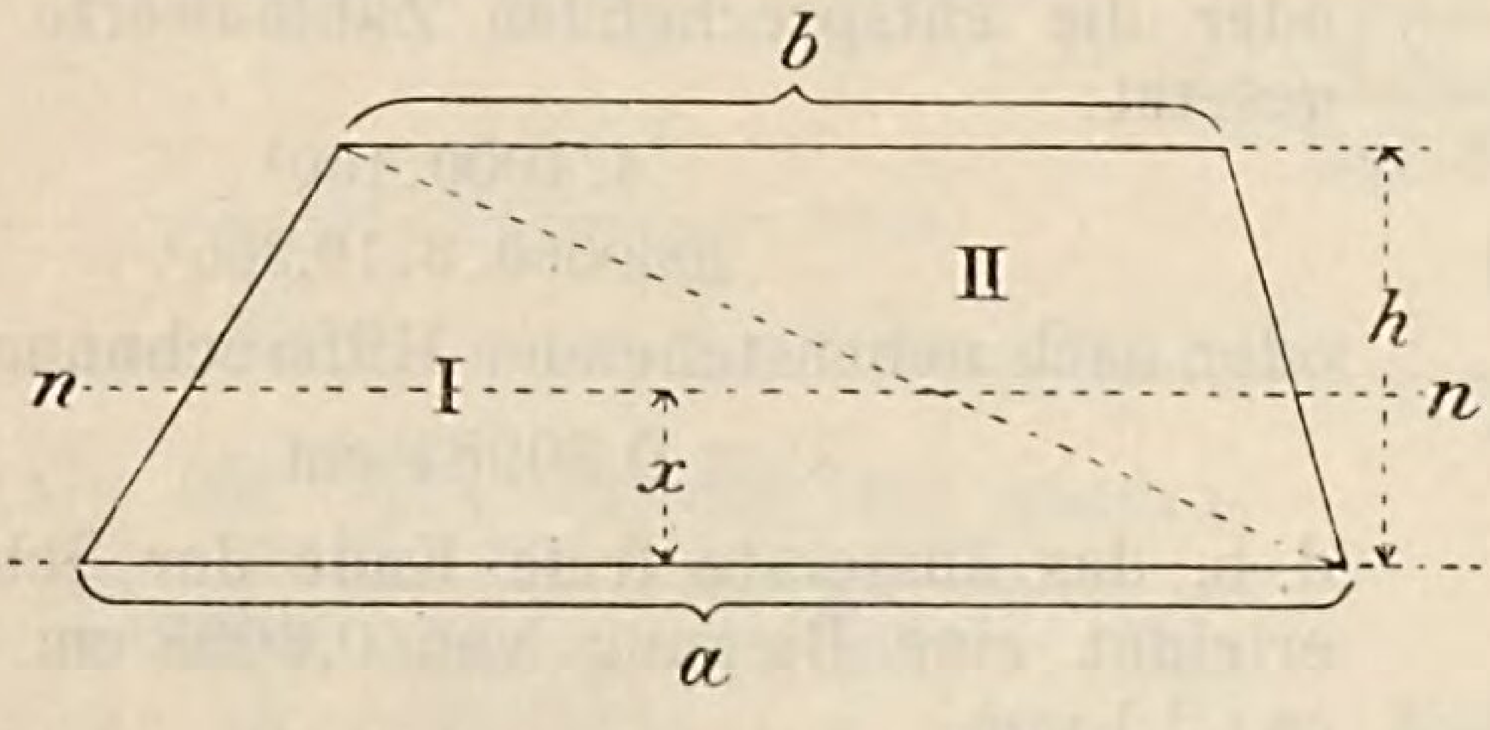
Hilfsrechnung.

$$\frac{9 . 156^3}{4 . 0{,}65 . 5{,}2 . 1{,}3^3} = \frac{9 . 120^3}{4 . 0{,}65 . 5{,}2} = \frac{9 . 6 . 120 . 30}{0{,}13 . 1{,}3} =$$

```
194400000 : 169 = 1150296
169
 254
 169
  850
  845
   500
   338
   1620
   1521
    990
```

Aufgabe 72. Es ist das Trägheitsmoment T, sowie das Widerstandsmoment oder der Querschnittsmodulus $\frac{T}{Y}$ für ein Paralleltrapez zu berechnen. Die parallelen Seiten seien a und b, die Höhe h.

Figur 137.



Auflösung. Wir denken uns das Paralleltrapez (Fig. 137) aus zwei Dreiecken zusammengesetzt, und suchen zunächst das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse $n_1 n_1$, welche durch die Grundlinie a des Dreiecks I, aber durch die Spitze des Dreiecks II geht. Das Trägheitsmoment eines Dreiecks, bezogen auf dessen Grundlinie, ist aber nach der in Erkl. 78 gegebenen Formel 41).:

$$\mathrm{T}_{\mathrm{I}} = \frac{1}{12}\, a h^3$$

oder da b die Grundlinie oder Basis bedeutet und diese in Fig. 137 = a ist, so ist für Dreieck I:

a). . . . $\mathrm{T}_{\mathrm{I}} = \frac{1}{12}\, a h^3$

und nach der in Erkl. 78 gegebenen Formel 42). ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch die Spitze gehende Achse für Dreieck II:

b). $\mathrm{T}_{\mathrm{II}} = \frac{1}{4}\, b h^3$

Die Summe dieser beiden Trägheitsmomente ist aber das Trägheitsmoment des Paralleltrapezes in Bezug auf die Achse $n_1 n_1$ und ist also:

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{12}\, a h^3 + \frac{1}{4}\, b h^3$$

oder:

$$T_1 = \frac{1}{12} h^3 (a+3b)$$

Nach der in Antw. auf Frage 59 entwickelten Formel 17 ist aber das Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Achse

c). $T = T_1 - Y^2 F$

Nach Erkl. 65 geht aber die neutrale Faserschicht nn durch den Schwerpunkt des Paralleltrapezes und es ist deshalb zu wissen nötig, wie gross der Abstand x (Fig. 137) ist, d. h. wie hoch der Schwerpunkt über der Grundlinie a liegt Nach Antw. auf Frage 87 in *R. Klimpert,* Lehrbuch der Statik, ist im vorliegenden Fall:

$$x = \frac{a+2b}{a+b} \cdot \frac{h}{3} = Y$$

und der Flächeninhalt des Paralleltrapezes ist

$$F = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

setzen wir diese Werte in die Gleichung c)., so ergibt sich für das Trägheitsmoment:

$$T = \frac{1}{12} h^3 (a+3b) - \left[\left(\frac{a+2b}{a+b}\right) \cdot \frac{h}{3}\right]^2 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1:

A). . . $T = \frac{1}{36} h^3 \left(\frac{a^2 + 4ab + b^2}{a+b}\right)$

Da der Abstand der äussersten Faserschicht von der neutralen Achse $nn = x$ resp. $h - x$ beträgt, so sind die Widerstandsmomente oder Querschnittsmoduli:

d). . . $Q_1 = \dfrac{\frac{1}{36} h^3 \cdot \frac{(a^2 + 4ab + b^2)}{a+b}}{x}$

und

e). . . $Q_2 = \dfrac{\frac{1}{36} h^3 \cdot \frac{(a^2 + 4ab + b^2)}{a+b}}{h - x}$

oder den entsprechenden Wert für x eingesetzt:

$$Q_1 = \frac{h^3 (a^2 + 4ab + b^2)\, 3(a+b)}{36 (a+b)\, h\, (a+2b)}$$

und

$$Q_2 = \frac{h^3 (a^2 + 4ab + b^2)\, 3(a+b)}{36 (a+b)\, h\, (2a+b)}$$

(s. Hilfsrechn. 2

oder:

B). . . $Q_1 = \frac{1}{12} h^2 \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + 2b}$

und

C). . . $Q_2 = \frac{1}{12} h^2 \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{2a + b}$

Hilfsrechnung 1.

$$T = \tfrac{1}{12} h^3 (a+3b) - \frac{(a+b)h}{2} \cdot \frac{(a+2b)^2 h^2}{(a+b)^2 . 9}$$

oder:

$$T = \tfrac{1}{12} h^3 (a+3b) - \tfrac{1}{18} h^3 \cdot \frac{(a+2b)^2}{(a+b)}$$

oder:

$$T = \tfrac{1}{12} h^3 (a+3b) - \tfrac{1}{18} h^3 \cdot \frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{a+b}$$

oder:

$$T = \tfrac{1}{36} h^3 \left[\frac{3(a+3b)(a+b) - 2(a^2 + 4ab + 4b^2)}{a+b}\right]$$

oder:

$$T = \tfrac{1}{36} h^3 \left[\frac{3a^2 + 3ab + 9b^2 + 9ab - 2a^2 - 8ab - 8b^2}{a+b}\right]$$

oder:

$$T = \tfrac{1}{36} h^3 \left(\frac{a^2 + 4ab + b^2}{a+b}\right)$$

Hilfsrechnung 2.

Setzt man in $h - x$ [siehe Gleichung e).] für $x = \frac{a+2b}{a+b} \cdot \frac{h}{3}$, so erhält man:

$$h - \frac{a+2b}{a+b} \cdot \frac{h}{3}$$

oder:

$$\frac{3h(a+b) - h(a+2b)}{3(a+b)}$$

oder:

$$\frac{h[3(a+b) - (a+2b)]}{3(a+b)}$$

oder:

$$\frac{h(3a + 3b - a - 2b)}{3(a+b)}$$

oder:

$$\frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

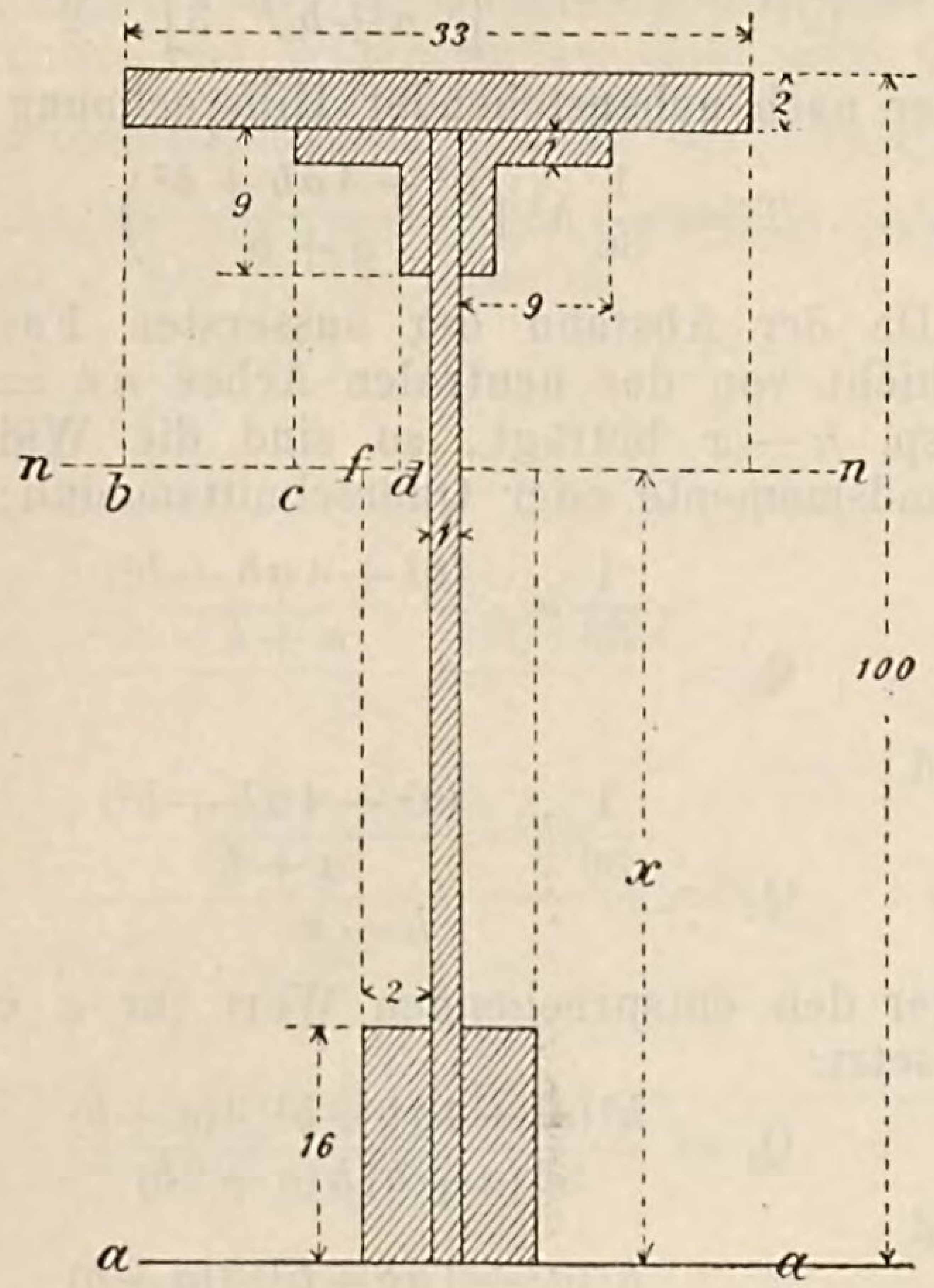
Aufgabe 73. Berechne a). das Trägheitsmoment T in Bezug auf die neutrale Achse für den in Fig. 138 vorgezeichneten Querschnitt, wenn die eingeschriebenen Masse Centimeter bedeuten.

b). Wie gross ist die Tragfähigkeit dieses in Fig. 138 im Querschnitt dargestellten T-Eisens, wenn die freie Länge einer mit ihren beiden Enden eingemauerten Schiene 6 m beträgt und die Last gleichmässig über die ganze Länge verteilt ist und wenn S = 900 kg?

c). Wie gross würde die Tragfähigkeit sein, wenn die Schiene an einem Ende befestigt und am andern belastet ist?

d). Wie gross ist in den beiden vorerwähnten Fällen die Tragfähigkeit, wenn das Eigengewicht der Schiene mit in Rechnung gebracht und für das spez. Gewicht = 7,788 gesetzt wird?

Figur 138.



Auflösung. Es ist zunächst die Lage der neutralen Achse der in Fig. 138 gegebenen unsymmetrischen Querschnittsform zu berechnen und danach das Trägheitsmoment zu ermitteln. Wir haben demnach hier in ähnlicher Weise zu verfahren, wie es bereits in Antw. auf Frage 65 gezeigt wurde. Zur Bestimmung der Lage der neutralen Achse benützen wir die Gleichung 12). auf Seite 80, wonach der Abstand x der neutralen Achse von der Grundkante aa durch die Gleichung

$$x = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 \cdots + f_n y_n}{f_1 + f_2 \cdots f_n}$$

ausgedrückt wird, wenn f_1, f_2 etc. die einzelnen Flächenstücke und y_1, y_2 die Abstände ihrer Schwerpunkte von aa bezeichnen.

Zunächst ist im obersten Teil des Querschnitts ein Rechteck vorhanden, dessen Fläche

$$f_1 = 33 \,.\, 2 \text{ oder } 66$$

und der Abstand des Schwerpunkts, welcher bekanntlich mit dem Mittelpunkt der Fläche zusammenfällt, ist

$$y_1 = 99$$

folglich

$$f_1 y_1 = 66 \,.\, 99$$

Hierauf kommen zwei Winkeleisen, deren jedes kann zusammengesetzt sein aus einem Rechteck von 1 Höhe und 9 Breite und von 8 Höhe und 1 Breite. Die beiden ersteren betragen

$$f_2 = 1 \,.\, 9 \,.\, 2 \text{ oder } 18$$

und der Abstand ihres Schwerpunkts von aa ist

$$y_2 = 97{,}5$$

also

$$f_2 y_2 = 18 \,.\, 97{,}5$$

die beiden letzteren zu den Winkeleisen gehörigen Rechtecke betragen:

$$f_3 = 2 \,.\, 8 \,.\, 1$$

und der Schwerpunktsabstand:

$$y_3 = 93$$

also

$$f_3 y_3 = 16 \,.\, 93$$

Der Flächeninhalt der Mittelrippe ist

$$f_4 = 98 \,.\, 1$$

und der Schwerpunktsabstand derselben:

$$y_4 = 49$$

also

$$f_4 y_4 = 98 \,.\, 49$$

und endlich sind noch zwei Rechtecke vorhanden, deren jedes

Hilfsrechnungen.

1). . . . 99.66 97,5.18

```
99.66        97,5.18
 594           7800
594             975
6534          1755,0

93.16     98.49     64.8
 558       882       512
 93       392
1488      4802

6534    66
1755    18
1488    16
4802    98
 512    64
15091 : 262 = 57,6
1310
 1991
 1834
  1570
  1572
```

2).

$\log 42,4 = 1,6273659$
$\quad .3$
$4,8820977$
$+ \log 33 = 1,5185139$
$6,4006116$
num-log $= 2515426$

$\log 40,4 = 1,6063814$
$\quad .3$
$4,8191442$
$+ \log 14 = 1,1461280$
$5,9652722$
num-log $= 923150$

$\log 39,4 = 1,5954962$
$\quad .3$
$4,7864886$
$+ \log 16 = 1,2041200$
$5,9906086$
num-log $= 978608$

$\log 31,4 = 1,4969296$
$\quad .3$
$4,4907888$
$+ \log 2 = 0,3010300$
$4,7918188$
num-log $= 61918$

$\log 57,6 = 1,7604225$
$\quad .3$
$5,2812675$
$+ \log 5 = 0,6989700$
$5,9802375$
num-log $= 955515$

$$16.2 = 32$$

oder beide

$$f_5 = 64$$

und ihr Schwerpunktsabstand:

$$y_5 = 8$$

also

$$f_5 y_5 = 64.8$$

Setzen wir alle diese Werte in die obige Bestimmungsgleichung für x, so ergibt sich:

$$x = \frac{66.99 + 18.97,5 + 16.93 + 98.49 + 64.8}{66 + 18 + 16 + 98 + 64}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$x = 57,6 \text{ cm}$$

d. h. die neutrale Achse liegt in 57,6 cm Entfernung parallel über aa.

Zur Bestimmung des Trägheitsmoments denken wir uns die oberhalb der neutralen Achse liegende Querschnittsfläche bestehend aus einem Rechteck von der Breite 33 und der Höhe $100 - x = 100 - 57,6 = 42,4$ und subtrahieren hiervon jederseits je ein Rechteck von der Breite $bc = \frac{1}{2}(33 - 19 = 7$ und der Höhe 40,4, ferner ein Rechteck von der Breite $cd = 8$ und der Höhe 39,4 und endlich ein Rechteck von der Breite 1 und der Höhe 31,4; unterhalb der neutralen Achse besteht der Querschnitt aus einem Rechteck von den Dimensionen $5.57,6$ minus zweimal einem Rechteck von $2.41,6$, demnach ist nach Gleichung 13). auf Seite 81:

$$T = \frac{1}{3} b h^3$$

im vorliegenden Fall:

$$T = \frac{1}{3}\left[33.42,4^3 - 2.7.40,4^3 - 2.8.39,4^3 - 2.1.31,4^3 + 5.57,6^3 - 4.41,6^3\right]$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechuung 2). ist das Trägheitsmoment:

$$T = 406433$$

b) Zur Ermittelung der Tragfähigkeit dient die in Antw. auf Frage 101 gegebene Gleichung:

$$Pl = 12\,QS$$

Die Querschnittsmoduli oder Widerstandsmomente sind, da die Entfernung der äussersten Faser von der neutralen Achse nach oben 42,4 und nach unten 57,6 ist und $Q = \frac{T}{Y}$ beträgt:

$$Q_1 = \frac{406433}{42,4}$$

und

$$Q_2 = \frac{406433}{57,6}$$

$$
\begin{array}{rl}
\log 41{,}6 = & 1{,}6190933 \\
 & .\,3 \\
\hline
 & 4{,}8572799 \\
+ \log 4 = & 6{,}6020600 \\
\hline
 & 5{,}4593399 \\
\text{num-log} = & 287965
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
+\,2515426 - & 923150 \\
955515 & 978607 \\
 & 61918 \\
 & 287965 \\
\hline
3470941 - & 2251641 = \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{1219300 : 3 = 406433}
\end{array}
$$

3). . . . $4064330 : 576 = 7056$

$$
\begin{array}{r}
4032 \\
\hline
3233 \\
2880 \\
\hline
3530 \\
3456 \\
\hline
\end{array}
$$

4). . . . $\frac{12\,.\,7056\,.\,900}{660} = 2\,.\,7056\,.\,9$

$$
\begin{array}{rr}
= & 18\,.\,7056 \\
\hline
 & 56448 \\
 & 7056 \\
\hline
 & 127008
\end{array}
$$

5). . . . $157{,}2\,.\,7{,}788$

$$
\begin{array}{r}
12576 \\
12576 \\
11004 \\
11004 \\
\hline
1224{,}2726
\end{array}
$$

Hilfsrechnung 6.

Den nebenstehenden Bruch kann man auch schreiben:

$$P = \frac{12\,.\,7056\,.\,900}{600} - \frac{1225\,.\,600}{600}$$

Die erste Hälfte auf der rechten Seite der Gleichung gibt denselben Wert, den wir bereits nach Hilfsrechnung 4). ermittelt haben, und somit ist weiter nichts zu thun, als das Eigen-

In der Praxis wird stets der kleinere Wert von Q genommen, also im vorliegenden Fall ist:

$$Q = \frac{406433}{57{,}6}$$

oder nach Hilfsrechnung 3).:

$$Q = 7056$$

und da der Sicherheitskoeffizient pro □cm = 900 und die Länge = 600 cm beträgt, so ist die Tragfähigkeit:

$$P = \frac{12\,.\,7056\,.\,900}{600}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 4).:

$$P = 127008 \text{ kg.}$$

c). Wäre die Schiene an einem Ende befestigt und am andern belastet, so würde die Tragfähigkeit nur den 12. Teil der unter b). berechneten Grösse betragen, also

$$P = \frac{127008}{12}$$

oder:

$$P = 10584 \text{ kg}$$

sein.

d). Das Eigengewicht des Trägers ergibt sich, wenn man das Volumen mit dem spezifischen Gewicht multipliziert. Nach Hilfsrechnung 1). beträgt die Gesamtquerschnittsfläche 262 □cm und somit das Volumen bei 600 cm Länge:

$$V = 262\,.\,600$$

oder:

$$V = 157200 \text{ kcm.}$$

Jeder Kubikcentimeter Eisen wiegt 7,788 g und somit ist das Gewicht der freien Länge des T-Trägers:

$$G = \frac{157200\,.\,7{,}788}{1000}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 5).:

$$G = \text{ca. } 1225 \text{ kg.}$$

Ist nun der Träger mit seinen beiden Enden eingemauert und die Last gleichmässig über seine Länge verteilt, so ist, unter Berücksichtigung seines Eigengewichts, nach Erkl. 115:

$$\frac{1}{2}\,l\,(P + G) = 6\,Q\,S$$

und somit:

$$P = \frac{12\,Q\,S - G\,l}{l}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

gewicht des Balkens von der Gesamttragfähigkeit zu subtrahieren, vorausgesetzt, dass die Gesamttragfähigkeit bereits berechnet ist, also ist:

$$P = 127008 \text{ kg} - 1225$$

oder:

$$P = 125783 \text{ kg.}$$

7). 10584
612,5
9971,5

$$P = \frac{12 \,.\, 7056 \,.\, 900 - 1225 \,.\, 600}{600}$$

oder:

$$P = 125783 \text{ kg} \quad \text{(s. Hilfsrechnung 6).}$$

Ist der Balken aber an einem Ende eingemauert und am andern freien Ende belastet, so ergibt sich seine Tragfähigkeit unter Berücksichtigung seines Eigengewichts nach Erkl. 104 aus der Formel:

$$l\left(\frac{1}{2} G + P\right) = Q S$$

oder:

$$P = \frac{Q S}{l} - \frac{1}{2} G$$

$\frac{Q S}{l}$ wurde aber bereits unter c). berechnet und dafür 10584 kg gefunden und somit ist:

$$P = 10584 - \frac{1225}{2}$$

oder:

$$P = \text{ca. } 9970 \text{ kg.}$$

Aufgabe 74. Wie hoch lässt sich in einem Getreidemagazin das Getreide aufschütten, wenn der Boden auf Balken von 7,85 m Länge, 26 cm Breite und 32 cm Höhe ruht, die Entfernung zwischen den geometrischen Achsen von je zwei Balken 1 m beträgt, und ein Liter Getreide = 780 g wiegt? (S = 90 kg pro □cm.)

Hilfsrechnungen.

$$1). \ldots \frac{2 \,.\, 90 \,.\, 26 \,.\, 32 \,.\, 32}{785} = \frac{2 \,.\, 18 \,.\, 26 \,.\, 32 \,.\, 32}{157}$$

2 . 18 =
36 . 26 . 32 . 32
216 1024
72
936
1024
3744
1872
9360
958464 : 157 = 6105
942
164
157
764
785

Auflösung. Im vorliegenden Fall ist anzunehmen, dass die Balken an beiden Enden eingemauert sind und somit gilt die auf Seite 130 gegebene Gleichung:

$$P l = 12 Q S$$

oder da nach Gleichung 15). auf Seite 82 im vorliegenden Fall:

$$Q = \frac{1}{6} b h^2$$

so ist:

$$P l = \frac{12 S \,.\, b h^2}{6}$$

und somit:

$$P = \frac{2 S \,.\, b h^2}{l}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{2 \,.\, 90 \,.\, 26 \,.\, 32 \,.\, 32}{785}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$P = 6105 \text{ kg.}$$

Die Fläche zwischen je zwei Balken beträgt 785 cm an Länge und 1 m an Breite, folglich 78500 □cm und die hierauf kommende Belastung 6105 kg.

Ist nun die Fläche x cm hoch mit Getreide bedeckt, so hat ein Balken die Last von $78500x$ ccm Getreide zu tragen. 1 Liter oder 1000 ccm Getreide wiegen aber

780 g oder 0,78 kg und somit besteht die Gleichung:

$$\frac{78500\,x}{1000} \cdot 0{,}78 = 6105$$

oder:

$$x = \frac{6105 \,.\, 1000}{78500 \,.\, 0{,}78}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$x = 100 \text{ cm}$$

d. h. das Getreide kann bei zehnfacher Sicherheit 1 m hoch aufgeschüttet werden.

2). . . . $\frac{6105 \,.\, 1000}{78500 \,.\, 0{,}78} = \frac{6105}{157 \,.\, 0{,}39}$

$$\frac{157 \,.\, 0{,}39}{1413}$$
$$\frac{471}{61{,}23 : 6105 = \text{ca. } 100}$$

Aufgabe 75. Wie stark muss eine runde hölzerne Wasserradwelle von 3 m Länge sein, wenn dieselbe in dem Rad samt dem eigenen Gewicht die ziemlich gleichmässig verteilte Last P = 5000 kg zu tragen hat?
(S = 60 kg pro □ cm.)

Hilfsrechnung.

$$\sqrt[3]{\frac{4 \,.\, 5000 \,.\, 300}{3{,}14159 \,.\, 60}} = \sqrt[3]{\frac{100000}{3{,}14159}} =$$

$$\frac{\log 100000 - \log 3{,}14159}{\log 3}$$

$$\begin{aligned} \log 100000 &= 5{,}0000000 \\ -\log \pi &= 0{,}4971499 \\ 3 &: 4{,}5028501 \\ \log d &= 1{,}5009500 \end{aligned}$$

mithin:
num-log d oder $d = 31{,}962$

Auflösung. Nach der in Antwort auf Frage 99 gegebenen Formel ist:

$$P l = 8 \, Q \, S$$

oder:

$$P = \frac{8 \, Q \, S}{l}$$

Nach Gleichung 6). in Antw. auf Frage 71 ist für kreisförmigen Querschnitt:

$$Q = \frac{1}{32} d^3 \pi$$

also:

$$P = \frac{8 \, d^3 \pi \, S}{32 \,.\, l}$$

und hieraus ergibt sich für:

$$d = \sqrt[3]{\frac{4 \, P \, l}{\pi \, S}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{4 \,.\, 5000 \,.\, 300}{3{,}14159 \,.\, 60}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. ist der Durchmesser d = 32 cm gross zu nehmen.

Aufgabe 76. a). Ein runder Baumstamm von 24 cm Durchmesser und 7 m Länge, der in seinen Endpunkten unterstützt ist, hat welche Tragkraft, wenn der Sicherheitsmodulus S = 63 kg pro □cm beträgt und die Last gleichmässig verteilt wirkt? Welche Tragkraft hat der aus demselben gezimmerte Balken mit dem denkbar grössten quadratischen Querschnitt b). wenn eine Quadratseite horizontal liegt, c). wenn eine Diagonale horizontal liegt, d). welches ist die denkbar grösste Tragfähigkeit bei rechteckigem Querschnitt?

Auflösung. a). Da die Last gleichmässig verteilt ist, so gilt hier die in Antw. auf Frage 99 gegebene Formel:

$$P l = 8 \, Q \, S$$

oder da Q im vorliegenden Fall nach Gleichung 6). auf Seite 99:

$$Q = \frac{1}{32} d^3 \pi$$

so ist:

$$P = \frac{d^3 \pi \, S}{4 \, l}$$

Hilfsrechnungen.

1). $\log 24 = 1{,}3802112$
$\cdot 3$
$4{,}1406336$
$+\log \pi = 0{,}4971499$
$+\log 63 = 1{,}7993405$
$6{,}4371240$
$-\log 2800 = -3{,}4471580$
$\log P = 2{,}9899660$

mithin:
num-log P = 977,16

2). . . $\frac{4\,.(0{,}707\,.\,24)^3.\,63}{3\,.\,700} = \frac{16{,}968^3.\,3}{25}$

$\log 16{,}968 = 1{,}2296307$
$\cdot 3$
$3{,}6888921$
$+\log 3 = 0{,}4771213$
$4{,}1660134$
$-\log 25 = 1{,}3979400$
$\log P = 2{,}7680734$

mithin:
num-log P oder P = 586,24

3). $\log 0{,}944 = 0{,}9749720-1$
$+\log 16{,}968^3 = 3{,}6888921$
$+\log 63 = 1{,}7993405$
$5{,}4632046$
$-\log 700 = 2{,}8450980$
$\log P = 2{,}6181066$

mithin:
num-log P oder P = 415,05

4). . . . $x^2 + (x\sqrt{2})^2 = 24^2$

oder: $x^2 + 2x^2 = 576$

oder: $3x^2 = 576$

oder: $x = \sqrt{192}$

$\log 192 = 2{,}2833012$
$\cdot \frac{1}{2}$
$\log x$ oder $b = 1{,}1416506$

mithin:
num-log x oder $b = 13{,}857$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{24^3.\,3{,}14\,.\,63}{4\,.\,700}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$P = 977 \text{ kg.}$$

b). Bei quadratischem Querschnitt bildet der Durchmesser die Diagonale des Quadrats und es ist somit die Quadratfläche:

$$a^2 = \frac{1}{2} d^2$$

oder:

$$a = d\sqrt{0{,}5}$$

oder:

$$\frac{d}{2}\sqrt{2} = \frac{d}{2}\cdot 1{,}414 = 0{,}707\,d$$

Liegt eine Quadratseite horizontal, dann ist nach Gleichung 20 auf Seite 84 für den beiderseits gestützten und gleichmässig belasteten Balken:

$$P = \frac{8\,a^3 S}{6\,l}$$

oder für a den oben angegebenen Wert eingesetzt:

$$P = \frac{4\,.(0{,}707\,d)^3.\,S}{3\,l}$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{4\,.(0{,}707\,.\,24)^3.\,63}{3\,.\,700}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$P = 586 \text{ kg.}$$

also reichlich die Hälfte der unter a). berechneten Grösse.

c). Liegt der Balken so, dass eine Diagonale des quadratischen Querschnitts horizontal liegt, dann ist nach Gleichung 23 siehe Antw. auf Frage 62 für einen beiderseits gestützten und gleichmässig belasteten Balken:

$$P = \frac{8\,.\,0{,}118\,.\,a^3 S}{l}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{0{,}944\,.\,16{,}968^3.\,63}{700}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 3).:

$$P = 415 \text{ kg.}$$

d). Nach Antw. auf Frage 127 ist derjenige Balken von rechteckigem Querschnitt der vorteilhafteste, bei dem das Verhältnis:

$$b : h = 1 : \sqrt{2}$$

besteht. Um nun b und h zu ermitteln, ist

zu berücksichtigen, dass der Durchmesser d die Diagonale des Rechtecks bildet und somit ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz:

$$d^2 = b^2 + h^2$$

oder wenn wir $b = x$ setzen, so ist:

$$h = x\sqrt{2}$$

und somit:

$$d^2 = x^2 + (x\sqrt{2})^2$$

oder:

$$24^2 = x^2 + (x\sqrt{2})^2$$

oder:

$$x = 13{,}857 = b \text{ (s. Hilfsrechn. 4).}$$

und demnach ist:

$$h = 13{,}857\sqrt{2}$$

oder:

$$h = 19{,}596 \text{ (s. Hilfsrechn. 5).}$$

Nun ist nach Gleichung 16). auf Seite 82 für einen beiderseits gestützten, gleichmässig belasteten Balken:

$$P = 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^2 S}{l}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{4 \,.\, 13{,}857 \,.\, 19{,}596^2 \,.\, 63}{3 \,.\, 700}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 6).:

$$P = 638{,}5 \text{ kg.}$$

5). 13,857 . 1,4142

$$\log 13{,}857 = 1{,}1416506$$
$$+ \log 1{,}4142 = 0{,}1505108$$
$$\log h = 1{,}2921614$$

mithin:

num-log h oder $h = 19{,}596$

6). $$\frac{4 \,.\, 13{,}857 \,.\, 19{,}596^2 \,.\, 63}{3 \,.\, 700} = \frac{13{,}857 \,.\, 19{,}596^2 \,.\, 3}{25}$$

$$\log 13{,}857 = 1{,}1416506$$
$$+ \log 19{,}596^2 = 2{,}5843228$$
$$+ \log 3 = 0{,}4771213$$
$$4{,}2030947$$
$$- \log 25 = 1{,}3978400$$
$$\log P = 2{,}8051547$$

mithin:

num-log P oder P = 638,49

Aufgabe 77. Ein gusseiserner Träger von 8 cm Breite und 2,5 m Länge soll dieselbe Tragkraft erhalten, wie ein anderer von 12 cm Breite, 7 cm Höhe und 4 m Länge. Wie hoch muss der erste genommen werden?

Auflösung. Nach Gleichung 16). auf Seite 82 ist die Tragfähigkeit eines rechteckigen Balkens:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^2 S}{l}$$

und somit verhalten sich die Tragfähigkeiten zweier Balken von demselben Material wie:

$$P_1 : P_2 = \frac{b_1 h_1^2}{l_1} : \frac{b_2 h_2^2}{l_2}$$

Da nun $P_1 = P_2$ sein soll, so folgt, wenn die entsprechenden Zahlenwerte und für die unbekannte Grösse x eingesetzt wird, die Gleichung:

$$\frac{12 \,.\, 7^2}{400} = \frac{8x^2}{250}$$

oder:

$$x = \sqrt{\frac{250 \,.\, 12 \,.\, 7^2}{8 \,.\, 400}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$x = 6{,}77 \text{ cm.}$$

Hilfsrechnung.

$$\sqrt{\frac{250.12.49}{8.400}} = \sqrt{\frac{5.3.49}{8.2}} = 7\sqrt{\frac{15}{16}} =$$

$$\frac{7}{4}\sqrt{15} = \sqrt{15} = 3{,}87 \,.\, 1{,}75$$

6\|600	1935
544	2709
76\|5600	387
5369	6,7725
774\|23100	

Aufgabe 78. Statt eines Fichtenbalkens von 4 m Länge, 15 cm Breite und 20 cm Höhe soll ein gusseiserner mit quadratischem Querschnitt eingefügt werden, welcher dieselbe Tragkraft besitzt. Wie gross muss die Seite desselben sein, wenn der Sicherheitskoeffizient des Gusseisens den 10fachen Wert von dem des Fichtenholzes besitzt?

Auflösung. Nach Gleichung 16). auf Seite 82 beträgt die Tragfähigkeit eines Balkens von rechteckigem Querschnitt:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{bh^2 S}{l}$$

und nach Gleichung 20). auf Seite 84 beträgt die Tragfähigkeit eines Balkens von quadratischem Querschnitt:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3 S}{l}$$

folglich besteht, da die Länge in beiden Fällen dieselbe ist, der Bruch $\frac{1}{6}$ weggelassen werden kann und S im zweiten Fall 10mal so gross ist, als im ersten Fall die Gleichung:

$$b h^2 = 10 a^3$$

oder die gegebenen Zahlenwerte und für die Unbekannte x eingesetzt:

$$10 x^3 = 15 . 20 . 20$$

und hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$x = 8{,}4$$

d. h. die Kante des quadratischen Querschnitts des gusseisernen Trägers muss 8,4 cm gross genommen werden.

Hilfsrechnung.

$$x^3 = 15 . 2 . 20$$

oder:

$$x = \sqrt[3]{600}$$

$$\log 600 = 2{,}7781513$$
$$. \frac{1}{3}$$
$$\log x = 0{,}9260504$$

mithin:

num-log x oder $x = 8{,}4343$

Aufgabe 79. Welche Last trägt ein hohler Balken von Gusseisen (S = 660), dessen äussere Höhe 20,8 cm und Breite 10,4 cm und dessen innere Höhe 15,6 cm und Breite 5,2 cm und der 1,88 m lang ist,

a). Wenn derselbe an beiden Enden frei aufliegt und in der Mitte belastet ist;

b). Wenn derselbe an beiden Enden frei aufliegt und die Last gleichmässig verteilt ist;

c). Wenn derselbe an beiden Enden eingemauert und in der Mitte belastet ist;

d). Wenn derselbe an beiden Enden eingemauert und die Last gleichmässig verteilt ist?

e). Was ergibt sich für jeden der vorerwähnten Fälle, wenn der Balken so gelegt wird, dass die Höhe des Querschnitts zur Breite desselben wird?

Auflösung. a). Nach Gleichung 1). auf Seite 124 ist für den vorliegenden Fall:

$$P l = 4 Q S$$

d. h. die Tragfähigkeit ist die vierfache, als wenn der Balken an einem Ende befestigt und am andern belastet wäre. Dieses beachtend erhält man nach Gleichung 27 c). auf Seite 86:

$$P = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{(b h^3 - b_1 h_1{}^3) S}{h l}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{4}{6} \cdot \frac{(10{,}4 . 20{,}8^3 - 5{,}2 . 15{,}6^3) . 660}{20{,}8 . 188}$$

und hieraus ergibt sich nach der nebenstehenden Hilfsrechnung 1).:

$$P = 8309 \text{ kg}.$$

Hilfsrechnungen.

1). . . $$P = \frac{4}{6} \cdot \frac{(10{,}4 . 20{,}8^3 - 5{,}2 . 15{,}6^3) . 660}{20{,}8 . 188}$$

oder:

$$P = \frac{(10{,}4 . 20{,}8^3 - 5{,}2 . 15{,}6^3) . 55}{2{,}6 . 188}$$

$$\log 20{,}8 = 1{,}3180633$$
$$.\,3$$
$$3{,}9541899$$
$$+\log 10{,}4 = 1{,}0170333$$
$$4{,}9712232$$

mithin:
$$\text{num-log}\ 20{,}8^3 . 10{,}4 = 93589$$

$$\log 15{,}6 = 1{,}1931246$$
$$.\,3$$
$$3{,}5793738$$
$$+\log 5{,}2 = 0{,}7160033$$
$$4{,}2953771$$

mithin:
$$\text{num-log}\ 15{,}6^3 . 5{,}2 = 19741$$

also:
$$P = \frac{(93589 - 19741) . 55}{2{,}6 . 188}$$

oder:
$$P = \frac{73848 . 55}{2{,}6 . 188}$$

$$\log 73848 = 4{,}8683093$$
$$+\log 55 = 1{,}7403627$$
$$6{,}6086720$$

$$\log 2{,}6 = 0{,}4149733$$
$$+\log 188 = 2{,}2741578$$
$$2{,}6891311$$

$$6{,}6086720$$
$$-2{,}6891311$$
$$\log P = 3{,}9195409$$

mithin:
$$\text{num-log}\ P = 8308{,}9$$

2). . . $P = \frac{(10{,}4^3 . 20{,}8 - 5{,}2^3 . 15{,}6) . 55}{2{,}6 . 188}$

$\log 10{,}4 = 1{,}0170333$	$\log 5{,}2 = 0{,}7160033$
$.\,3$	$.\,3$
$3{,}0510999$	$2{,}1480099$
$+\log 20{,}8 = 1{,}3180633$	$+\log 15{,}6 = 1{,}1931246$
$4{,}3691632$	$3{,}3411345$
num-log = 23397	num-log = 2193,5
$-2193{,}5$	
$21203{,}5$	

also:
$$P = \frac{21203{,}5 . 55}{2{,}6 . 188}$$

oder:
$$\log 21203{,}5 = 4{,}3264075$$
$$+\log 55 = 1{,}7403627$$
$$6{,}0667702$$
$$-\log 2{,}6 . 188 = -2{,}6891311$$
$$\log P = 3{,}3776391$$

mithin:
$$\text{num-log}\ P = 2385{,}8$$

b). Im vorliegenden Fall ist die Tragfähigkeit doppelt so gross als unter a)., also:

$$P = 16618 \text{ kg}.$$

Dasselbe Resultat wie unter b). gilt auch für c).

d). Ist der Balken an beiden Enden eingemauert und gleichmässig belastet, so ist nach Gleichung Seite 130:

$$P\,l = 12\,Q\,S$$

also die Tragfähigkeit dreimal so gross als unter a). und somit

$$P = 24927 \text{ kg}.$$

e). Wird der Balken flachkantig genommen, so ist für den ersten Fall:

α). . . $P = \frac{4}{6} . \frac{4\,(10{,}4^3 . 20{,}8 - 5{,}2^3 . 15{,}6) . 600}{10{,}4 . 188}$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

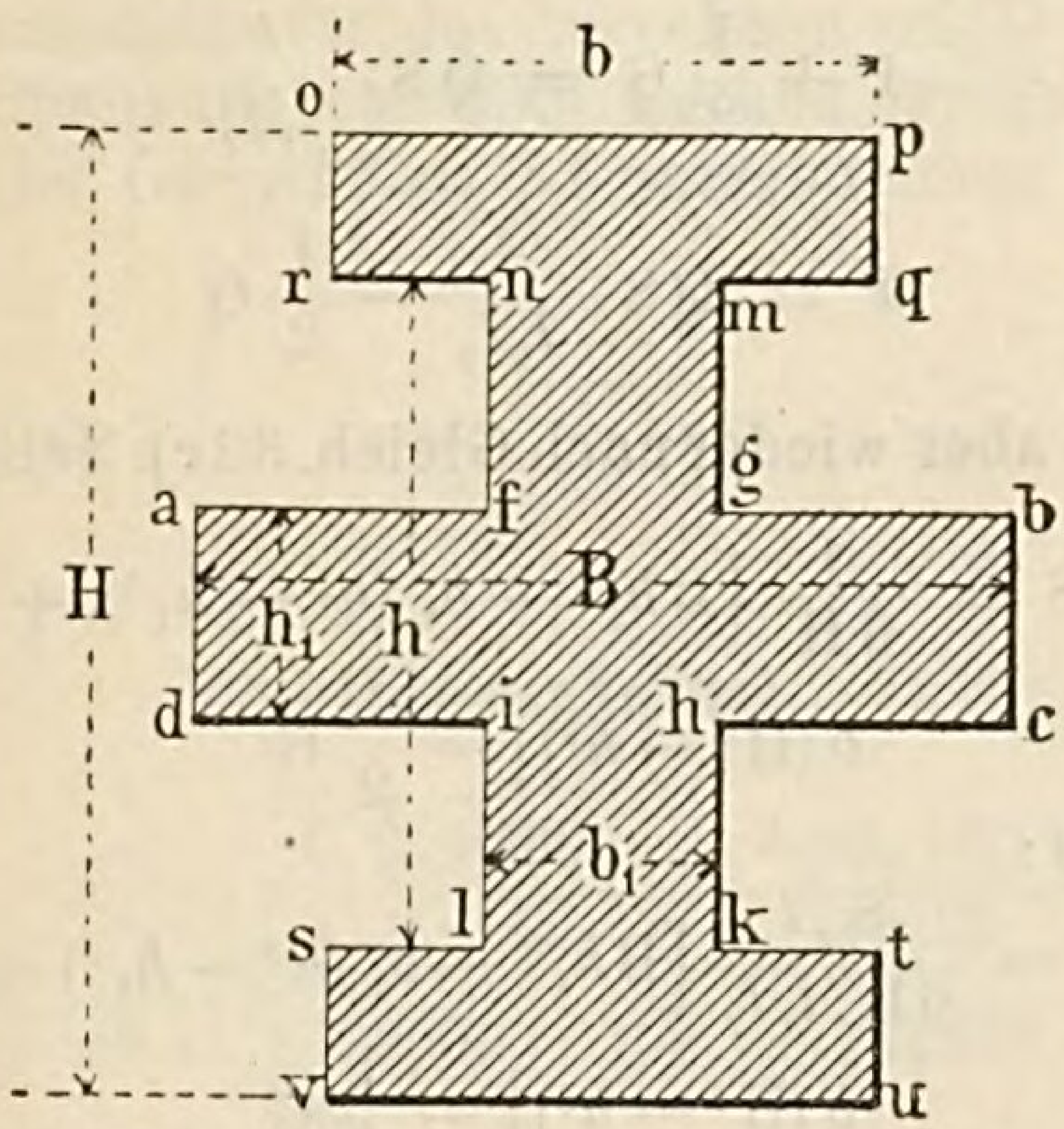
$$P = 2386 \text{ kg}$$

β). u. γ). . . $P = 4772$ „

δ). $P = 7158$ „

Aufgabe 80. Welche Last, mit Einrechnung des eigenen Gewichts, kann ein an beiden Enden gestützter gusseiserner Träger von der Form Fig. 139 a) in seiner Mitte, b) an einem Punkte aufnehmen, der 3,75 m von dem einen und 6,25 m von dem andern Ende entfernt ist, wenn H = 45 cm, h = 30 cm, h_1 = 10 cm, B = 36 cm, b = 24 cm, b_1 = 12 cm, l = 10 m, das spezifische Gewicht γ = 7,5 und S = 650 kg beträgt?

Figur 139.



Hilfsrechnungen.

1). $10^3 = 1000$

$30^3 = 27000$

$45 . 45 . 45 \quad 45^3 = 91125$

225
180
2025 . 45
10125
8100
91125

$$\frac{4 . 650}{6 . 45 . 1000} = \frac{13}{6 . 45 . 5} = \frac{13}{1350}$$

$$P = \frac{13}{1350}\left[36 . 1000 + 12\,(27000 - 1000) + 24 . (91125 - 27000)\right] - 3600$$

oder:

$$P = \frac{13}{1350}\left[36000 + 12 . 26000 + 24 . 64125\right] - 3600$$

oder:

$$P = \frac{13}{1350}\left[36000 + 312000 + 1539000\right] - 3600$$

Auflösung. Es soll zunächst das Gewicht des Trägers festgestellt werden. Der Querschnitt besteht zunächst aus den zwei Rechtecken oq und su, deren Flächeninhalt beträgt:

$$f_1 = 2 . b \cdot \frac{1}{2}\left(\mathrm{H} - h\right)$$

oder:

$$f_1 = 2 . 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 = 360 \,\square\,\mathrm{cm}$$

ferner aus zwei Rechtecken ng und ik, deren Flächeninhalt beträgt:

$$f_2 = 2 . b_1 \cdot \frac{1}{2}\left(h - h_1\right)$$

oder:

$$f_2 = 2 . 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 = 240 \,\square\,\mathrm{cm}$$

und aus dem Rechteck ac, dessen Flächeninhalt beträgt:

$$f_3 = \mathrm{B} . h_1 = 36 . 10 = 360 \,\square\,\mathrm{cm}$$

und somit ist die Gesamtquerschnittsfläche:

$$f = 360 + 240 + 360$$

oder:

$$f = 960 \,\square\,\mathrm{cm}$$

gross. Da die Länge l = 10 m oder 1000 cm beträgt, so ist das Volumen des Trägers:

$$\mathrm{V} = 960 . 1000$$

oder:

$$\mathrm{V} = 960000 \text{ kcm}$$

und da jeder Kubikcentimeter 7,5 g wiegt, so beträgt das Gesamtgewicht:

$$\mathrm{G} = \frac{960000 . 7,5}{1000}$$

oder:

$$\mathrm{G} = 7200 \text{ kg.}$$

a). Ein in der Mitte belasteter, an beiden Enden frei gestützter Balken trägt nach Antw. auf Frage 93 viermal soviel als ein an einem Ende befestigter und am andern belasteter Balken, und somit ist nach Gleichung 32 c). Seite 89 für den vorliegenden Fall:

$$\mathrm{P} = 4 \cdot \frac{\mathrm{S}}{6\,\mathrm{H}\,l}\left[\mathrm{B}h_1^3 + b_1\,(h^3 - h_1^3) + b\,(\mathrm{H}^3 - h^3)\right]$$

oder da nach Gleichung 2). auf Seite 125 unter Berücksichtigung des Eigengewichts:

$$\mathrm{P} + \frac{1}{2}\,\mathrm{G} = \frac{4\,\mathrm{Q}\,\mathrm{S}}{l}$$

so ist:

$$\mathrm{P} = \frac{4\,\mathrm{S}}{6\,\mathrm{H}\,l}\left[\mathrm{B}h_1^3 + b_1(h^3 - h_1^3) + b\,(\mathrm{H}^3 - h^3)\right] - \frac{1}{2}\mathrm{G}$$

```
36000
312000
1539000
1887000
     13
5661000
1887000
2453100 : 135 = 18171
135            — 3600
1103            14571
1080
 231
 135
  960
  945
  150
```

$$P = \frac{13}{1350} \cdot 1887000 - 3600$$

$$P = \frac{24531000}{1350} - 3600$$

2). . . $\frac{650 . 1000 . 1887000}{6 . 45 . 375 . 625} = \frac{13 . 8 . 5032}{3 . 9}$

```
  5032 . 104
     20128
   5032
27|523328 = 19382
   27       — 3600
   253       15782
   243
    103
     81
    222
    216
     68
```

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{4 . 650}{6 . 45 . 1000}\left[36 . 10^3 + 12\,(30^3 - 10^3) + 24\,(45^3 - 30^3)\right] - 3600$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$P = 14570 \text{ kg.}$$

b). Hängt die Last an einem Punkt, der sich 3,75 m von dem einen und 6,25 m von dem andern Ende des Trägers entfernt befindet, so ist nach Gleich. 1). auf Seite 125:

$$P + \frac{1}{2} G = QS \cdot \frac{l}{l_1 l_2}$$

oder:

$$P = QS \cdot \frac{l}{l_1 l_2} - \frac{1}{2} G$$

QS ist aber wieder nach Gleich. 32 c). Seite 89:

$$QS = \frac{S}{6H}\left[B h_1^3 + b_1\,(h^3 - h_1^3) + b\,(H^3 - h^3)\right] - \frac{1}{2} G$$

also ist:

$$P = \frac{S . l}{6H . l_1 l_2}\left[B h_1^3 + b_1\,(h^3 - h_1^3) + b\,(H^3 - h^3)\right] - \frac{1}{2} G$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte und bereits gefundenen Resultate eingesetzt:

$$P = \frac{650 . 1000}{6 . 45 . 375 . 625} \cdot 1887000 - 3600$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$P = 15780 \text{ kg.}$$

Aufgabe 81. Wie gross ist bei einem Balken die Spannung S in einer Entfernung $Y = 3$ cm von der neutralen Schicht eines rechteckigen Querschnitts, welcher eine Breite $b = 4$ cm und eine Höhe $h = 10$ cm hat, wenn die Kraft $P = 100$ kg in einem Abstand $x = 36$ cm von dem betreffenden Querschnitt angreift?

Auflösung. Nach Gleichung 8). auf Seite 78 ist:

$$S = \frac{Px . Y}{T}$$

und da für einen Balken von rechteckigem Querschnitt nach Gleichung 14). Seite 82:

$$T = \frac{1}{12} b h^3$$

ist, so ist:

$$S = \frac{Px . Y . 12}{b h^3}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

Hilfsrechnung.

$$\frac{100 \,.\, 36 \,.\, 3 \,.\, 12}{4 \,.\, 1000} = \frac{9 \,.\, 3 \,.\, 12}{10}$$

$$\frac{27 \,.\, 12}{10} = 32{,}4$$

$$S = \frac{100 \,.\, 36 \,.\, 3 \,.\, 12}{4 \,.\, 10^3}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$S = 32{,}4$$

d. h. die Spannung beträgt pro □cm 32,4 kg.

Aufgabe 82. Ein gusseiserner Stab von 1 cm Höhe und 2 cm Breite ist in seinen zwei Enden frei gestützt und soll durch sein eigenes Gewicht zerbrechen. Wie lang muss der Stab genommen werden, wenn als Festigkeitsmodulus für das Zerreissen seiner Faser die Spannung von 3000 kg und für das spezifische Gewicht = 7,6 angenommen wird?

Auflösung. Nach Gleichung 1). Seite 126 ist für den vorliegenden Fall:

$$P l = 8 \, Q S$$

worin P das Eigengewicht des Stabes bedeutet, welches als eine gleichmässig verteilte Last angesehen werden kann, und somit ist für einen rechteckigen, in beiden Enden gestützten Stab nach Gleichung 16). Seite 82:

$$P = 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^2 S}{l}$$

Das Eigengewicht des Stabes wird gefunden, indem man die Querschnittsfläche mit der unbekannten Länge x multipliziert. Jeder Kubikcentimeter des Stabes wiegt 7,6 g und somit ist das Gesamtgewicht auf einen Centimeter Länge:

$$P = \frac{2 \,.\, 1 \,.\, 7{,}6}{1000} \text{ kg}$$

und auf x cm Länge ist:

$$P = \frac{15{,}2 x}{1000}$$

oder:

$$P = 0{,}0152 x \text{ kg.}$$

Es besteht also die Gleichung:

$$0{,}0152 x = \frac{4 b h^2 S}{3 \,.\, l}$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$0{,}0152 x = \frac{4 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 3000}{3 \,.\, x}$$

oder:

$$x^2 = \frac{4 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 3000}{3 \,.\, 0{,}0152}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$x = 725$$

d. h. der Stab wird bei 725 cm = 7,25 m freier Länge brechen.

Hilfsrechnung.

$$x^2 = \frac{4 \,.\, 2 \,.\, 3000}{3 \,.\, 0{,}0152} = \frac{4 \,.\, 2 \,.\, 1000}{0{,}0152}$$

oder:

$$x^2 = 80000000 : 152 = 526316$$

```
760
 400
 304
  960
  912
   480
   456
    240
    152
     880
```

$$\sqrt{526316} = 725$$

```
 49
14|363
   284
144|7916
```

Aufgabe 83. Ein Stahlstab von 500 mm Länge und 1 kg Belastung ergab eine Pfeilhöhe $s = 12{,}6$ mm, wenn derselbe an beiden Enden gestützt und in der Mitte belastet war. Wie gross wird bei demselben Stab die Biegung s_1 sich ergeben, wenn der Stab an einem Ende befestigt, in einem beliebigen Abstand $l_1 = 180$ mm von der Befestigungsstelle ebenfalls durch 1 kg belastet wird?

Auflösung. Für einen an einem Ende befestigten und am andern Ende belasteten Stab ist der Pfeil der Biegung nach Gleichung in Antw. auf Frage 84:

$$s_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{P l_1^3}{ET}$$

Für einen an beiden Enden frei aufliegenden Stab, der in der Mitte belastet ist, ist der Pfeil der Biegung nach Gleich. 4). Seite 131:

$$s = \frac{1}{48} \cdot \frac{P l^3}{ET}$$

somit besteht die Proportion:

$$s_1 : s = \frac{1}{3} l_1^3 : \frac{1}{48} l^3$$

oder:

$$s_1 : s = 16\, l_1^3 : l^3$$

oder:

$$s_1 = \frac{s \cdot 16 l_1^3}{l^3}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$s_1 = \frac{12{,}6 \cdot 16 \cdot 180^3}{500^3}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$s = 9{,}4$$

d. h. der Pfeil der Biegung beträgt unter den gegebenen Bedingungen 9,4 mm.

Hilfsrechnung.

$$\begin{aligned}
\log 12{,}6 &= 1{,}1003705 \\
+\log 16 &= 1{,}2041200 \\
\log 180 = 2{,}2552725 \cdot 3 &= 6{,}7658175 \\
&\overline{\ 9{,}0703080\ } \\
\log 500 = 2{,}6989700 \quad &- 8{,}0969100 \\
\cdot 3 \qquad &\overline{\ 0{,}9733980\ } \\
\overline{8{,}0969100} \qquad &
\end{aligned}$$

mithin:
num-log $s_1 = 9{,}406$

Aufgabe 84. Es sei $l = 500$ cm der Abstand der Unterlagen eines horizontal aufliegenden Balkens von Tannenholz, dessen Breite $b = 20$ cm, dessen Höhe $h = 20$ cm und dessen Gewicht 240 kg beträgt.

a). Welches Gewicht kann derselbe unter Berücksichtigung seines Eigengewichts auf die Dauer mit Sicherheit tragen, wenn S = 60 kg pro □ cm genommen wird?

b). Welche Last kann derselbe Balken in seiner Mitte noch aufnehmen, wenn sich bereits in 30 cm vom einen Ende eine Belastung von 300 kg, in der Entfernung von 40 cm vom andern Ende eine Belastung von 400 kg befindet?

Auflösung. a). Es ist im vorliegenden Fall die Gleichung 2). auf Seite 125 zu Grunde zu legen, wonach

$$P = \frac{4QS}{l} - \frac{1}{2} G$$

oder:

$$P = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{bh^2 S}{l} - \frac{1}{2} G$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{2 \cdot 20 \cdot 20^2 \cdot 60}{3 \cdot 500} - 120$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$P = 520 \text{ kg.}$$

b). Ist der Balken aber bereits durch andere Gewichte auf Biegung in Anspruch genommen, welche nicht im Mittelpunkt angreifen, so muss zunächst nach Gleichung 2). Seite 128 der Druck berechnet werden, den diese Gewichte auf den Mittelpunkt ausüben. Die Gleichung lautet:

Hilfsrechnungen.

1). $$\frac{2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 60}{3 \cdot 500} - 120 = \frac{960000}{1500} - 120 =$$

$$\begin{aligned}
&640 \\
&-120 \\
&\overline{= 520}
\end{aligned}$$

$$D = \frac{2 P_1 s_1 + 2 P_2 (l - s_2)}{l} + \frac{1}{2} G$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt und berücksichtigt, dass $\frac{1}{2}$ G bereits bei Berechnung der Grösse P in Rechnung gebracht wurde:

$$D = \frac{2 . 300 . 30 + 2 . 400 . 40}{500}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$D = 100$$

d. h. die beiden Gewichte wirken bereits derart, dass sie einem im Mittelpunkt angreifenden Gewicht von 100 kg entsprechen und es dürfen somit nicht mehr 520, sondern nur noch

$$520 - 100 = 420 \text{ kg}$$

im Mittelpunkt angebracht werden.

NB. Wenn bei Berechnung des Drucks D das Eigengewicht mit berücksichtigt wird, dann ist D = 100 + 120 oder D = 220; es muss dann aber dieser Wert nicht von dem oben berechneten P = 520 kg, sondern von P = 640 kg (ohne Rücksicht des Eigengewichts) subtrahiert werden, wodurch sich derselbe Wert:

640 — 220 = 420 kg ergibt.

2). $\frac{2.300.30 + 2.400.40}{500} = \frac{18000 + 32000}{500} = \frac{180 + 320}{5} = 100$

Aufgabe 85. a). Es soll mit Rücksicht auf das eigene Gewicht der Durchmesser einer gusseisernen cylindrischen Welle gefunden werden, welche in Zapfenlagern liegt, die um 5,65 m von einander abstehen und in der Mitte mit einem 16 Zentner schweren Rad belastet ist.

b). Welche Stärke würde die Welle unter sonst gleichen Umständen haben müssen, wenn das Rad nicht in der Mitte angebracht, sondern von dem einen Lager 1,90 m, also vom andern 3,75 m entfernt wäre?

(S soll wegen der möglichen Erschütterungen zu nur 450 kg pro □ cm in Rechnung gestellt werden); $\gamma = 7{,}6$.

Erkl. 149. Radwellen müssen vor starken Biegungen bewahrt bleiben, einesteils weil diese, während der Umdrehung fortdauernd andere Stellen der Walze ergreifend, eine baldige Störung des Zusammenhangs notwendig herbeiführen würden; andernteils um eine Verrückung des Schwerpunkts aus der Achse möglichst zu verhüten. Hierzu kommt noch, dass die Wellzapfen, welche so befestigt sein müssen, dass ihre Achsen mit der der Welle in einer geraden Linie zusammenfallen, durch starke Biegungen der letzteren den Parallelismus verlieren.

Auflösung. a). Man hat zuerst, ohne Rücksicht auf das eigene Gewicht, aus der in Antwort auf Frage 93 gegebenen Formel:

$$P l = 4 Q S$$

und nach Formel 6 Seite 99:

$$Q = \frac{d^3 \pi}{32}$$

für

$$P = \frac{4 d^3 \pi S}{32 l}$$

und hieraus erhält man:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 P l}{4 \pi S}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 . 800 . 565}{4 . 3{,}14 . 450}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

A). $d = 13{,}676$ cm.

Berechnet man nun mit diesem genäherten Wert das Gewicht G der Welle, deren Querschnitt, wenn $d = 14$ cm gesetzt wird:

Hilfsrechnungen.

1). $\sqrt[3]{\frac{32 \,.\, 800 \,.\, 565}{4 \,.\, 3{,}14 \,.\, 450}} = \sqrt[3]{\frac{8 \,.\, 16 \,.\, 565}{\pi \,.\, 9}}$

$\log 8 \,.\, 16 = \log 128 = 2{,}1072100$
$+ \log 565 = 2{,}7520484$
$4{,}8592584$

$\log \pi = 0{,}4971499$
$+ \log 9 = 0{,}9542425$
$1{,}4513924$

$4{,}8592584$
$- 1{,}4513924$
$\log d^3 = 3{,}4078660$
$\cdot \frac{1}{3}$
$\log d = 1{,}1359553$

mithin:
num-log d oder $d = 13{,}676$

2). $\log 49 = 1{,}6901961$
$+ \log \pi = 0{,}4971499$
$+ \log 565 = 2{,}7520484$
$+ \log 7{,}6 = 0{,}8808136$
$5{,}7202080$
$- \log 1000 = -3{,}0000000$
$\log G = 2{,}7202080$

mithin:
num-log G oder G = 525,06

3). . $\log 8 = 0{,}9030900$
$+ \log 565 = 2{,}7520484$
$+ \log 1062{,}5 = 3{,}0263289$
$6{,}6814673$
$- 3{,}1503624$
$\log d^3 = 3{,}5311049$
$\cdot \frac{1}{3}$
$\log d = 1{,}1770350$

$\log \pi = 0{,}4971499$
$+ \log 450 = 2{,}6532125$
$3{,}1503624$

mithin:
num-log d oder $d = 15{,}033$

4). $\log 1062{,}5 = 3{,}0263289$
$+ \log 32 = 1{,}5051500$
$+ \log 190 = 2{,}2787536$
$+ \log 375 = 2{,}5740313$
$9{,}3842638$

$\log \pi = 0{,}4971499$
$+ \log 450 = 2{,}6532125$
$+ \log 565 = 2{,}7520484$
$5{,}9024108$

$9{,}3842638$
$- 5{,}9024108$
$\log d^3 = 3{,}4818530$
$\cdot \frac{1}{3}$
$\log d = 1{,}1606178$

mithin:
num-log d oder $d = 14{,}475$

$$\frac{14^2 \,.\, \pi}{4} = 49\pi$$

Quadratcentimeter beträgt, so erhält man:

$$G = \frac{49\pi \,.\, 565 \,.\, 7{,}6}{1000} \text{ kg}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$G = 525 \text{ kg}.$$

Es muss daher zur Berechnung von d die Formel 2 Seite 125:

$$P + \frac{1}{2} G = \frac{4 QS}{l}$$

oder für $Q = \frac{d^3\pi}{32}$ eingesetzt:

$$P + \frac{1}{2} G = \frac{4 d^3 \pi S}{32 l}$$

zu Grunde gelegt werden, und so ergibt sich für

$$d = \sqrt[3]{\frac{8l\,(P + \frac{1}{2} G)}{\pi \,.\, S}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{8 \,.\, 565\,(800 + 262{,}5)}{\pi \,.\, 450}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 3).:

B). $d = 15$ cm.

b). Wäre das Rad nicht in der Mitte angebracht, sondern von dem einen Lager um 190 und vom andern um 375 cm entfernt, so würde die Stärke der Welle nach der Formel 1 Seite 125:

$$P = QS \frac{l}{l_1 l_2} - \frac{1}{2} G$$

zu berechnen sein. Setzen wir statt

$$Q = \frac{d^3 \pi}{32}$$

ein und reduzieren die Gleichung auf d, so ergibt sich:

$$d = \sqrt[3]{\frac{(P + \frac{1}{2} G)\, 32 \,.\, l_1 l_2}{\pi \,.\, S \,.\, l}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{1062{,}5 \,.\, 32 \,.\, 190 \,.\, 375}{\pi \,.\, 450 \,.\, 565}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 4).:

$$d = 14{,}5 \text{ cm}.$$

Aufgabe 86. Welchen Durchmesser und welche Länge müssen die gusseisernen Zapfen einer horizontalen Wasserradwelle erhalten, wenn jeder derselben einen Druck von 25 Zentner auszuhalten hat?

Hilfsrechnung.

$\sqrt{1250} =$	$35{,}35 \,.\, 0{,}18$
9	28280
6\|350	3535
325	6,3630
70\|2500	
2109	
706\|39100	

Erkl. 150. Die Wellzapfen sind kurze cylindrische Stäbe, deren Befestigung an Wellen von Holz aus der nebenstehenden Figur 140 ersichtlich ist. Der Zapfen sitzt auf einer eisernen Platte, die in eine zu diesem Zweck in den Wellbaum eingestemmte Oeffnung eingetrieben, mittels eiserner Ringe festgehalten und durch die Keile *b b* gerichtet wird. Bei gusseisernen Wellen findet man die Zapfen häufig angegossen. Sind die Wellen hohl gegossen, so sitzen ihre Zapfen auf besonderen Platten, die an dem hohlen Cylinder festgeschraubt werden. Zuweilen ruhen die Zapfen in offenen Pfannen, häufiger in geschlossenen Lagern. Es ist einleuchtend, dass durch den Gegendruck der Unterlage die elastische Widerstandsfähigkeit des Zapfens in Anspruch genommen wird. Im äussersten Falle würde er daher an der Befestigungsstelle abbrechen. Seine Dicke soll jedoch so ermessen sein, dass weder der Bruch noch überhaupt eine die Regelmässigkeit der Umdrehung irgendwie störende Biegung eintreten kann.

Da der Zapfen eine merkliche Biegung nicht gestatten darf, so ist anzunehmen, dass er seiner ganzen Länge nach sein Lager berührt. Sollte dies in irgend einem Falle anfangs nicht so sein, so werden doch die stärker gedrückten Stellen sich im Gebrauche bald so weit abreiben, dass die Last über den aufliegenden Teil des Zapfens sich gleichförmig verteilen kann. Die Mitte der Zapfenlänge darf daher in der Regel als die Angriffsstelle des Drucks betrachtet werden. Mit Rücksicht auf besonders ungünstige Umstände, wie Klemmungen, die vorzugsweise das freie Zapfenende treffen könnten, dürfte es gleichwohl in vielen Fällen geboten sein, die ganze Zapfenlänge als Hebelarm der biegenden Kraft in Rechnung zu nehmen. Ist auch die letztere, der Druck P bekannt, so bietet sich die Formel 7 Seite 99:

$$P = \frac{d^3 \pi S}{32 l}$$

zur Bestimmung der Zapfendicke; oder wenn

Auflösung. Mit Hilfe der in nebenstehender Erklärung 150 gegebenen Formel 2 lässt sich die gestellte Aufgabe leicht berechnen. Es sind 25 Zentner = 1250 kg und somit:

$$d = 0{,}18 \sqrt{1250}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$d = \text{ca. } 6\frac{1}{2} \text{ cm.}$$

Dabei ist die Länge des Zapfens;

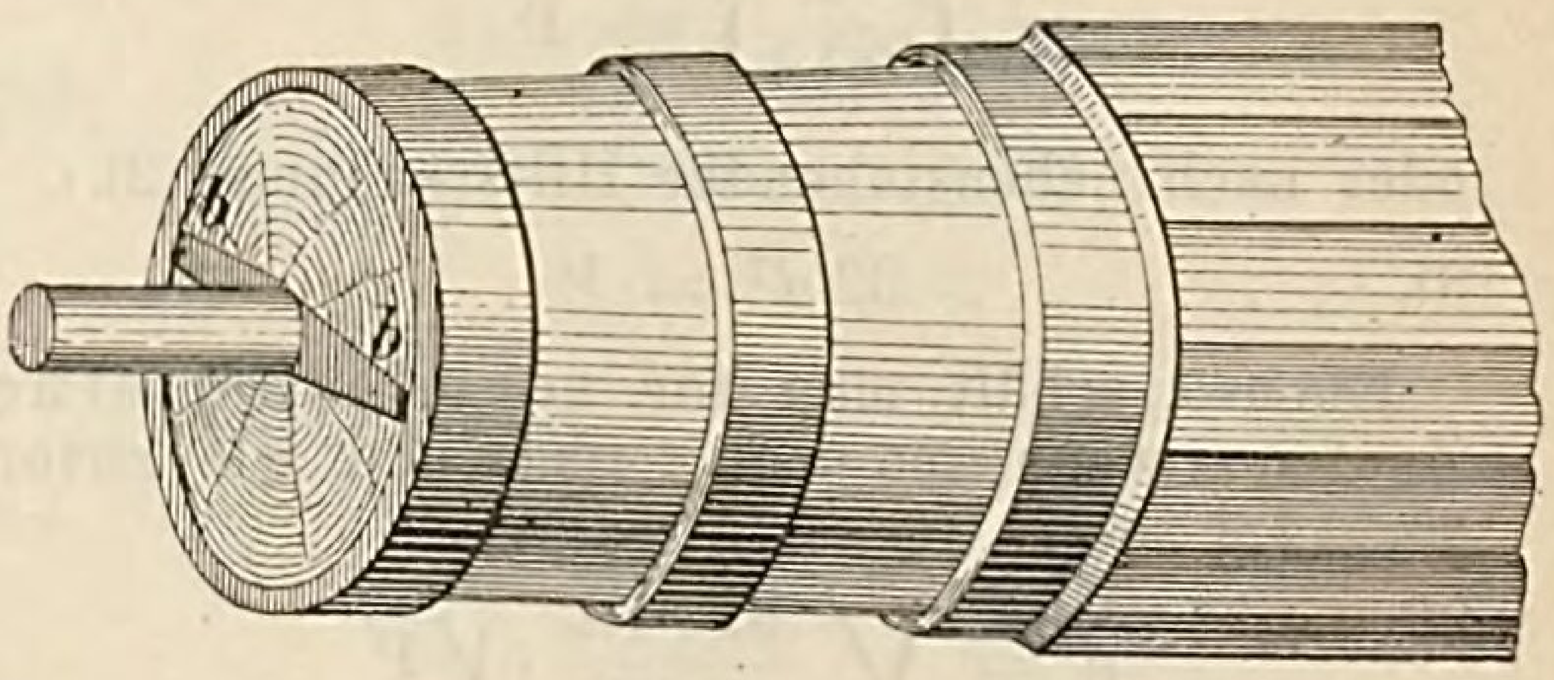
$$l = ed = 1{,}2 \,.\, 6{,}5$$

oder:

$$l = 7{,}8 \text{ oder rund } 8 \text{ cm voraus-}$$

gesetzt.

Figur 140.



man das Verhältnis zwischen Länge und Durchmesser $\frac{l}{d} = e$ setzt,

$$P = \frac{d^2 \pi S}{32 e}$$

woraus allgemein

$$d = \sqrt{\frac{32 e P}{\pi S}}$$

oder

$$1). \quad \ldots\ldots \quad d = \sqrt{\frac{32 e}{\pi S}} \cdot \sqrt{P}$$

folgt.

Ist nun das Material Gusseisen, und nimmt man wegen der möglichen Erschütterungen, wie sie bei Wasserradwellzapfen vorkommen, für den Sicherheitskoeffizient S = 375, sowie nach guten Mustern $e = 1{,}2$, so erhält man aus der obigen Formel 1:

$$d = \sqrt{\frac{32 \,.\, 1{,}2}{\pi \,.\, 375}} \cdot \sqrt{P}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$2). \quad \ldots\ldots \quad d = 0{,}18 \sqrt{P}$$

und umgekehrt:

$$\frac{d}{0{,}18} = \sqrt{P}$$

oder:

$$\left(\frac{d}{0{,}18}\right)^2 = P$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$3). \quad \ldots\ldots \quad 32\, d^2 = P$$

Ebenso erhält man für schmiedeeiserne Zapfen, wenn man S = 600 und wie zuvor $e = 1{,}2$ setzt:

$$d = \sqrt{\frac{32 \,.\, 1{,}2}{\pi \,.\, 600}} \cdot \sqrt{P}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 3).:

$$4). \quad \ldots\ldots \quad d = 0{,}15 \sqrt{P}$$

und

$$5). \quad \ldots\ldots \quad P = 45\, d^2$$

Aus dem Werte von d^2 folgt, dass die Zapfen um so schwächer gemacht werden können, je kleiner $\frac{l}{d}$ genommen wird. Anderseits ist aber eine grosse Auflagefläche bei schnell umlaufenden Zapfen vorteilhaft, um die Erhitzung und Abnutzung soviel als möglich zu verhindern und die entstehenden Schwingungen besser abzuleiten. Endlich wächst die Arbeit des Reibungswiderstandes mit dem Durchmesser, so dass es hiernach wieder zweckmässig erscheint, Zapfen mit geringerem Durchmesser zu verwenden. Diesen teilweise widersprechenden Bedingungen kann nur dadurch abgeholfen werden, dass man bewährte Konstruktionen aus der Praxis als Ausgangspunkt für die Aufstellung der notwendigen Formeln benutzt.

Hilfsrechnungen.

$$1). \quad \sqrt{\frac{32 \,.\, 1{,}2}{\pi \,.\, 375}} \cdot \sqrt{P} = \sqrt{\frac{38{,}4}{\pi \,.\, 375}} \cdot \sqrt{P}$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0{,}4971499 \\ +\log 375 &= 2{,}5740313 \\ &\ 3{,}0711812 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 38{,}4 &= 1{,}5843312 \\ &\ -3{,}0711812 \\ &\ 0{,}5131500-2 \\ &\ \cdot \tfrac{1}{2} \\ \log \sqrt{\ } &= 0{,}2565700-1 \end{aligned}$$

mithin:

num-log $\sqrt{\ }$ = 0,18054

$$2). \quad 100 : 18 = 5{,}6, \text{ also } \frac{d}{0{,}18} = 5{,}6\, d$$

$$\begin{array}{r} 5{,}6 \,.\, 5{,}6 \\ \hline 336 \\ 280 \\ \hline 31{,}36 = \text{ca. } 32 \end{array}$$

$$3). \quad \sqrt{\frac{38{,}4}{\pi \,.\, 600}} = \begin{aligned} \log \pi &= 0{,}4971499 \\ +\log 600 &= 2{,}7781513 \\ &\ 3{,}2753012 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 38{,}4 &= 1{,}5843312 \\ &\ -3{,}2753012 \\ &\ 0{,}3090300-2 \\ &\ \cdot \tfrac{1}{2} \\ &\ 0{,}1545150-1 \end{aligned}$$

mithin:

num-log = 0,14273 oder rund 0,15

Für gewöhnliche Verhältnisse, wo die Anzahl n der Umdrehungen geringer als 150 ist, nehme man $\frac{l}{d} = \frac{5}{4}$ bis $\frac{3}{2}$, bei Zapfen, die nicht dauernd umlaufen, wie die von Krahnen, Winden, Rollen ist $\frac{l}{d}$ zweckmässig $= 1$ und bei Zapfen, die mehr als 150 Umdrehungen machen, setze man $\frac{l}{d} = 2$.

Aufgabe 87. Die Zähne eines gusseisernen Rades sind 60 mm lang, 40 mm hoch und 120 mm breit. Der Zahndruck ist 1600 kg. Wie gross ist die Beanspruchung der Zähne?

Erkl. 151. Für die Zähne oder Kämme, welche bei Stirnrädern auf den äusseren Umfang des Radkranzes, bei Kron- und Kammrädern auf der Kranzebene eingesetzt werden, hat man, je nachdem der Kammstiel vierkantig oder rund ist, die Formel 16 Seite 82:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^2 S}{l}$$

oder Formel 7 Seite 99:

$$P = \frac{d^3 \pi S}{32 l}$$

oder:

$$P = 0{,}098 \cdot \frac{S d^3}{l}$$

anzuwenden und dabei unter b die Breite nach der Richtung der Achse, unter h die Dicke des Zahns im Teilkreis gemessen, und unter l den Abstand dieses Teilkreises von der Wurzel des Zahns, wo dieser am Radkranz aufsitzt, zu verstehen und bei hölzernen Zähnen für S nur den 10. Teil des Brechungskoeffizienten zu nehmen.

Auflösung. Nach Formel 16 Seite 82 ist

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^2 S}{l}$$

und hieraus ergibt sich für die unbekannte Grösse:

$$S = \frac{6 P l}{b h^2}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$S = \frac{6 . 1600 . 60}{120 . 40^2}$$

oder:

$$S = 3 \text{ kg pro } \square \text{ mm}$$

oder:

$$S = 300 \quad „ \quad \square \text{ cm.}$$

Aufgabe 88. Ein Balken aus Eichenholz, der 6 m lang, 20 cm hoch und 16 cm breit ist und mit seinen beiden Enden frei aufliegt, soll in der Mitte ein Gewicht tragen, welches ihn daselbst nicht mehr als 2 cm senkt. Wie gross ist dieses Gewicht zu nehmen?

(E = 120000 pro $\square$ cm.)

Auflösung. Nach Gleichung 4). Seite 131 ist für den vorliegenden Fall der Pfeil der Biegung:

$$s = \frac{P l^3}{48 E T}$$

oder für $T = \frac{1}{12} b h^3$ [s. Gleich. 14). Seite 82] eingesetzt:

$$s = \frac{P l^3}{4 E b h^3}$$

und hieraus erhält man für die unbekannte Grösse:

$$P = \frac{4 E b h^3 s}{l^3}$$

Hilfsrechnung.

$$\frac{4.120000.16.20.20.20.2}{600.600.600} = \frac{4.16.20.2.2}{3.3}$$

$$64.80 : 9$$
$$= 5120 : 9 = 569$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte in cm resp. in Bezug auf Centimeter eingesetzt:

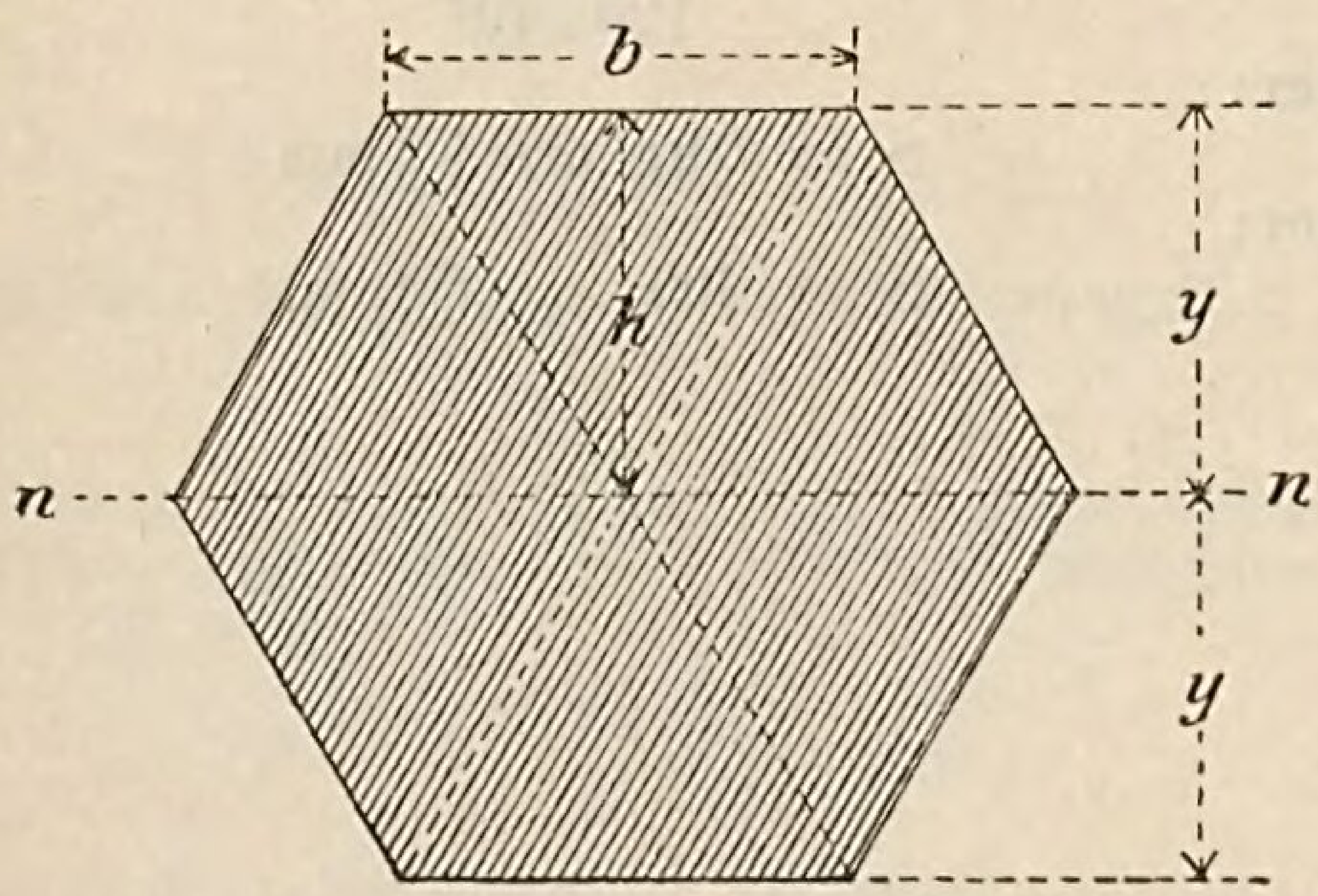
$$P = \frac{4.120000.16\ 20.20.20.2}{600.600.600}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$P = \text{ca. } 570 \text{ kg.}$$

Aufgabe 89. Ein Gusseisenstab ($\gamma = 7{,}4$) von regulär-sechsseitigem Querschnitt (siehe Fig. 141) ist einseitig eingemauert. Derselbe ist 5 m lang frei und der Querschnitt hat eine Seitenlänge von $b = 5$ cm Wie gross ist a). die grösste Spannung s_1 an der Befestigungsstelle auf der Zugseite, b). wie gross ist dieselbe s_2 auf der Druckseite und c). wie lang muss der Stab genommen werden, ehe er durch sein eigenes Gewicht bricht, wenn der Festigkeitsmodulus S = 3200 kg pro □ cm gerechnet wird?

Figur 141.



Hilfsrechnungen.

1). 6 . 0,433 . 25
2,598 . 25
12990
5196
64,95

2). . . $\frac{64{,}95 . 500 . 7{,}4}{1000} = \frac{64{,}95\ 3{,}7}{45465}$
19485
240,315

Auflösung. Zunächst ist das Eigengewicht des Stabes zu berechnen. Wenn wir uns die sechseckige Querschnittsfläche von ihrem Mittelpunkt aus in sechs Dreiecke zerlegt denken, so lässt sich mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes leicht nachweisen, dass der Flächeninhalt eines jeden solchen Dreiecks:

$$F = 0{,}433 . b^2$$

und somit die Gesamtsechsecksfläche:

$$F = 6 . 0{,}433 . b^2$$

oder im vorliegenden Fall:

$$F = 6 . 0{,}433 . 25$$

oder:

$$F = 64{,}95 \ \square \text{cm}$$ (s. Hilfsrechn. 1).

beträgt.

Da die Länge des Stabes zu 5 m angegeben ist, so beträgt das Volumen

$$V = 64{,}95 . 500 \text{ ccm}$$

und da jeder Kubikcentimeter Gusseisen = 7,4 Gramm wiegt, so ist das Gesamtgewicht des freien Stabes:

$$G = \frac{64{,}95 . 500 . 7{,}4}{1000}$$

oder:

$$G = 240 \text{ kg}$$ (s. Hilfsrechn. 2).

Nun ist nach Formel 1 Seite 118:

$$Pl = 2QS$$

und nach Formel 44 Seite 94:

$$Q = \frac{5}{8} b^3$$

also:

$$Pl = \frac{2 . 5 . b^3 S}{8}$$

oder:

$$S = s_1 = \frac{8 Pl}{10 b^3}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$s_1 = \frac{8 . 240 . 500}{10 . 125}$$

oder:

$$s_1 = 768 \text{ kg}$$ (s. Hilfsrechn. 3).

3). . . $\frac{8 \cdot 240 \cdot 500}{10 \cdot 125} = 8 \cdot 24 \cdot 4 = 8 \cdot 96 = 768$

4). . . $\frac{10 \cdot 125 \cdot 3200}{8 \cdot 240} = \frac{125 \cdot 50}{3} = \frac{6250}{3} = 2083$

b). Da der Querschnitt symmetrisch ist, so sind die Zug- und Druckspannungen an den äussersten Fasern s_1 und s_2 einander gleich, also ist auch

$$s_2 = 768 \text{ kg}.$$

c). Reduzieren wir die obige Gleichung:

$$P l = \frac{10 b^3 S}{8}$$

auf l, so ist:

$$l = \frac{10 b^3 S}{8 P}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$l = \frac{10 \cdot 125 \cdot 3200}{8 \cdot 240}$$

oder:

$$l = 2083 \text{ cm (s. Hilfsrechn. 4).}$$

oder:

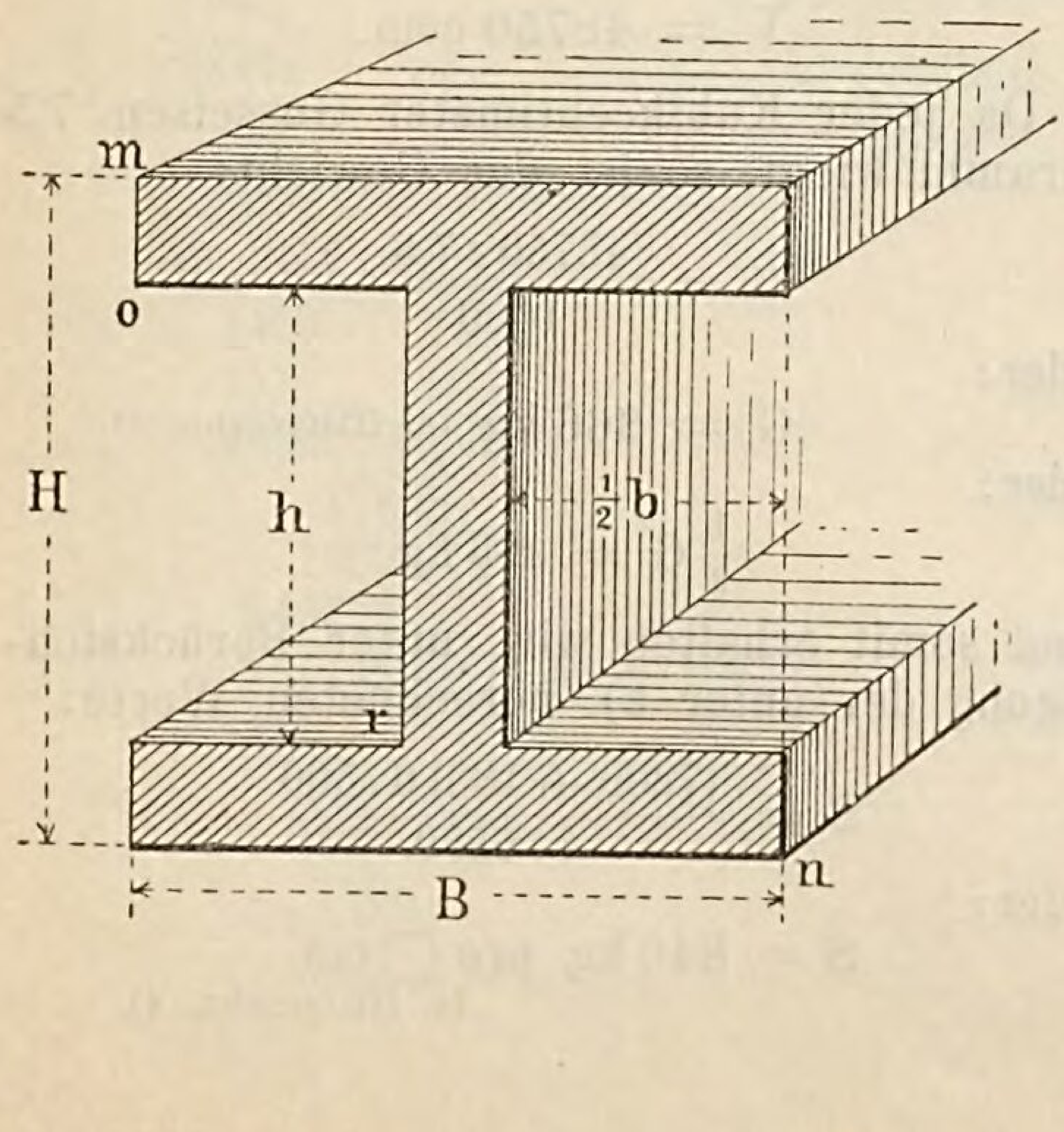
$$l = \text{ca. } 21 \text{ m}$$

ist die Länge, bei welcher unter den angenommenen Verhältnissen der Stab infolge seines Eigengewichts an der Befestigungsstelle bricht.

Aufgabe 90. An einem an den Enden frei aufliegenden, 5 m langen Träger von T-Eisen (s. Fig. 142) hängt eine Last von 9000 kg auf jeder Seite 1 m vom Stützpunkt entfernt. Das Profil hat eine Höhe von 360 mm, eine Breite von 143 mm, eine Stegdicke von 13 mm und die Rippenstärke ist 19,5 mm. Es soll die Beanspruchung pro □ cm berechnet werden, a). ohne, b). mit Berücksichtigung des Eigengewichts.

($\gamma = 7{,}5$)

Figur 142.



Auflösung. a). Die in den beiden Punkten $b\,b$ wirkenden Lasten von je 9000 kg sind je 1 m von den Punkten $a\,a$ entfernt und da die ganze Stablänge 5 m beträgt, so ist die Entfernung von b und $m = 1\frac{1}{2}$ m, folglich

$$\overline{ab} : \overline{bm} = 2 : 3$$

und somit übt auf jeder Seite die Last von 9000 kg auf Punkt a einen Druck von $\frac{3}{5} \cdot 9000 = 5400$ und auf m einen Druck von $\frac{2}{5} \cdot 9000 = 3600$, so dass die beiden Lasten von je 9000 kg in den Punkten $b\,b$ angreifend, so wirken, als wenn $2 \cdot 3600 = 7200$ kg in m angebracht wären. Wir benutzen deshalb zur Berechnung die Gleichung 1). Seite 124:

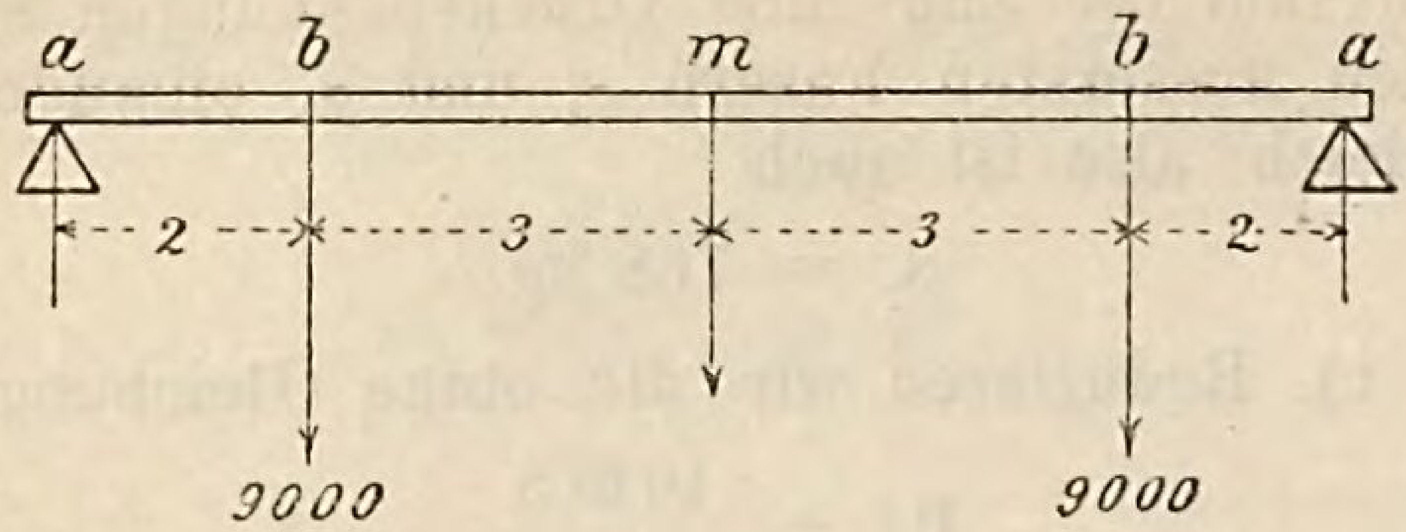
$$P l = 4 Q S$$

und da für einen an dem einen Ende befestigten und am andern Ende belasteten Stab vom Querschnitt Fig. 142 nach Gleichung 28 c). Seite 87:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{S}{l} \left(B H^2 - \frac{b h^3}{H} \right)$$

beträgt, so ist für denselben in der Mitte mit $P = 7200$ kg belasteten und an beiden Enden gestützten Stab:

Figur 143.



Hilfsrechnungen.

1). $$S = \frac{6 \,.\, 7200 \,.\, 500}{4\left[14{,}3 \,.\, 36^2 - \frac{(14{,}3 - 1{,}3)(36 - 2 \,.\, 1{,}95)^3}{36}\right]}$$

$$S = \frac{6 \,.\, 1800 \,.\, 500}{\left(14{,}3 \,.\, 36^2 - \frac{13 \,.\, 32{,}1^3}{36}\right)}$$

14,3 . 36 . 36
216
108
14,3 . 1296
3888
5184
1296
18532,8

13 . 32,1 . 32,1 . 32,1
417,3 321
642
963
417,3 . 1030,41
309123
721287
103041
412164
429990,093

$$S = \frac{5400000}{18532{,}8 - \frac{429990}{36}}$$

429990 : 36 = 11944
69
339
324
159
144
150

18532,8
— 11944
6589

$$S = \frac{5400000}{6589}$$

5400000 : 6589 = 820
52712
12880
12178
9020

2). . . F = 14,3 . 36 — 13 . 32,1
F = 514,8 — 417,3
F = 97,5 □ cm

$$P = \frac{4}{6} \cdot \frac{S}{l}\left(BH^2 - \frac{bh^3}{H}\right)$$

und hieraus erhält man für

$$S = \frac{6Pl}{4\left(BH^2 - \frac{bh^3}{H}\right)}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte und zwar alle Masse in cm eingesetzt:

$$S = \frac{6 \,.\, 7200 \,.\, 500}{4\left[14{,}3 \,.\, 36^2 - \frac{(14{,}3 - 1{,}3)(36 - 2 \,.\, 1{,}95)^3}{36}\right]}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

A). . . . S = 820 kg pro □ cm.

b). Soll das Eigengewicht mit in Rechnung gebracht werden, so ist die Gleichung:

$$P + \frac{1}{2} G = \frac{4QS}{l}$$

zu benutzen oder unter Berücksichtigung der Gleichung 28c). Seite 87:

$$P + \frac{1}{2} G = \frac{4S}{6l}\left(BH^2 - \frac{bh^3}{H}\right)$$

oder:

$$S = \frac{6l\left(P + \frac{1}{2} G\right)}{4\left(BH^2 - \frac{bh^3}{H}\right)}$$

Es ist nun zunächst die Querschnittsfläche

$$F = BH - bh$$

oder:

$$F = 14{,}3 \,.\, 36 - (14{,}3 - 1{,}3) \,.\, (36 - 2 \,.\, 1{,}95)$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

F = 97,5 □ cm.

Die Länge beträgt 500 cm und somit das Volumen

$$V = 97{,}5 \,.\, 500$$

oder:

$$V = 48750 \text{ ccm.}$$

Da jeder Kubikcentimeter Gusseisen 7,5 Gramm wiegt, so ist das Gewicht:

$$G = \frac{48750 \,.\, 7{,}5}{1000}$$

oder:

G = 366 kg (s. Hilfsrechn. 3).

oder:

$$\frac{1}{2} G = 183 \text{ kg}$$

und somit erhalten wir, unter Berücksichtigung der unter a). berechneten Werte:

$$S = \frac{(7200 + 183)\, 6 \,.\, 500}{4 \,.\, 6589}$$

oder:

S = 840 kg pro □ cm.
(s. Hilfsrechn. 4).

3). $\frac{7{,}5 \,.\, 48750}{1000} = \frac{0{,}3 \,.\, 4875}{4} =$

1462,5 : 4 = 365,6 kg
26
22
25

4). 7200
+ 183
7383 . 6 . 500
= 7383 . 3000
= 22149000 : 4 = 5537250
5537250 : 6589 = 840
52712
26605
26356
2490

Aufgabe 91. Eine hohle gusseiserne Walze, die in der Länge $l = 1{,}5$ m an beiden Enden gestützt ist, deren äusserer Durchmesser D = 20 cm und deren innerer Durchmesser $d = 14$ cm beträgt, kann a). welche Last in ihrer Mitte tragen, wenn $S = 633\frac{1}{3}$ kg pro □ cm, b). welche Biegung erleidet dieselbe, wenn E = 1300000 angenommen wird?

Hilfsrechnungen.

1). $20^4 = 160000$
14 . 14 . 14 . 14 = 38416
196 . 196 121584
1176
1764
196
38416

$$S = \frac{4 \,.\, 1900 \,.\, 3{,}14 \,.\, 121584}{3 \,.\, 32 \,.\, 150 \,.\, 20}$$

oder entsprechend gehoben:

$$S = \frac{19 \,.\, 1{,}57 \,.\, 5066}{15}$$

19 . 1,57 . 5066
1413
157
29,83 . 5066
17898
17898
149150
151118,78 : 15 = 10074
15
111
105
60
80

Auflösung. a). Die Tragfähigkeit ist im vorliegenden Fall viermal so gross, als wenn die Walze an einem Ende befestigt und am andern belastet wäre, also mit Bezug auf Gleichung 3). Seite 101:

$$P = \frac{4\,S \,.\, \pi}{32\,l} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{4 \,.\, 1900 \,.\, 3{,}14}{3 \,.\, 32 \,.\, 150} \cdot \frac{(20^4 - 14^4)}{20}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$P = 10000 \text{ kg.}$$

b). Nach Gleichung 4). auf Seite 131 ist im vorliegenden Fall der Pfeil der Biegung:

$$s = \frac{P\,l^3}{48\,E\,T}$$

oder da nach Gleichung 1). auf Seite 101:

$$T = \frac{1}{64}\,\pi\,(D^4 - d^4)$$

so ist:

$$s = \frac{4\,P\,l^3}{3\,E\,\pi\,(D^4 - d^4)}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

2). . . $s = \frac{4 . 10000 . 150 . 150 . 150}{3 . 1300000 . 3{,}14 . 121584}$

oder entsprechend gehoben:

$$s = \frac{5 . 150 . 150}{13 . 3{,}14 . 30396} = \frac{5 . 22500}{13 . 3{,}14 . 30396}$$

```
13 . 3,14 . 30396
  40,82 . 30396
          60792
         243168
        1215840
     1240764,72 | 112500
```

oder:

$$1240765 : 11250000 = 0{,}09 \text{ cm}$$

```
11166885
   83115
```

$$s = \frac{4 . 10000 . 150^3}{3 . 1300000 . 3{,}14 \, (20^4 - 14^4)}$$

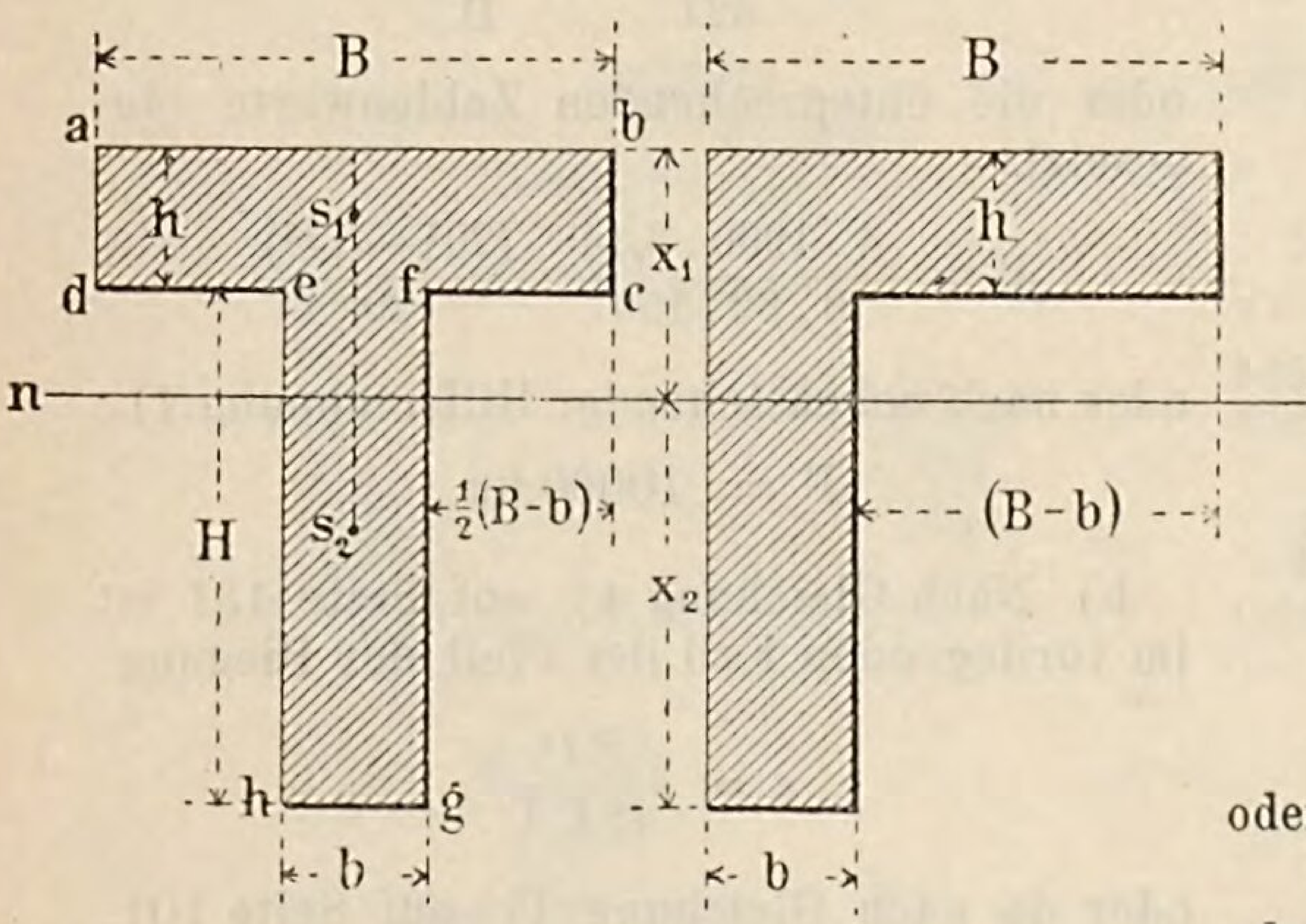
oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$s = 0{,}9 \text{ mm}.$$

Aufgabe 92. Wie gross ist die Flanschenbreite eines gusseisernen Trägers oder die Breite B der Querrippe zu nehmen, wenn nebenstehender Querschnitt ein solcher von gleicher Festigkeit werden soll, wenn die Dimensionen durch die Rippenstärke b ausgedrückt werden sollen, die Höhe des Querschnitts $14 b$ und die Höhe der Querrippe $h = 1{,}5 b$ beträgt?

Wie gross ist b). das Trägheitsmoment und c). wie gross sind die Widerstandsmomente?

Figur 144. Figur 145.



Hilfsrechnungen.

1). . . $f_1 = \text{Rechteck } ac = x . 1{,}5 b$
$f_2 = \quad „ \quad eg = (14 b - 1{,}5 b) . b$

also ist die linke Seite der nebenstehenden Gleichung: $3{,}5 b \, (1{,}5 b x + 12{,}5 b^2)$

Der Abstand y_1 des Schwerpunkts vom Rechteck ac von der Kante ab beträgt:

Auflösung. a). Nach Antwort auf Frage 133 ist bei Gusseisen die Gesamthöhe $= 14 b$ im Verhältnis von $1 : 3$ zu teilen, so dass:

$$x_1 = \frac{1}{4} \cdot 14 b = 3{,}5 b$$

und:

$$x_2 = \frac{3}{4} \cdot 14 b = 10{,}5 b$$

in Rechnung zu bringen ist. Nun ist nach Erkl. 137 und Gleichung 12). auf Seite 80:

$$x_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 14 b = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + \cdots f_n y_n}{f_1 + f_2 + \cdots f_n}$$

oder:

$$3{,}5 b \, (f_1 + f_2 + \cdots f_n) = f_1 y_1 + f_2 y_2 \cdots + f_n y_n$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$3{,}5 b \, (1{,}5 b x + 12{,}5 b^2) = 1{,}5 b x . 0{,}75 b + 12{,}5 b^2 . 7{,}75 b$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$5{,}25 b^2 x + 43{,}75 b^3 = 1{,}125 b^2 x + 96{,}875 b^3$$

oder:

$$b^2 x \, (5{,}25 - 1{,}125) = b^3 \, (96{,}875 - 43{,}75)$$

oder:

$$x \, (5{,}25 - 1{,}125) = b \, (96{,}875 - 43{,}75)$$

oder:

$$4{,}125 x = 53{,}125 b$$

oder:

$$x = \frac{53{,}125 b}{4{,}125}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 3).:

$$x = 12{,}8 b = B$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1{,}5b = 0{,}75b$$

und somit ist:

$$f_1 y_1 = 1{,}5bx \,.\, 0{,}75b$$

Der Abstand y_2 des Schwerpunkts des Rechtecks eg von der Kante ab ist:

$$\frac{1}{2} \cdot (14b - 1{,}5b) + 1{,}5b = \frac{1}{2} \cdot 12{,}5b + 1{,}5b = 7{,}75b$$

und somit:

$$f_2 y_2 = 12{,}5b^2 \,.\, 7{,}75b$$

also ist die rechte Seite der nebenstehenden Gleichung:

$$1{,}5bx \,.\, 0{,}75b + 12{,}5b^2 \,.\, 7{,}75b$$

2). . . $\frac{3{,}5b \,.\, 1{,}5bx}{= 5{,}25b^2x}$; $\frac{3{,}5b \,.\, 12{,}5b^2}{= 43{,}75b^3}$

$\frac{1{,}5bx \,.\, 0{,}75b}{= 1{,}125b^2x}$; $\frac{12{,}5b^2 \,.\, 7{,}75b}{= 96{,}875b^3}$

3). 53125 : 4125 = 12,8
4125
11875
8250
36250
33000

4). $(3{,}5b)^3 \,.\, 12{,}8b = 3{,}5 \,.\, 3{,}5 \,.\, 3{,}5 \,.\, 12{,}8b^4$
175 640
105 384
12,25 . 44,80
9800
4900
4900
$548{,}800\,b^4$

$b\,(10{,}5b)^3 = b \,.\, 10{,}5 \,.\, 10{,}5 \,.\, 10{,}5b^3$
525
105
110,25 . 10,5
55125
11025
$1157{,}625\,b^4$

5). $(12{,}8b - b)\,(3{,}5b - 1{,}5b)^3 = 11{,}8b\,(2b)^3 = 11{,}8b \,.\, 8b^3 = 94{,}4b^4$

548,8
+ 1157,625
1706,425
— 94,4
1612,025 : 3 = 537,6
11
23

6). 5376 : 35 = 153,6
35
187
175
126
105
210

153,6 : 3 = 51,2

b). Das Trägheitsmoment des Querschnitts ist nach Gleichung 34). auf Seite 90:

$$T = \frac{1}{3}\left[Bx_1^3 + bx_2^3 - (B - b)\,(x_1 - h)^3\right]$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$T = \frac{1}{3}\left[12{,}8\,b\,(3{,}5\,b)^3 + b\,(10{,}5\,b)^3 - (12{,}8b - b)\,(3{,}5\,b - 1{,}5\,b)^3\right]$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 4).:

$$T = \frac{1}{3}\left(548{,}8\,b^4 + 1157{,}625\,b^4 - 94{,}4\,b^4\right)$$

oder nach Hilfsrechnung 5).:

$$T = 537{,}6\,b^4$$

c). Die Widerstandsmomente sind:

$$Q_1 = \frac{T}{3{,}5b}$$

und:

$$Q_2 = \frac{T}{10{,}5b}$$

oder:

$$Q_1 = \frac{537{,}6\,b^4}{3{,}5\,b}$$

und:

$$Q_2 = \frac{537{,}6\,b^4}{10{,}5\,b}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 6).:

$$Q_1 = 153{,}6\,b^3$$

und:

$$Q_2 = 51{,}2\,b^3$$

Aufgabe 93. Ein Freiträger (d. h. ein Träger, der nur mit einem Ende befestigt, mit dem andern frei ist) sei 1 m lang und mit 2000 kg gleichmässig belastet, wie gross sind die Dimensionen des in Fig. 144 resp. 145 gegebenen Profils zu nehmen?

(S für Druck = 900, für Zug = 300.)

Hilfsrechnungen.

1). . . . $\frac{2000 . 100}{2 . 300} = \frac{1000}{3} = 333\frac{1}{3}$

2).
$$\begin{aligned} \log 333{,}3 &= 2{,}5228353 \\ -\log 153{,}6 &= 2{,}1863912 \\ &\overline{\ 0{,}3364441} \\ &\quad \cdot \tfrac{1}{3} \\ \log b &= 0{,}1121480 \end{aligned}$$

mithin:
num-log b oder $b = 1{,}2946$

3).
$$\begin{aligned} \log 111{,}1 &= 2{,}0457141 \\ -\log 51{,}2 &= 1{,}7092700 \\ &\overline{\ 0{,}3364441} \\ &\quad \cdot \tfrac{1}{3} \\ &\ 0{,}1121480 \end{aligned}$$

(s. oben Hilfsrechn. 2).

Auflösung. Für einen bestimmten Fall berechnet man aus der Gleichung:

$$M = Q\,S$$

den Wert von Q und je nachdem man S für Zug oder für Druck eingesetzt hat, setzt man den erhaltenen Wert dem obigen in Auflösung der vorigen Aufgabe erhaltenen Ausdruck für Q_1 oder Q_2 gleich, woraus dann b, die Höhe des Querschnitts und die Flanschenbreite desselben folgt.

Für den vorliegenden Fall ist:

$$P\,l = 2\,Q\,S, \text{ also } Q = \frac{P\,l}{2\,S}$$

und S = 300 für Zug, folglich

$$Q = \frac{2000 . 100}{2 . 300}$$

oder:

$$Q = 333\frac{1}{3} \text{ (s. Hilfsrechn. 1).}$$

Mit Annahme des Profils (Fig. 144 resp. 145) ist nach Auflösung der obigen Aufgabe:

$$Q_1 = 153{,}6\,b^3 = Q$$

also:

$$153{,}6\,b^3 = 333{,}3$$

und somit:

$$b = \sqrt[3]{\frac{333{,}3}{153{,}6}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

b = 1,29 cm oder ca. 13 mm.

Hätten wir S für Druck = 900 in Rechnung gebracht, so würde sich ergeben haben:

$$Q = \frac{2000 . 100}{2 . 900}$$

oder:

$$Q = 111{,}1$$

und diesen Wert Q_2 aus voriger Auflösung gleichgesetzt:

$$Q_2 = 51{,}2\,b^3 = 111{,}1$$

also:

$$b = \sqrt[3]{\frac{111{,}1}{51{,}2}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 3).:

b = ca. 13 mm

also genau derselbe Wert, der sich durch die erste Rechnung ergab.

Es ist also mit Bezug auf Fig. 144 resp. 145 die Höhe des Profils:

$$14b = 14 \,.\, 13 = 182 \text{ mm}$$

und die Flanschenbreite:

$$x = B = 12{,}8\,b$$

oder:

$$B = 12{,}8 \,.\, 13$$

oder:

$$B = 166 \text{ mm.}$$

Aufgabe 94. Vier Balken aus Eichenholz sind mit einem Ende in horizontaler Lage eingemauert und sollen als Unterlage zu einem Balkon dienen. Den Boden des letzteren bilden Granitplatten von 13 cm Dicke. Die Länge der Balken sei 2 m und die Entfernung vom ersten bis zum letzten, d. h. die Länge des Balkons, sei 3 m.

Es ist die Breite und Höhe des rechteckigen Querschnitts eines Balkens zu bestimmen, und zwar soll die Breite sich zur Höhe verhalten wie 1 : 3 und jeder Balken soll die genügende Stärke besitzen, an seinem äussersten Ende eine zufällige Belastung von 350 kg zu tragen.

(Spez. Gewicht des Granit $\gamma = 2{,}8$ und der Sicherheitskoeffizient S = 60 kg.)

Hilfsrechnung 1.

$$\frac{780000 \,.\, 2{,}8}{1000} = 78 \,.\, 28$$

```
 78 . 28
 -------
     624
    156
 -------
    2184
```

Auflösung. Wir haben im vorliegenden Fall die Breite und Höhe eines Balkens zu berechnen, der mit einem Ende festgemauert, am andern Ende eine Belastung von 350 kg zu tragen im stande ist, und welcher ausserdem gleichmässig belastet ist mit dem vierten Teil vom Gewicht der Granitplatten, denn letztere werden von 4 Balken getragen.

Das Volumen der Granitplatten ist:

$$V = 200 \,.\, 300 \,.\, 13$$

oder:

$$V = 780000 \text{ ccm.}$$

Jeder Kubikcentimeter wiegt 2,8 Gramm und somit ist das Gesamtgewicht der Platten:

$$G = \frac{780000 \,.\, 2{,}8}{1000}$$

oder:

$$G = 2184 \text{ kg} \quad \text{(s. Hilfsrechn. 1).}$$

Davon kommt auf einen Balken:

$$\frac{1}{4} \cdot 2184 = 546 \text{ kg.}$$

Nach Formel 1 Seite 119 ist nun:

$$l\left(\frac{1}{2} G + P\right) = QS$$

worin G die gleichmässig verteilte, P aber die am freien Ende wirkende Last bedeutet. Hieraus erhält man für:

$$\text{a)}. \;.\;.\;.\;. \quad Q = \frac{l\left(\frac{1}{2} G + P\right)}{S}$$

Für rechteckigen Querschnitt ist aber nach Formel 15 Seite 82:

$$Q = \frac{1}{6} b h^2$$

und da

$$b : h = 1 : 3$$

sein soll, so ist, wenn wir $b = x$ setzen, $h = 3x$, und diese Werte in die Gleichung für Q eingesetzt:

$$Q = \frac{1}{6} x \left(3x\right)^2$$

oder:

$$\text{b)}. \;.\;.\;.\;. \quad Q = \frac{3}{2} x^3$$

Hilfsrechnung 2.

$$\frac{2 . 200\,(273 + 350)}{3 . 60} = \frac{2 . 10 . 623}{3 . 3} =$$

$$\frac{12460}{9} = 1384{,}4$$

$$\sqrt[3]{1384{,}4} = \tfrac{1}{3} \cdot \log 1384{,}4$$

$$\log 1384{,}4 = 3{,}1412616$$
$$\cdot \tfrac{1}{3}$$
$$\log x = 1{,}0470872$$

mithin:

num-log x oder $b = 11{,}145$

Setzen wir aus Gleichung a). und b). Q = Q, so ergibt sich:

$$\frac{3}{2}\,x^3 = \frac{l\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{G} + \mathrm{P}\right)}{\mathrm{S}}$$

oder:

$$x = \sqrt[3]{\frac{2\,l\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{G} + \mathrm{P}\right)}{3\,\mathrm{S}}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$x = \sqrt[3]{\frac{2 . 200\left(\frac{546}{2} + 350\right)}{3 . 60}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2:

$$x = 11 \text{ cm}$$

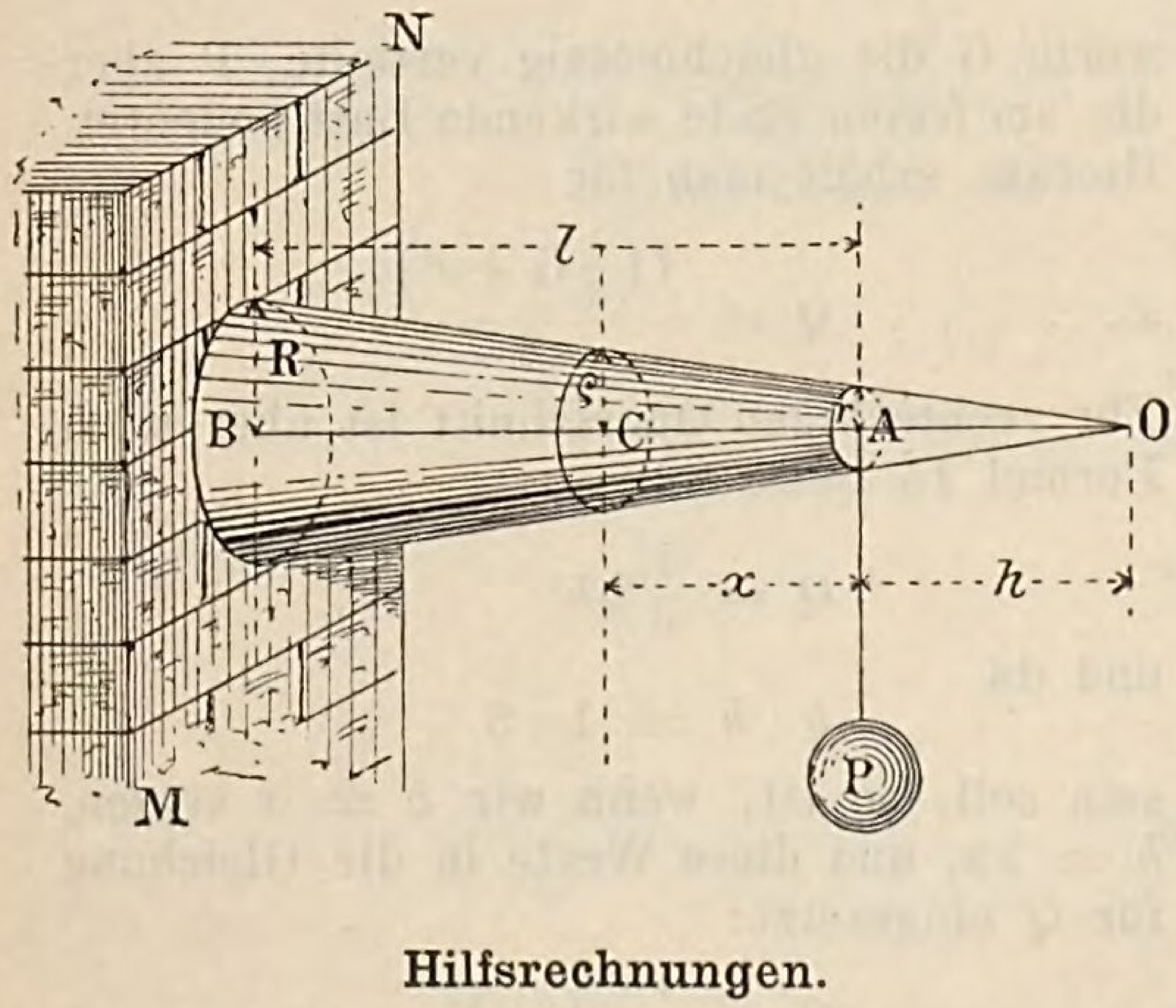
d. h. die Breite eines Balkens ist 11 cm und die Höhe 3 . 11 = 33 cm gross zu nehmen.

Aufgabe 95. Ein abgestutzter Kegel von Gusseisen ist nach Art der Fig. 146 befestigt; die Halbmesser der beiden Endflächen sind R = 30 cm und r = 20 cm, die Länge l = 50 cm.

a). Wie gross ist die Tragfähigkeit, wenn man im gefährlichen Querschnitt eine Spannung von S = 250 kg pro □ cm zulässt?

b). Wie gross ist die Tragfähigkeit eines Cylinders, dessen Halbmesser gleich dem mittleren Halbmesser des abgestutzten Kegels ist?

Figur 146.



Hilfsrechnungen.

1). $\frac{27 . 3{,}14 . 8000 . 1 . 250}{16 . 50 . 2}$

entsprechend gehoben, gibt:

Auflösung. a). Nach der in Antwort auf Frage 108 entwickelten Formel ist:

$$\mathrm{P} = \frac{27}{16} \cdot \frac{\pi r^3}{l}\left(\frac{\mathrm{R}}{r} - 1\right)\mathrm{S}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\mathrm{P} = \frac{27}{16} \cdot \frac{3{,}14 . 20^3}{50}\left(\frac{30}{20} - 1\right) \cdot 250$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$\mathrm{P} = 105975 \text{ kg.}$$

b). Ein Cylinder mit dem mittleren Halbmesser

$$\varrho = \frac{30 + 20}{2} = 25$$

hat dagegen unter denselben Umständen nach Gleichung 7). Seite 99 die Tragfähigkeit:

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{S} . d^3 \pi}{32\,l}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\mathrm{P} = \frac{250 . 50^3 . 3{,}14}{32 . 50}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$\mathrm{P} = 61328 \text{ kg.}$$

Berücksichtigt man, dass dieser Cylinder annähernd denselben Inhalt, also auch bei-

27 . 3,14 . 250 . 5
2198
628
84,78 . 1250
oder: 847,8 . 125
= 847800 : 8
= 105975

2). $\frac{250.50.50.50.3,14}{32.50} = \frac{125.25.25.1,57}{2}$

125 . 625 . 1,57
4375
3125
625
125 . 981,25
= 8 : 981250 = 122656

$\frac{122656}{2} = 61328$

nahe dasselbe Gewicht hat wie der oben dargestellte Kegel, so ergibt sich, dass die Form des letzteren bedeutend vorteilhafter ist als die des Cylinders, denn die Tragfähigkeit ist um das 1,7 fache grösser.

Aufgabe 96. Es soll die Schwingungsachse eines Dampfmaschinen-Balanciers berechnet werden. Der Achsendruck beträgt 18000 kg, die Entfernung der Lagermittel ist 760 mm, die Länge der Balanciernabe 300 mm. Das Material ist Gussstahl und S = 800 kg pro □ cm oder 8 kg pro □ mm. Das Eigengewicht der Achse ist schätzungsweise, als in der Mitte vereinigt, in den Achsendruck miteingerechnet.

Auflösung. Der durch die Last auf die Mitte eines jeden Zapfens ausgeübte Druck ist:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 18000 \text{ oder } 9000 \text{ kg}.$$

Das Maximalmoment in der Mitte ist:

$$M = P\,l$$

oder:

$$M = 9000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 760$$

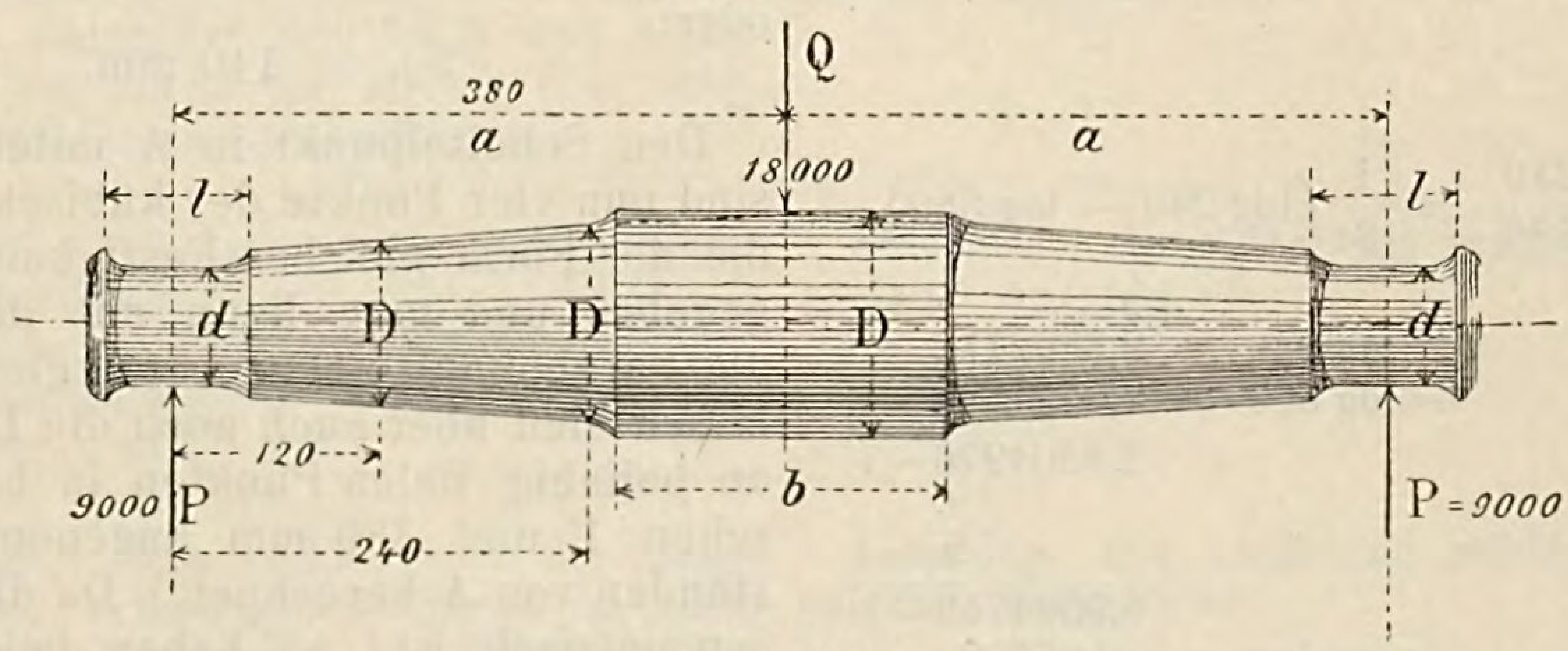
oder:

$$M = 9000 . 380$$

oder:

$$M = 3420000$$

Figur 147.



Nach der Gleichung 11). auf Seite 79:

$$M \text{ oder } P\,a = Q\,S$$

und nach der Gleichung 7). auf Seite 99:

$$P\,a = \frac{S\,d^3 \pi}{32}$$

ist mit D als grösstem Durchmesser und mit S = 8 kg:

Hilfsrechnungen.

1). . . $\sqrt[3]{\frac{32.3420000}{8.\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1368000}{\pi}} =$

$\frac{1}{3}\left(\log 13680000 - \log \pi\right)$

$$\begin{aligned} \log 13680000 &= 7{,}1360861 \\ -\log \pi &= 0{,}4971499 \\ &\overline{6{,}6389362} \\ &\cdot \tfrac{1}{3} \\ \log d &= \overline{2{,}2129787} \end{aligned}$$

mithin:
num-log d oder $d = 163{,}3$

2). . . $\sqrt[3]{\frac{120}{380}} = \frac{1}{3}\left(\log 120 - \log 380\right)$

$$\begin{aligned} &\quad\ {+3}\qquad\qquad {-3} \\ \log 120 &= 2{,}0791812 \\ -\log 380 &= 2{,}5797836 \\ &\overline{2{,}4993976-3} \\ &\cdot \tfrac{1}{3} \\ &\overline{0{,}8331325-1} \\ \text{num-log} &= 0{,}68098 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 163{,}3\,.\,0{,}68 \\ \hline 13064 \\ 9798 \\ \hline 111{,}044 \end{array}$$

3). . . $\sqrt[3]{\frac{240}{380}} = \frac{1}{3}\left(\log 240 - \log 380\right)$

$$\begin{aligned} &\quad\ {+3}\qquad\qquad {-3} \\ \log 240 &= 2{,}3802112 \\ -\log 380 &= 2{,}5797836 \\ &\overline{2{,}8004276-1} \\ &\cdot \tfrac{1}{3} \\ &\overline{0{,}9334759-1} \\ \text{num-log} &= 0{,}85798 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}85798\,.\,163{,}3 \\ \hline 257394 \\ 257394 \\ 514788 \\ 85798 \\ \hline 140{,}108134 \end{array}$$

$$3420000 = \frac{8\,.\,D^3\,.\,\pi}{32}$$

woraus man für

$$D = \sqrt[3]{\frac{32\,.\,3420000}{8\,.\,\pi}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$D = 163{,}3 \text{ mm.}$$

An einer andern Stelle, in der Entfernung 120 mm vom freien Ende, also von A, ist nach der in Antw. auf Frage 120 entwickelten Formel:

$$\varrho = r\sqrt[3]{\frac{x}{l}}$$

oder:

$$2\varrho = D\sqrt[3]{\frac{x}{l}}$$

oder, da $x = 120$ und $l = 380$, so ist:

$$2\varrho = D\sqrt[3]{\frac{120}{380}}$$

oder:

$$2\varrho = 163{,}3\,.\,0{,}68$$

oder:

$$2\varrho = 111 \text{ mm}$$ (s. Hilfsrechn. 2).

An einer dritten Stelle, in der Entfernung 240 von A, ist der Durchmesser:

$$2\varrho_1 = D\sqrt[3]{\frac{240}{380}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 3).:

$$2\varrho_1 = 163{,}3\,.\,0{,}85798$$

oder:

$$2\varrho_1 = 140 \text{ mm.}$$

Den Scheitelpunkt in A miteingerechnet, sind nun vier Punkte der kubischen Parabel, die der Form gleicher Festigkeit entspricht, gegeben und man kann mit diesen leicht die Parabel aufzeichnen. (In gleicher Weise lassen sich aber auch noch die Durchmesser an beliebig vielen Punkten in beliebig zwischen 1 und 380 mm angenommenen Abständen von A berechnen.) Da die Belastung symmetrisch ist, so haben beide Achsenhälften gleiche Dimensionen.

Die geradlinige äussere Form der Achse, die bedingt ist durch den Zapfendurchmesser, die Bundhöhen und durch die Länge des für die aufsitzende Nabe cylindrischen Teils, darf an keiner Stelle in die Parabel einschneiden, sie darf diese nur berühren.

Ist l die Länge des Zapfens, d dessen Durchmesser und macht man das Verhältnis

$$e = \frac{l}{d} = 1{,}6 \text{ (siehe Erkl. 150)}$$

so ist, da der Zapfen als ein gleichmässig belasteter Freiträger angesehen werden kann, bei welchem nach Gleichung 1). Seite 118:

$$P\,l = 2\,Q\,S$$

ist und mit Rücksicht auf Formel 7 Seite 99:

$$P\,l = \frac{d^3 \pi S}{32}$$

oder:

$$9000\,l = \frac{2\,d^3 \pi S}{32}$$

oder:

$$9000\,\frac{l}{d} = \frac{d^2 \pi S}{16}$$

und hieraus erhält man:

$$d^2 = \frac{9000 \cdot \frac{l}{d} \cdot 16}{\pi \,.\, S}$$

und die entsprechenden Werte eingesetzt:

$$d = \sqrt{\frac{9000 \,.\, 1{,}6 \,.\, 16}{\pi \,.\, 8}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 4).:

$$d = 95{,}7 \text{ mm}$$

und somit

$$l = 1{,}6 \,.\, 95{,}7$$

oder:

$$l = 153 \text{ mm (s. Hilfsrechn. 5).}$$

4)... $\sqrt{\frac{9000 \,.\, 1{,}6 \,.\, 16}{\pi \,.\, 8}} = \sqrt{\frac{28800}{\pi}} =$

$$\frac{1}{2}\left(\log 28800 - \log \pi\right)$$

$$\begin{aligned} \log 28800 &= 4{,}4593925 \\ -\log \pi &= 0{,}4971499 \\ &\overline{\ 3{,}9622426} \\ &\ \cdot \tfrac{1}{2} \\ \log d &= 1{,}9811213 \end{aligned}$$

mithin:
num-log d oder $d = 95{,}746$

5)...... 1,6 . 95,7

5742
957
153,12

m). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 97. Wie verhalten sich die relativen Festigkeiten zweier Balken aus gleichem Material, von denen der eine 7,5 m lang, 12 cm breit und 16 cm hoch, der andere 8 m lang, 10 cm breit und 14 cm hoch ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 64.

Aufgabe 98. Wie ändert sich die Tragfähigkeit eines Balkens von 20 m Länge, 31 cm Breite und 50 cm Höhe, je nachdem derselbe auf seine breite oder schmale Seite (flach- oder hochkantig) aufgelegt wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 65.

Aufgabe 99. Wie verhält sich die Tragfähigkeit einer cylindrischen Stange zu einer solchen, deren Querschnitt ein Rechteck von gleichem Flächeninhalt ist, bei dem sich die Breite zur Höhe wie 5 : 7 verhält, wenn gleiche Länge und gleiches Material vorausgesetzt ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 66.

Aufgabe 100. a). Welche Last kann ein tannener Balken von 2 m Länge, 20 cm Breite und 30 cm Dicke an einem Ende aufnehmen, wenn er am andern Ende eingemauert ist?
b). Durch welche Last würde er abgebrochen? (Festigkeitsmodulus 900 kg; S = 90 kg.)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 67.

Aufgabe 101. Welche Lasten würde derselbe Balken mit Sicherheit tragen, a). wenn er an einem Ende eingemauert, die Last aber gleichmässig über seine ganze Länge verteilt ist, b). wenn er an beiden Enden auf Stützen liegt und die Last in seiner Mitte wirkt, c). wenn er an beiden Enden unterstützt und die Last gleichmässig über seine ganze Länge verteilt ist, d). wenn er an beiden Enden eingemauert ist und die Last in seiner Mitte wirkt.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 68.

Aufgabe 102. Ein Träger von rechteckigem Querschnitt hat $7\frac{1}{2}$ cm Breite, 15 cm Höhe und 3,6 m Länge. Derselbe ist an beiden Enden gestützt und wird durch eine in seiner Mitte wirkende Last von 7345 kg durchgebrochen. Wie gross ist demnach die relative Festigkeit des Stabs?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 69. Für P ist $4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{bh^2S}{l}$ zu nehmen [s. Gleichung 44).]

Aufgabe 103. a). Wie gross muss die Höhe eines Trägers aus Gusseisen sein, wenn derselbe 4 m lang und 4 cm breit ist und bei fünffacher Sicherheit = 440 kg pro □cm an seinem freien Ende 2000 kg tragen soll?

b). Wie gross ist der Pfeil der Biegung, wenn der Elasticitätsmodulus E = 1270000 pro □cm ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 70.

Aufgabe 104. Wenn ein Stahlstab von 500 mm Länge, 8,53 mm Breite und 2,4 mm Höhe bei 1 kg Belastung 12,64 mm Senkung gibt, wie gross ist dann der Elasticitätsmodulus E? (Der Stab ist an beiden Enden gestützt und in der Mitte belastet?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 71.

Aufgabe 105. Berechne a). das Trägheitsmoment T einer Eisenbahnschiene von dem Querschnitt der Fig. 148 in Bezug auf die neutrale Achse. Es sollen bei der Berechnung die krummlinigen Begrenzungen durch die in der Figur angegebenen geraden Umrisse ersetzt werden, und $\overline{AB}$ = 14 mm, $\overline{AD}$ = 93 mm, $\overline{EF}$ = 13 mm, $\overline{EG}$ = 53 mm, $\overline{KL}$ = 54 mm, $\overline{KM}$ = 21 mm und die Höhe des Paralleltrapezes GHLK = 32 mm sein.

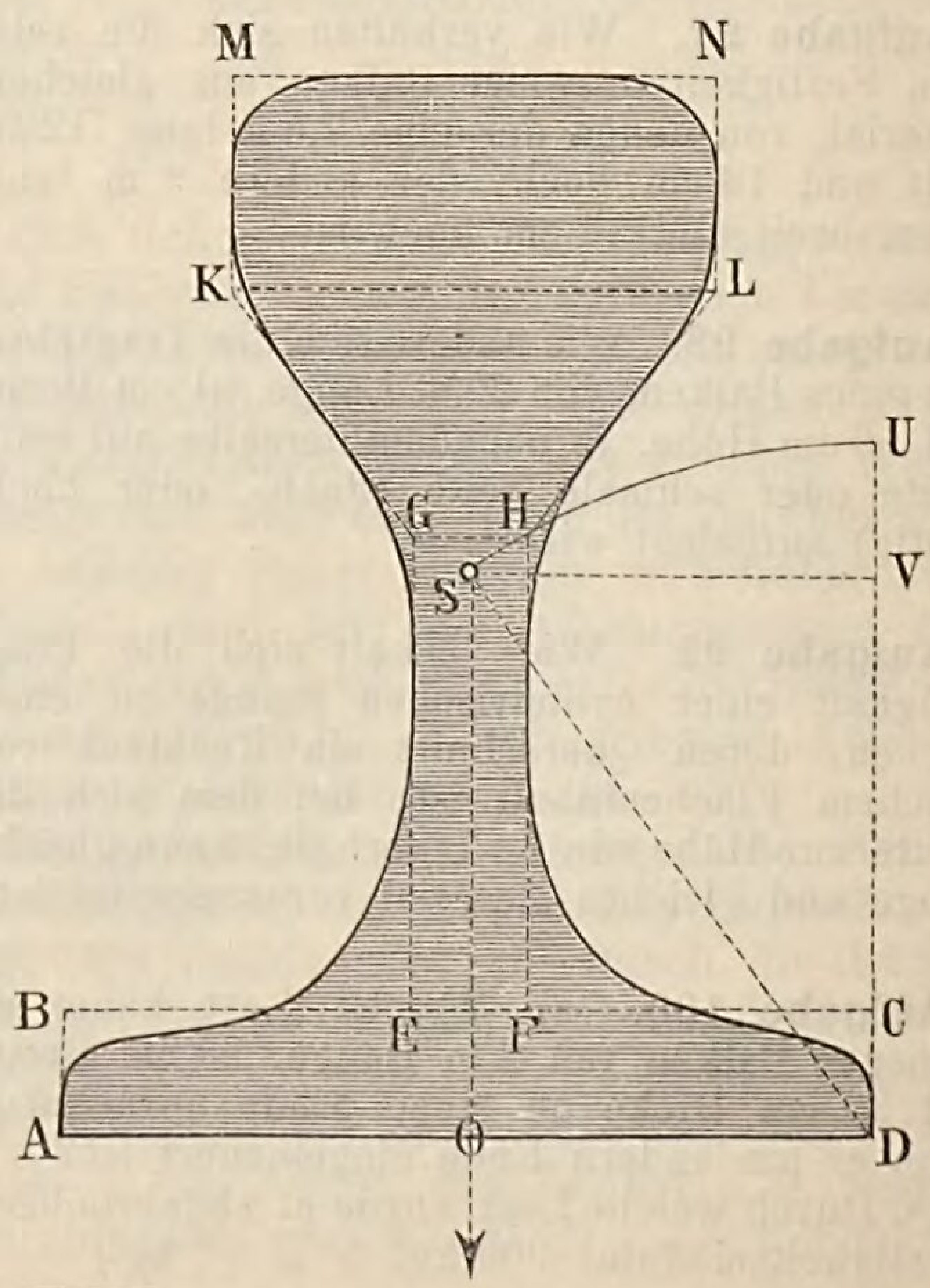
b). Wie gross ist die Tragfähigkeit dieser mit ihren beiden Enden eingemauerten Schiene, wenn die freie Länge derselben 5 m beträgt, die Last gleichmässig über die ganze Länge verteilt ist und S = 750 angenommen werden soll?

c). Wie gross würde die Tragfähigkeit sein, wenn die Schiene an einem Ende befestigt und am andern belastet wäre?

d). Wie gross ist in den beiden vorerwähnten Fällen die Tragfähigkeit, wenn das Eigengewicht der Schiene mit in Rechnung gebracht und für das spezifische Gewicht γ = 7,82 gesetzt wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 73. (Die Lage des Schwerpunkts bei dem gegebenen Querschnitt findet sich berechnet in *R. Klimpert*, Lehrb. der Statik S. 263.)

Figur 148.



Aufgabe 106. Welche Dicke und Breite sollen die Balken eines Getreidemagazins erhalten, wenn dieselben bei einer Länge von 9 m an beiden Enden eingemauert sind, 75 cm von einander abstehen, das Verhältnis der Breite zur Höhe des Querschnitts 5 : 7 ist, das Liter Getreide 776 Gramm wiegt und dasselbe höchstens 90 cm hoch aufgeschüttet wird

(S = 90 kg pro □ cm.)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 74, nur dass im vorliegenden Fall nicht P sondern b resp. h die unbekannte Grösse ist.

Aufgabe 107. Wie stark muss eine gusseiserne cylindrische Radwelle von 1,5 m Länge sein, wenn dieselbe in dem Rad samt dem eigenen Gewicht die ziemlich gleichmässig verteilte Last P = 1800 kg zu tragen hat und als praktisch zulässige Spannung für Gusseisen S = 300 kg pro □ cm gerechnet wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 75.

Aufgabe 108. Ein runder Baumstamm von 40 cm Durchmesser und 10 m Länge, der in seinen Endpunkten unterstützt ist, hat welche Tragkraft, wenn der Sicherheitsmodul S = 120 kg pro □ cm beträgt und die Last gleichmässig verteilt wirkt? a). Welche Tragfähigkeit hat der aus demselben gezimmerte Balken mit dem denkbar grössten quadratischen Querschnitt, b). wenn eine Quadratseite horizontal liegt und c). wenn eine Diagonale horizontal liegt, d) welches ist die grösste Tragfähigkeit bei rechteckigem Querschnitt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 76.

Aufgabe 109. Ein gusseiserner Träger von 6 m Länge, bei dem sich $b : h = 1 : 5$ verhalten soll, soll dieselbe Tragkraft haben wie ein cylindrischer Stab aus demselben Material, von derselben Länge und einem Durchmesser von 12 cm.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 77.

Aufgabe 110. Ein gusseiserner Tragbalken von $7\frac{1}{2}$ cm Breite und 16 cm Höhe, der pro □ cm auf 400 kg beansprucht ist, soll durch einen andern Träger von derselben Länge ersetzt werden, bei dem $b : h = 2 : 5$ und S nur 300 kg pro □ cm beträgt Welche Dimensionen muss der letztere erhalten?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 78.

Aufgabe 111. Ein Träger von Gusseisen und 2,5 m freier Länge hat einen kastenförmigen Querschnitt von 16 cm äusserer Höhe und 9,5 cm äusserer Breite. Die Wandstärke ist 1,4 cm und S soll 400 kg pro □ cm nicht übersteigen. Wie gross ist die Tragfähigkeit:

a). wenn der Träger an beiden Enden frei aufliegt und in der Mitte belastet ist;

b). wenn derselbe an beiden Enden frei aufliegt und die Last gleichmässig verteilt ist;

c). wenn derselbe an beiden Enden eingemauert und in der Mitte belastet ist;

d). wenn derselbe an beiden Enden eingemauert und die Last gleichmässig verteilt ist?

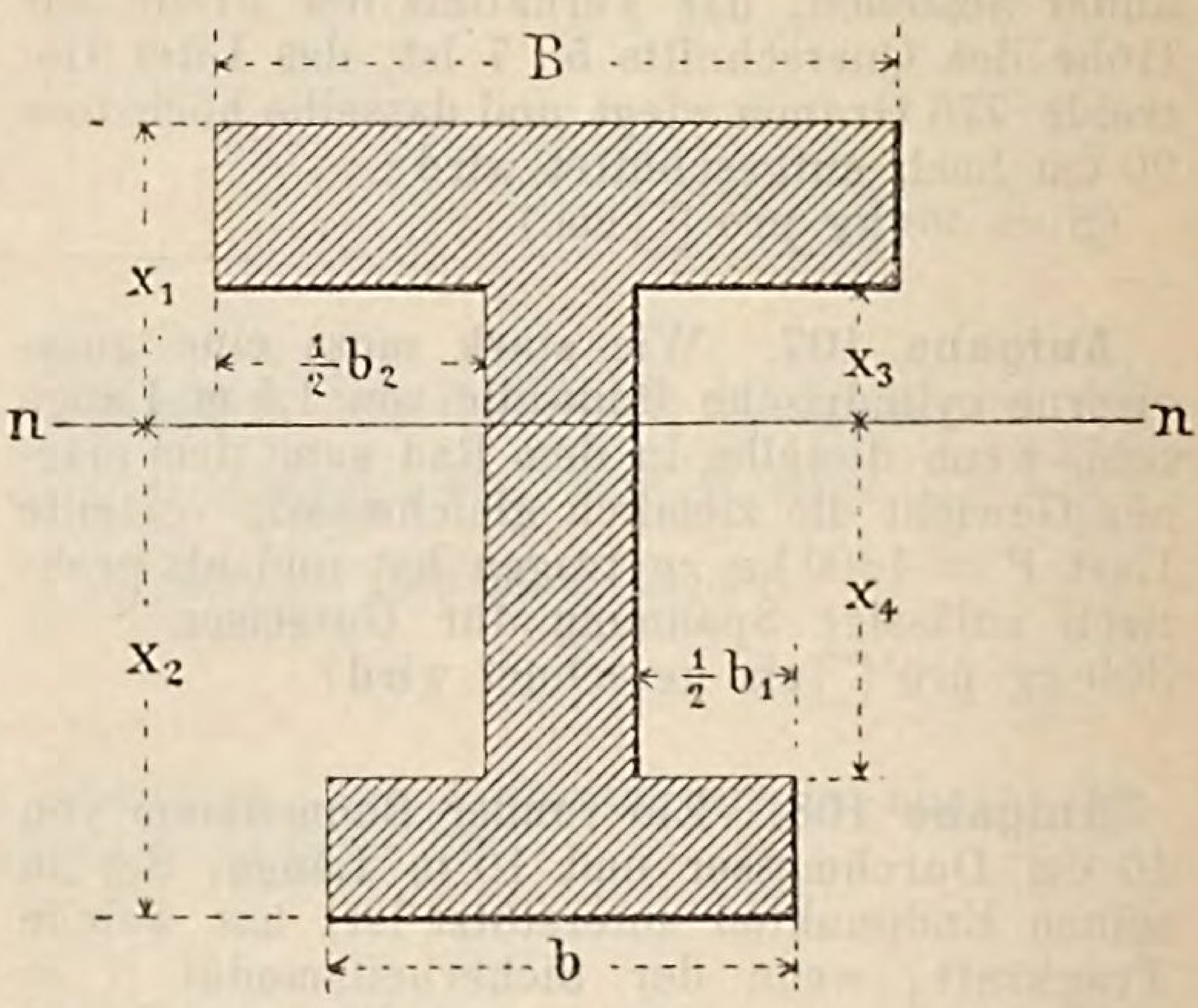
e). Was ergibt sich für jeden der vorerwähnten Fälle, wenn der Balken so gelegt wird, dass die Höhe des Querschnitts zur Breite wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 79.

Aufgabe 112. Welche Last mit Einrechnung des eigenen Gewichts kann ein an beiden Enden gestützter gusseiserner Träger von der Form Fig. 149 in seiner Mitte b). an einem Punkt aufnehmen, der 2 m von dem einen und 5 m von dem andern Ende entfernt ist, wenn H = $x_1 + x_2$ = 43 cm, $h = x_3 + x_4$ = 27 cm, B = 38 cm, b = 25 cm, die Stärke der Mittelrippe 5 cm, das spezifische Gewicht γ = 7,5 und S = 500 kg pro ☐ cm beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 80.

Figur 149.



Aufgabe 113. Wie gross ist bei einem cylindrischen Stabe die Spannung S in einer Entfernung Y = 4 cm von der neutralen Schicht, wenn der Stab 12 cm Durchmesser hat und die Kraft P = 800 kg in einem Abstand x = 50 cm von dem betreffenden Querschnitt angreift?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 81.

Aufgabe 114. Welche Länge kann ein mit beiden Enden frei aufliegender Balken aus Tannenholz haben, wenn er 20 cm breit, 15 cm hoch und auf den laufenden Meter mit 630 kg belastet ist, ehe der Bruch erfolgt, wenn sein spezifisches Gewicht γ = 0,5 und sein Festigkeitsmodulus = 600 kg pro ☐ cm beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 82. P ist im gegebenen Fall die Summe aus Eigengewicht und gleichmässig verteilter Belastung.

Aufgabe 115. Ein Stahlstab von 510 mm Länge und 1000 g Belastung gab eine Pfeilhöhe von 3,58 mm, wenn derselbe an beiden Enden gestützt und in der Mitte belastet war. In welcher Entfernung l_1 von der Befestigungsstelle wird derselbe Stab, an einem Ende befestigt, durch dieselbe Last eine Biegung von 2,81 mm geben?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 83. Die gesuchte Grösse ist hier l_1 dort s_1.

Aufgabe 116. Eine schmiedeeiserne Stange von 5 m Länge, welche in ihren beiden Enden frei aufliegt und bei der eine Seite des quadratischen Querschnitts 15 cm beträgt, soll auf 750 kg pro ☐ cm durch ein in ihrer Mitte wirkendes Gewicht in Anspruch genommen werden. a). Wie gross darf, unter Berücksichtigung des Eigengewichts der Stange die in der Mitte anzubringende Belastung sein? (γ = 7,78.)

b) Welche Last kann dieselbe Achse in ihrer Mitte noch aufnehmen, wenn dieselbe bereits in den Entfernungen 0,6 m, 2 m und 3 m von dem einen Ende die Lasten von 600 kg, 1500 kg und 2000 kg trägt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 84.

Aufgabe 117. a). Es soll mit Rücksicht auf das eigene Gewicht der Durchmesser eines Wellbaums von Eichenholz von 6 m Länge gefunden werden, dessen Mitte eine Last von 5000 kg zu tragen hat.

b). Welche Stärke würde die Welle unter sonst gleichen Umständen haben müssen, wenn das Rad nicht in der Mitte angebracht, sondern von dem einen Lager 1,5, also vom andern 4,5 m entfernt wäre?

(S = 65 kg pro □ cm; $\gamma = 0,7$)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 85.

Aufgabe 118. Wenn die schmiedeeisernen Zapfen einer horizontalen Wasserradwelle 100 mm lang und 60,2 mm dick genommen werden, auf welchen Druck sind dieselben dann berechnet?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 86 mit Berücksichtigung des in Erkl. 150 Gesagten.

$$\left(e = \frac{1000}{602}\right)$$

Aufgabe 119. Nennt man die Dicke eines Zahns zweier ineinandergreifender Räder im Teilkreis $= d$, so ist für gewöhnliche Verhältnisse $l = 1,5\, d$ und $b = 6\, d$. Der Druck auf die Zähne sei 1000 kg und der Sicherheitskoeffizient S = 90 kg pro □ cm. Welche Länge, Breite und Höhe ergibt sich daraus für je einen Zahn?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 87.

Gesucht wird b resp. h und l.

Aufgabe 120. Wie stark wird sich ein 30 cm breites und 2,5 cm dickes tannenes Brett biegen, wenn es flach auf zwei um 3,75 m von einander entfernten Stützen horizontal aufgelegt und in der Mitte mit 25 kg belastet wird?

(E = 130000 kg pro □ cm.)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 88.

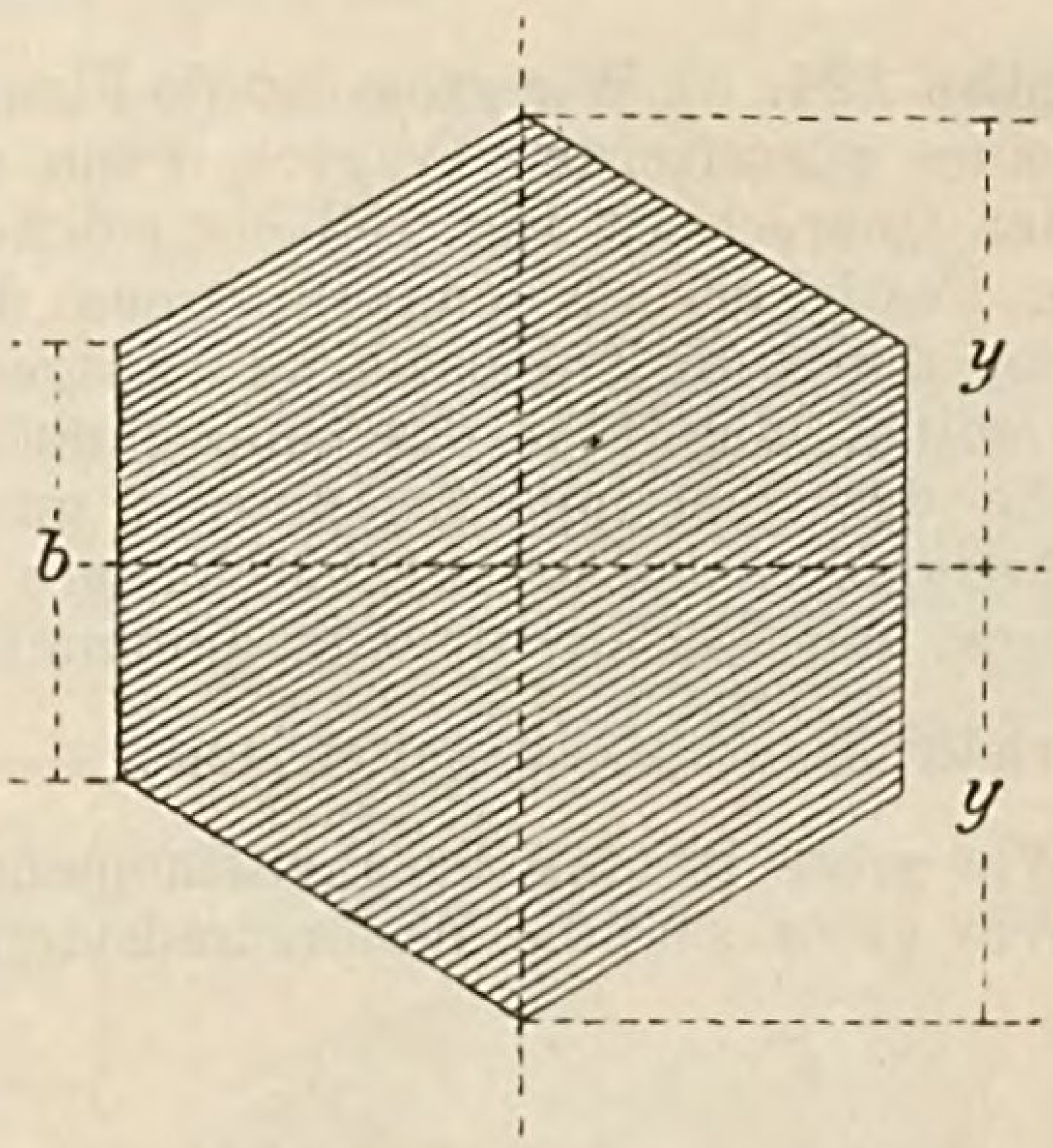
Aufgabe 121. Ein Gusseisenstab ($\gamma = 7,5$) von regulär sechsseitigem Querschnitt (siehe Fig. 150) ist einseitig eingemauert und hat im Querschnitt eine Kantenlänge von 4 cm.

a). Wieviel darf die freie Länge desselben betragen, wenn die grösste durch sein Eigengewicht in ihm auftretende Spannung S 600 kg pro □ cm nicht übersteigen soll?

b). Bei welcher Länge wird der Stab durch sein eigenes Gewicht brechen, wenn der Festigkeitsmodulus = 3000 kg pro □ cm beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 89.

Figur 150.



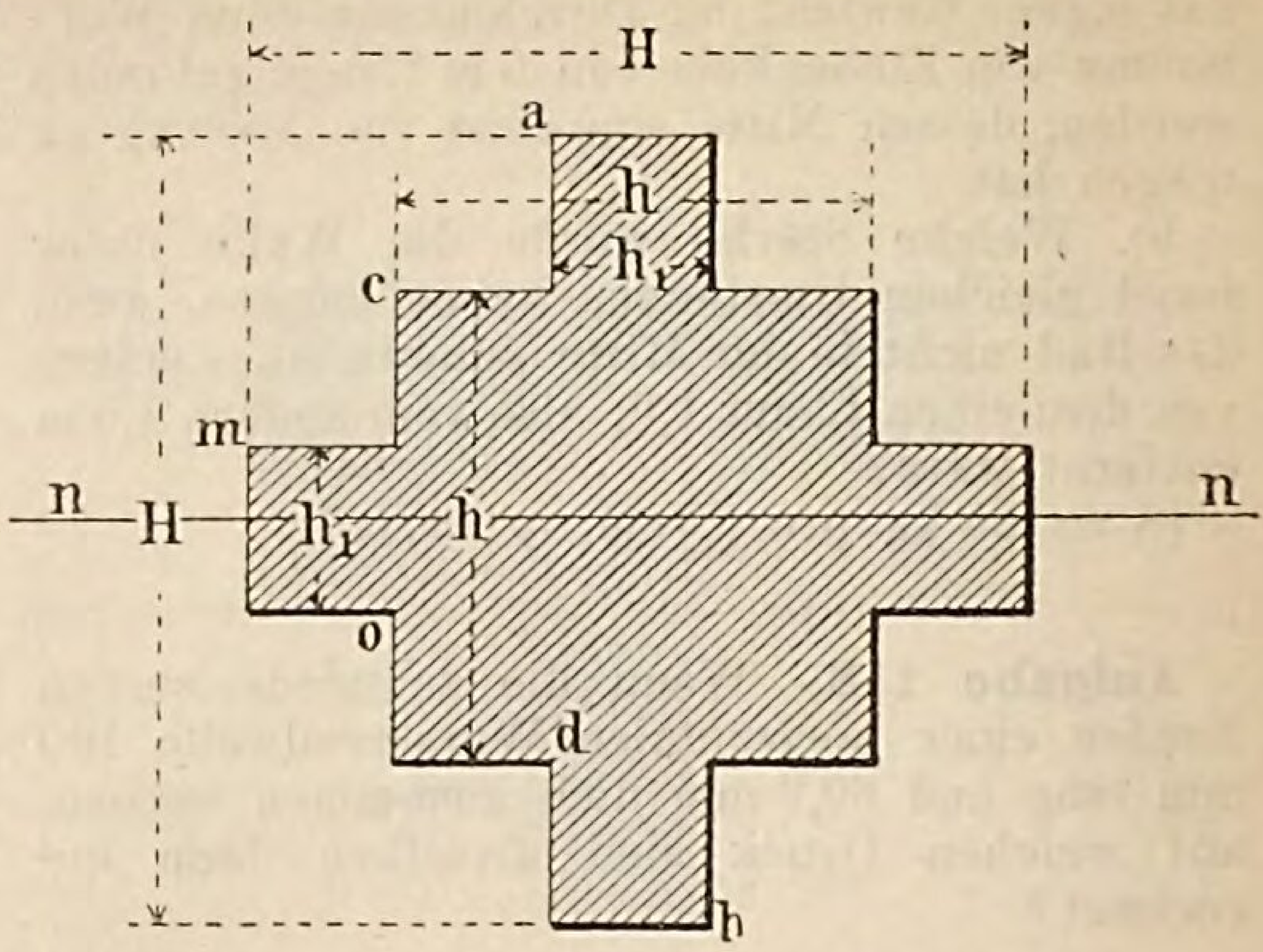
Aufgabe 122. Bei einem an den Enden frei aufliegenden 7 m langen Träger von der Querschnittsform Fig. 151 hängt eine Last von

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 90 unter Anwendung der Formel 31 c). Seite 88.

15000 kg auf jeder Seite $1^1/_2$ m vom Stützpunkt entfernt. H beträgt 40 cm, h = 24 cm und h_1 = 8 cm. Es soll die Beanspruchung pro □ cm berechnet werden, a). ohne, b). mit Berücksichtigung des Eigengewichts.

(γ = 7,6)

Figur 151.



Aufgabe 123. Eine gusseiserne Röhre von elliptischem Querschnitt (s. Fig. 152), die in der Länge von 4 m an beiden Enden gestützt ist, kann, wenn A = 45 cm, A_1 = 27 cm, a = 30 cm und a_1 = 19 cm beträgt, welche Last in ihrer Mitte tragen, wenn der Sicherheitsmodulus zu 450 kg pro □ cm angenommen wird, und zwar

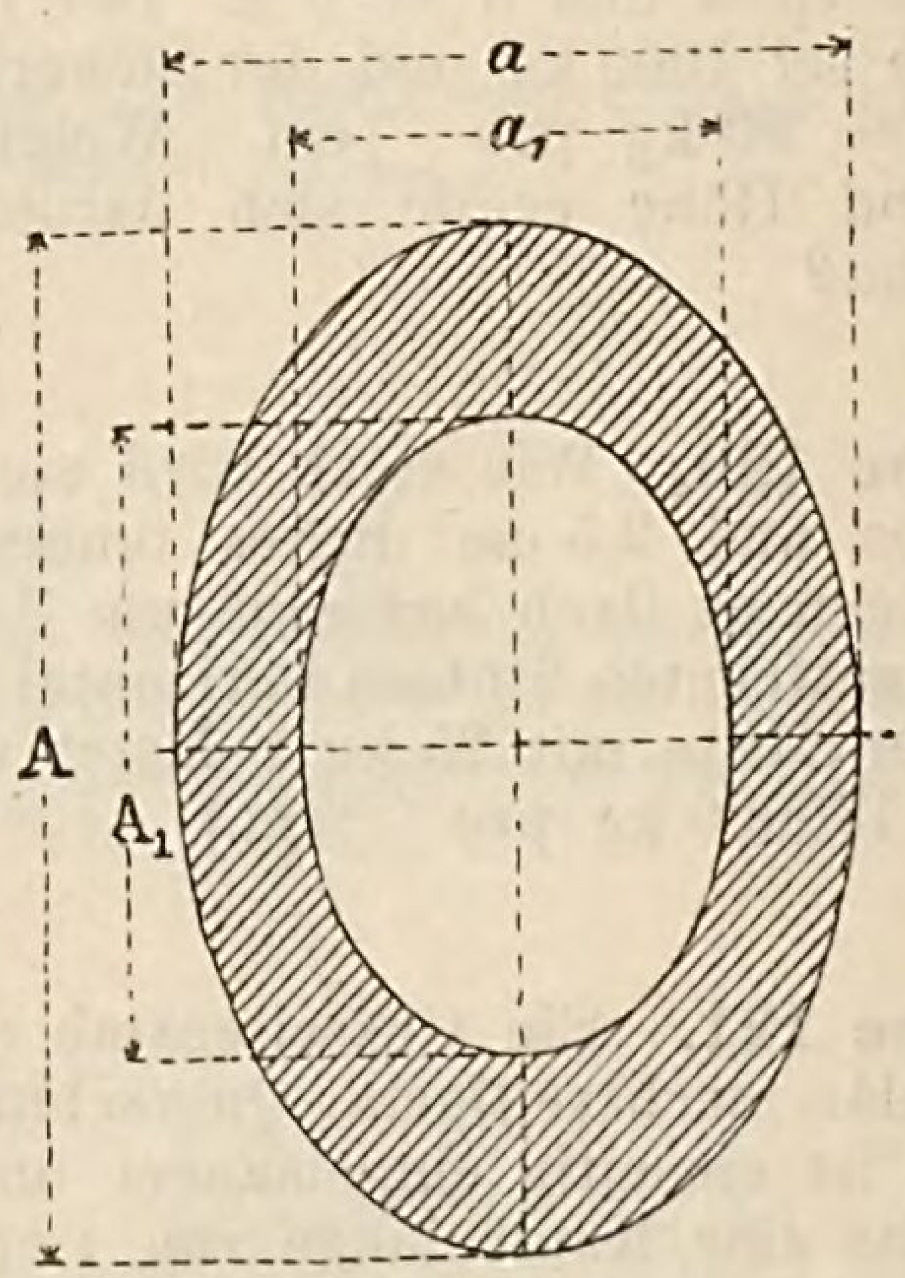
a). wenn A horizontal läuft,

b). wenn A vertikal steht?

c). Welche Biegung ergibt sich in jedem der beiden Fälle, wenn E = 1000000 beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 91 unter Anwendung der auf Seite 105 gegebenen Formeln.

Figur 152.



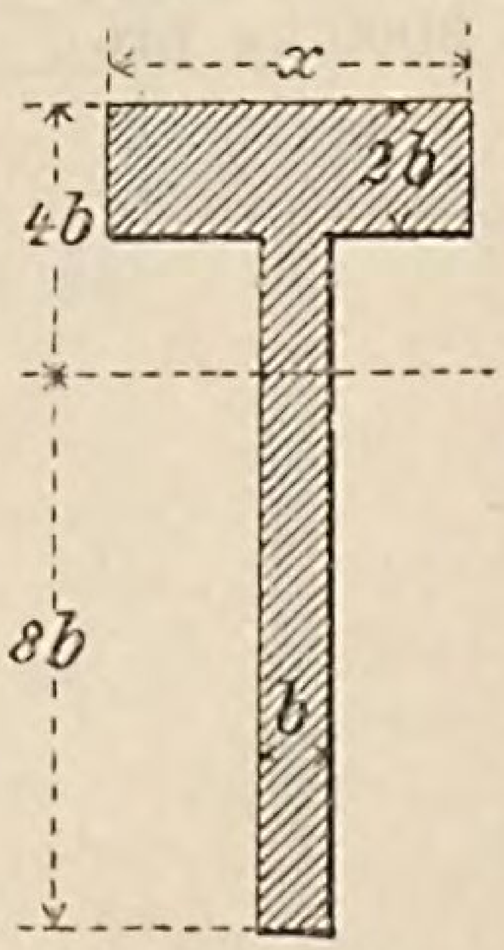
Aufgabe 124. a). Wie gross ist die Flanschenbreite eines gusseisernen Trägers, wenn nebenstehender Querschnitt Fig. 153 ein solcher von gleicher Festigkeit werden soll, wenn die Dimensionen durch die Rippenstärke b ausgedrückt werden sollen, die Höhe des Querschnitts $12b$, die Höhe der Querrippe $2b$ beträgt und man als zulässige Beanspruchung 500 kg pro □ cm für Druck und 250 kg für Zug annimmt, also das Verhältnis $\frac{S_2}{S_1} = 2$ gelten soll?

b). Wie gross ist das Trägheitsmoment?

c). Wie gross sind die Widerstandsmomente?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 92.

Figur 153.



Aufgabe 125. Ein Träger vom Querschnitt Fig. 153 sei mit einem Ende befestigt und 2 m

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 93.

lang mit 2500 kg gleichmässig belastet. Wie gross sind die Dimensionen zu nehmen, wenn S für Druck 500 und für Zug 250 gilt?

Aufgabe 126. Zwei Balken aus Tannenholz sind mit einem Ende in horizontaler Lage eingemauert und tragen auf ihrer freien Länge von 80 cm eine Sandsteinplatte von 140 cm Länge, 90 cm Breite und 18 cm Dicke. Es ist die Breite und Höhe des rechteckigen Querschnitts eines Balkens zu bestimmen, und zwar soll $b:h = 4:7$ sein und jeder Balken soll genügende Stärke besitzen, um an seinem äussersten Ende eine zufällige Belastung von 200 kg tragen zu können. (Spezif. Gewicht des Sandsteins $\gamma = 2{,}5$, Sicherheitskoeffizient S = 90 kg pro □ cm.)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 94.

Aufgabe 127. Eine abgestutzte Pyramide von Eichenholz ist nach Art der Fig. 154 befestigt, hat durchaus quadratische Querschnitte, also $h = b$, und zwar ist die Kantenlänge derselben an den beiden Endflächen 36 cm und 24 cm und die Länge 60 cm.

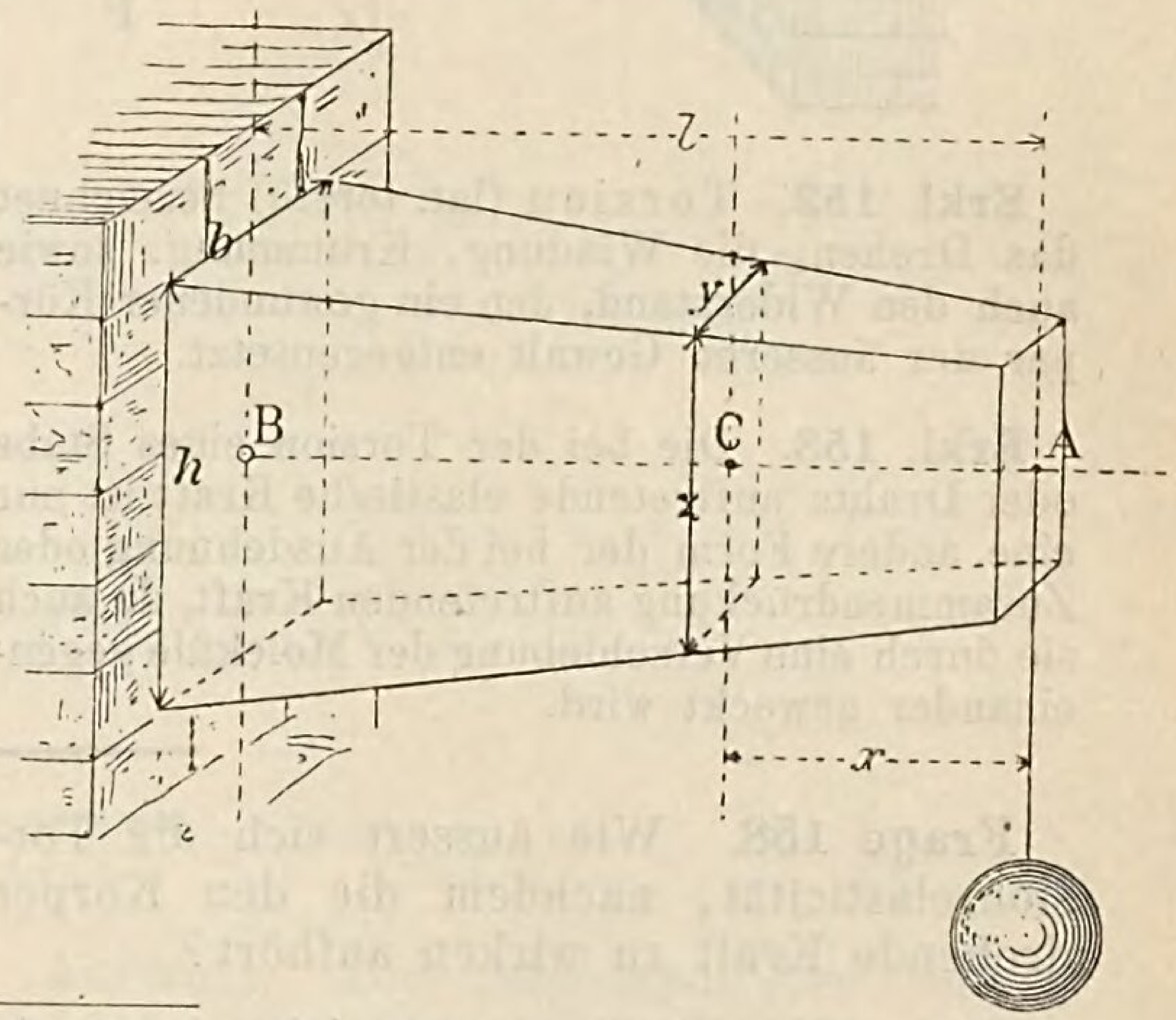
a). Wie gross ist die Tragfähigkeit, wenn man im gefährlichen Querschnitt eine Spannung von S = 65 kg pro □ cm zulässt.

b). Wie gross ist die Tragfähigkeit eines quadratischen Balkens von durchaus gleicher Breite und Höhe des Querschnitts, dessen Kante gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{36+24}{2}$ aus den Kantenlängen der abgestutzten Pyramide ist?

c). In welchem Verhältnis stehen die beiden so ermittelten Tragfähigkeiten?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 95 unter Anwendung der Formeln für quadratischen Querschnitt.

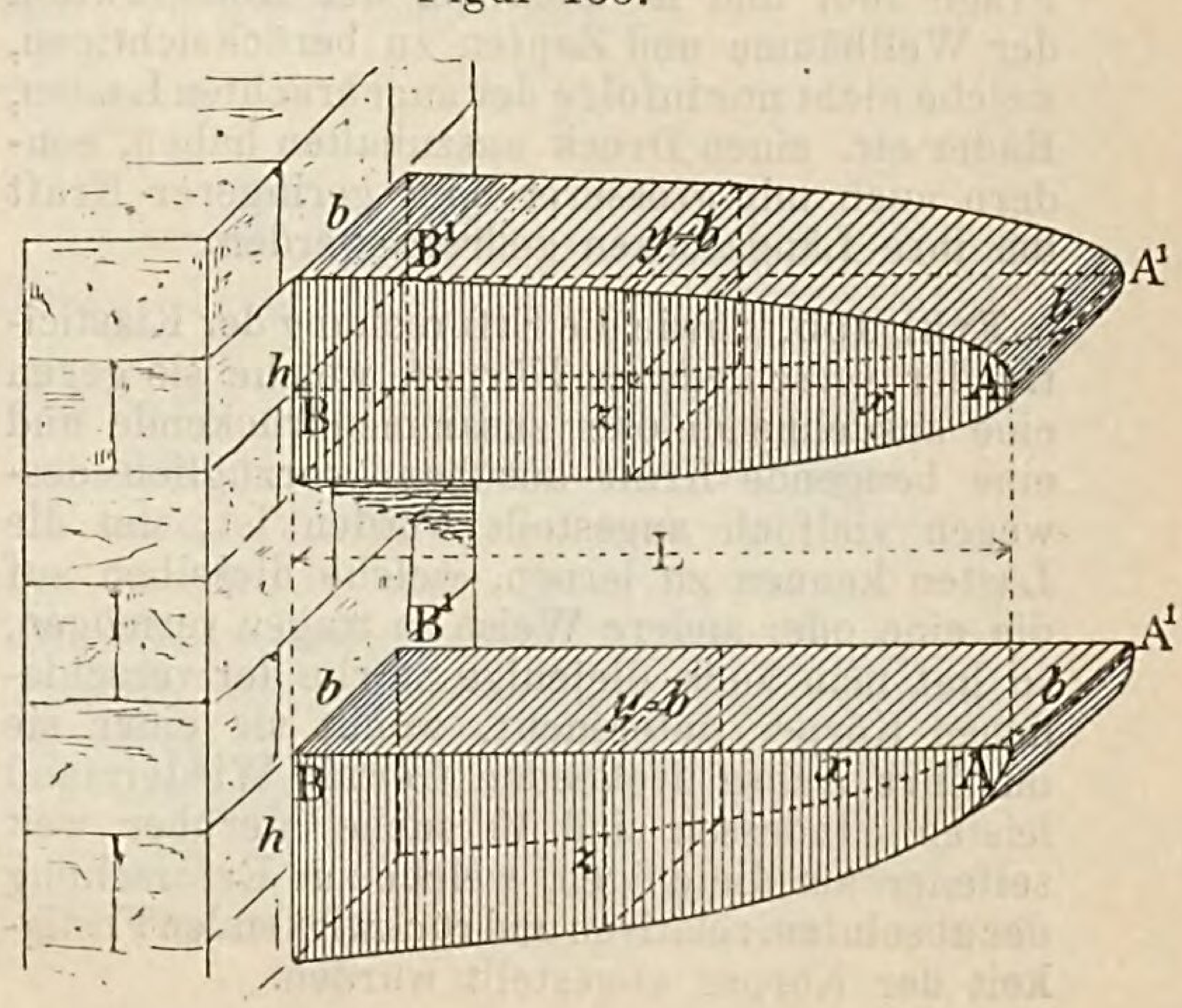
Figur 154.



Aufgabe 128. Es soll ein Träger von Sandstein, der wie Fig. 155 geformt ist, berechnet werden. Derselbe habe ein eigenes Gewicht von 150 kg und soll an seinem äusseren Ende 3500 kg tragen. Die Länge des Trägers sei 1 m und seine Breite 25 cm; der Sicherheitskoeffizient S = 30 pro □ cm. Wie gross sind die Höhen in je 20 cm Abstand von einander zu nehmen?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 96.

Figur 155.

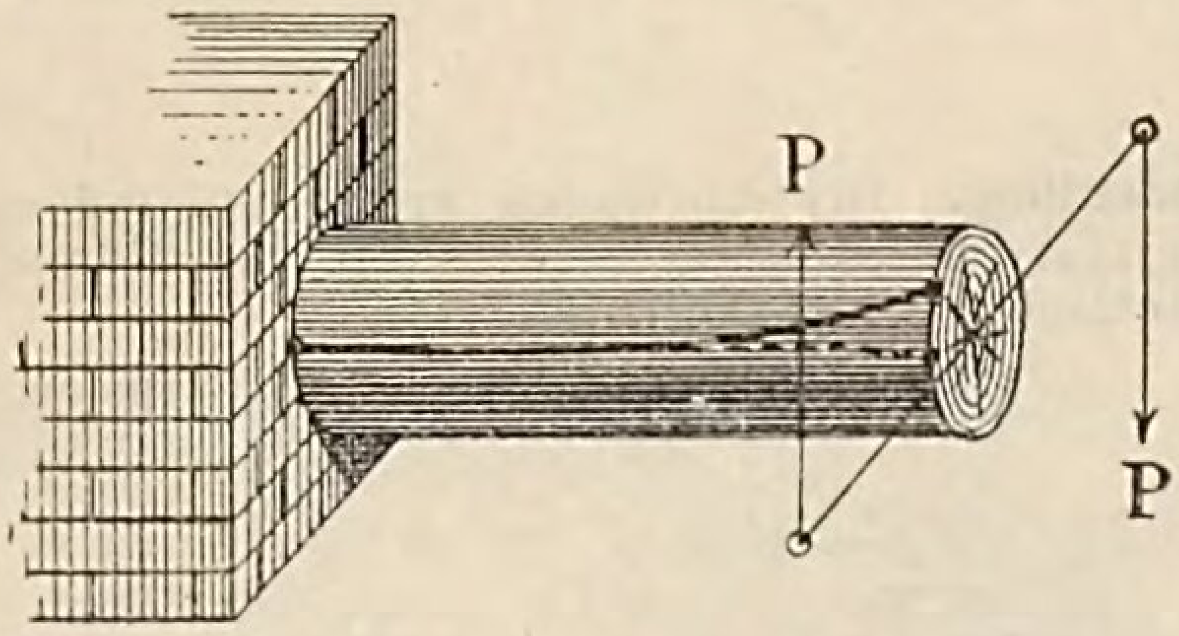


VI. Die Torsionselasticität und -Festigkeit.

a). Die Gesetze der Torsionselasticität.

Frage 157. Was versteht man unter der Torsionselasticität eines Körpers, und unter welchen Umständen wird dieselbe in einem Körper hervorgerufen oder zur Wirkung gebracht?

Figur 156.



Erkl. 152. Torsion (lat. torsĭo) bezeichnet das Drehen, die Windung, Krümmung, sowie auch den Widerstand, den ein gewundener Körper der äusseren Gewalt entgegensetzt.

Erkl. 153. Die bei der Torsion eines Stabs oder Drahts auftretende elastische Kraft ist nur eine andere Form der bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung auftretenden Kraft, da auch sie durch eine Verschiebung der Moleküle gegeneinander geweckt wird.

Antwort. Wenn man einen cylindrischen oder überhaupt stabförmigen Körper an dem einen Ende unveränderlich befestigt (also z. B. einklemmt oder einmauert, siehe Fig. 156) und denselben am andern freien Ende um seine Längsrichtung oder Längsachse dreht, so nehmen die anfänglich parallelen äusseren Längsfasern, aus denen man sich den Körper gebildet denken darf, die Lage von Schraubenlinien an, und zugleich empfindet man einen Widerstand, welcher um so grösser wird, je weiter man die Drehung ausführt. Man nennt diesen Widerstand oder die in dem Cylinder etc. durch Drehung hervorgerufenen Spannungen drehende oder Torsionselasticität.

Frage 158. Wie äussert sich die Torsionselasticität, nachdem die den Körper drehende Kraft zu wirken aufhört?

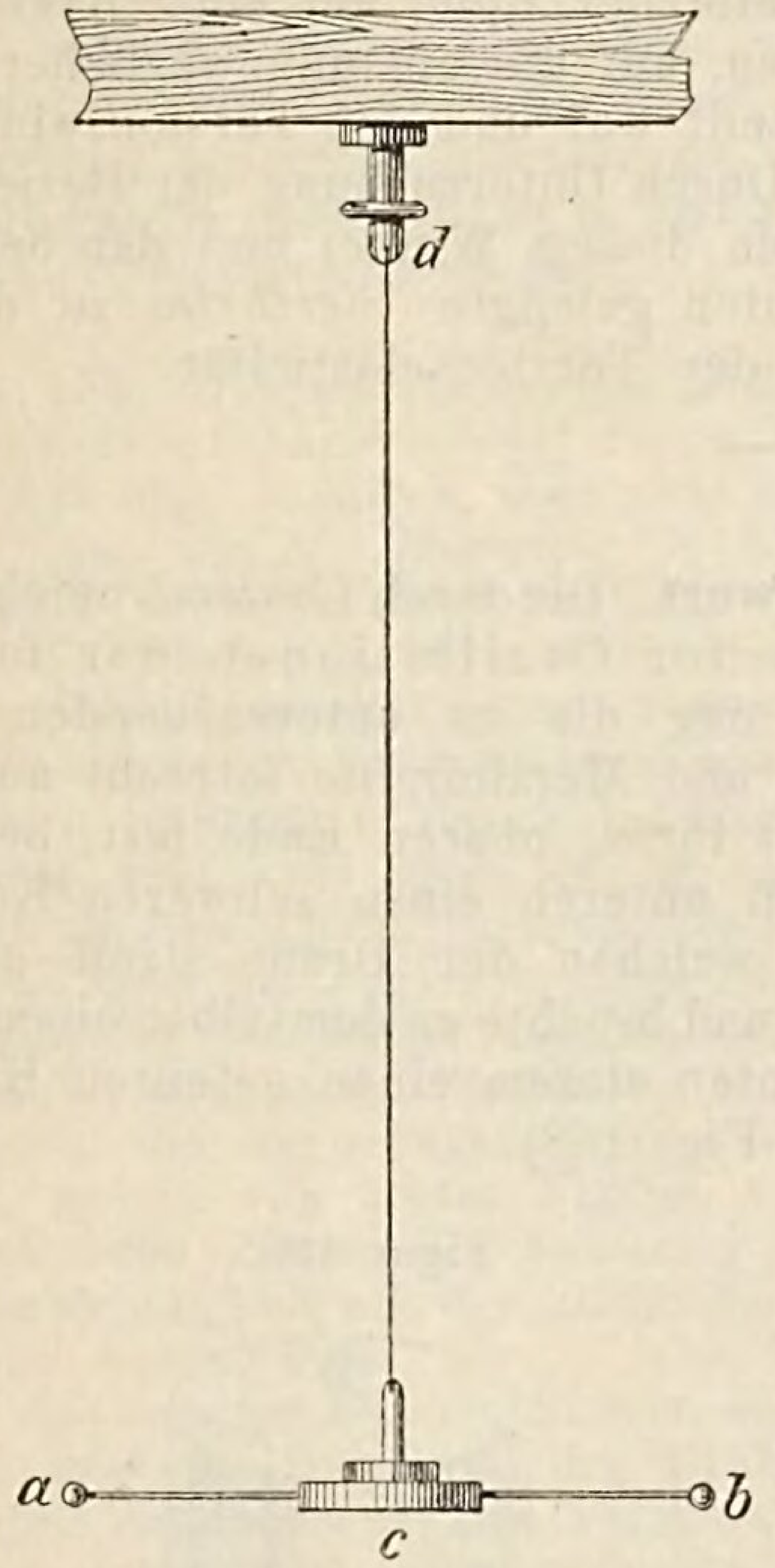
Erkl. 154. Die Torsionselasticität kommt in vielfacher Beziehung in Betracht. Sie bildet die Grundlage der Drehwage (siehe Antwort auf Frage 166) und ist auch bei der Konstruktion der Wellbäume und Zapfen zu berücksichtigen, welche nicht nur infolge der angebrachten Lasten, Räder etc. einen Druck auszuhalten haben, sondern auch mit grösserer oder geringerer Kraft um ihre Längsachsen gedreht werden.

Erkl. 155. Sowie die Erforschung der Elasticität der verschiedenen Körper, welche sie gegen eine ausdehnende oder zusammendrückende und eine beugende Kraft ausüben, vorzüglich deswegen vielfach angestellt worden ist, um die Lasten kennen zu lernen, welche dieselben auf die eine oder andere Weise zu tragen vermögen, so hat man auch diejenige Stärke der verschiedenen Körper untersucht, womit sie einer sie um ihre Achse drehenden Gewalt Wiederstand leisten. Indessen sind Versuche hierüber weit seltener als diejenigen, welche zur Erforschung der absoluten, relativen und rückwirkenden Festigkeit der Körper angestellt wurden.

Antwort. Sobald die drehende Kraft aufhört, auf den stabförmigen Körper einzuwirken, suchen die hervorgerufenen Spannungen denselben wieder in die ursprüngliche Lage zurückzudrehen und bewirken, wenn die Drehung eine nur mässige war, dass die verdrehten Fasern durch eine Reihe von Schwingungen um die Längsachse in die frühere Lage ganz wieder zurückkehren. Wenn dagegen die Drehung gewisse Grenzen überschreitet und dann erst der Stab sich selbst überlassen wird, so bleibt eine grössere oder geringere Verdrehung zurück und bei noch weiter gehender Drehung zerreissen endlich die Fasern (und zwar jene, welche der Achse am entferntesten liegen, zuerst) und ein Stück des Stabes wird von dem andern abgedreht oder abgewunden.

Frage 159. Wie kann man im allgemeinen verfahren, um die Torsionselasticität eines Stabes zu untersuchen?

Figur 157.



Antwort. Um die Torsionselasticität zu untersuchen, welche auftritt, wenn die einzelnen Schichten eines Stabes durch Drehung gegeneinander verschoben werden, klemmt man am einfachsten den Stab oder Draht an seinem einen Ende fest und bringt an seinem andern Ende einen Hebelarm nebst Gewichten an, siehe Fig. 157, welcher zur Längsrichtung des Stabes senkrecht steht und an dem die drehende Kraft wirkt. Wie schon oben bemerkt, entwickelt sich dann in dem Stab durch die Verschiebung der Schichten eine der Drehung entgegenwirkende Kraft, welche mit der Grösse des Winkels zunimmt, um welchen man das untere Ende des Stabes dreht.

Frage 160. Von welchen Physikern sind die ausgedehntesten Untersuchungen über die Torsionselasticität angestellt worden?

Antwort. Die ausgedehntesten Untersuchungen der Torsionselasticität resp. der Beziehungen zwischen der Torsionskraft und dem Drehungswinkel wurden von *Coulomb* und *Wertheim* angestellt.

Frage 161. Wodurch unterscheiden sich die Untersuchungen der genannten Physiker von einander?

Antwort. *Coulomb* untersuchte gedrehte Haare, Seidenfäden und metallene Drähte, also Körper von sehr geringer Dicke, während sich *Wertheims* Versuche auf Stäbe von grossen Dimensionen erstreckten.

Coulomb wandte bei seinen Versuchen die sog. Methode der Oscillationen[1]) an (siehe Antw. auf Frage 162). *Wertheim* aber benutzte eine schwere eiserne Bank mit zwei Aufsätzen (ähnlich denen einer Drehbank), in deren einem das eine Ende des zu untersuchenden horizontal liegenden Stabes festgeklemmt wurde. An das andere Ende

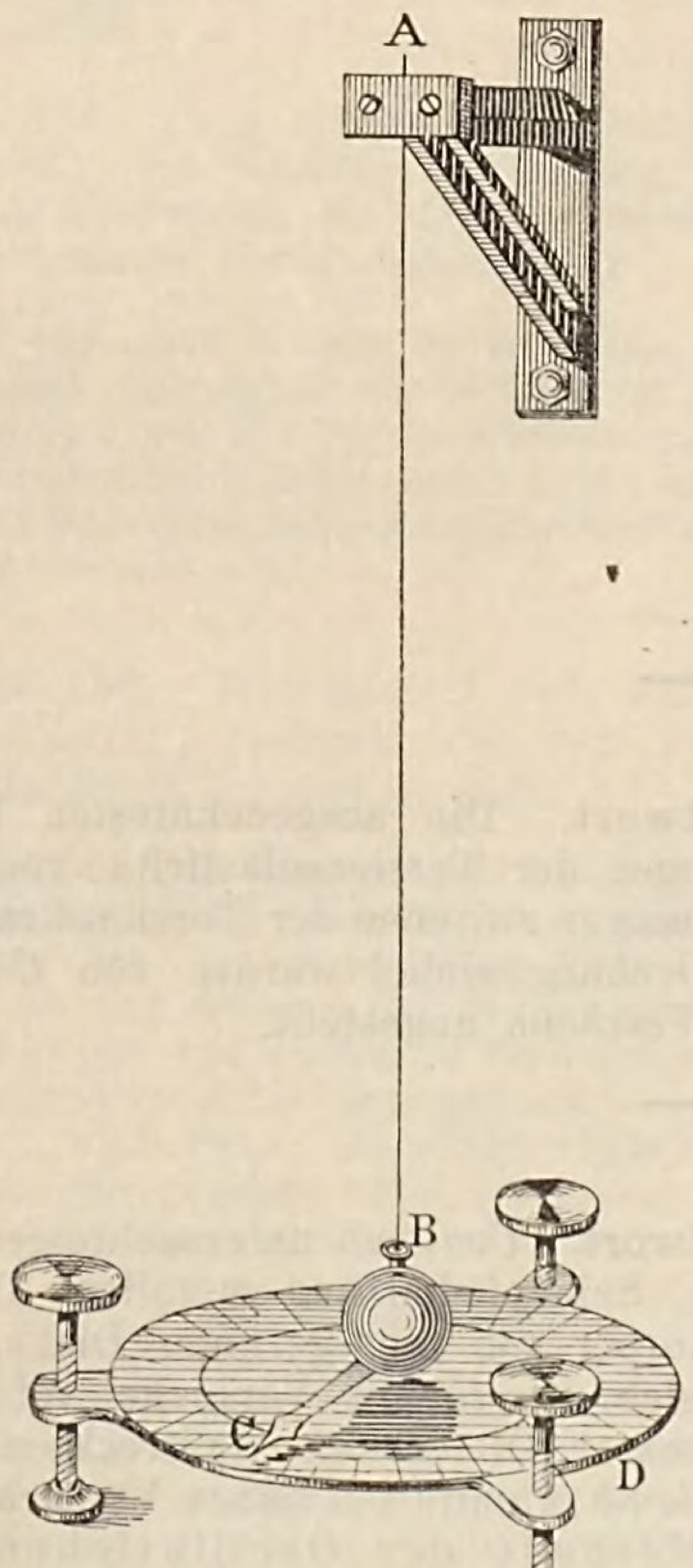
Erkl. 156. Oscillieren (latein. oscillāre) heisst schwingen, Schwingungen machen, sich in einer schwingenden Bewegung hin- und herbewegen; auch schwanken, schaukeln. Die Oscillation (lat. oscillatĭo), d. i. die Schwingung, schwingende Bewegung, der Schwung oder die Vibration (spätlat. vibratio).

[1]) Siehe Erkl. 156.

schraubte er eine zwischen zwei Lagern drehbare hohle Achse mit Rolle und letztere wurde durch angehängte Gewichte in Drehung versetzt. Um die Grösse der jedesmaligen Drehung messen zu können, war die eine Seite der Rolle mit einer Kreisteilung versehen, auf die ein unbeweglicher Zeiger eingestellt war und den Torsionswinkel angab. Durch Untersuchung der Beziehungen zwischen diesem Winkel und den benutzten Gewichten gelangte *Wertheim* zu den Gesetzen der Torsionselasticität.

Frage 162. Worin bestand *Coulombs* Methode der Oscillation?

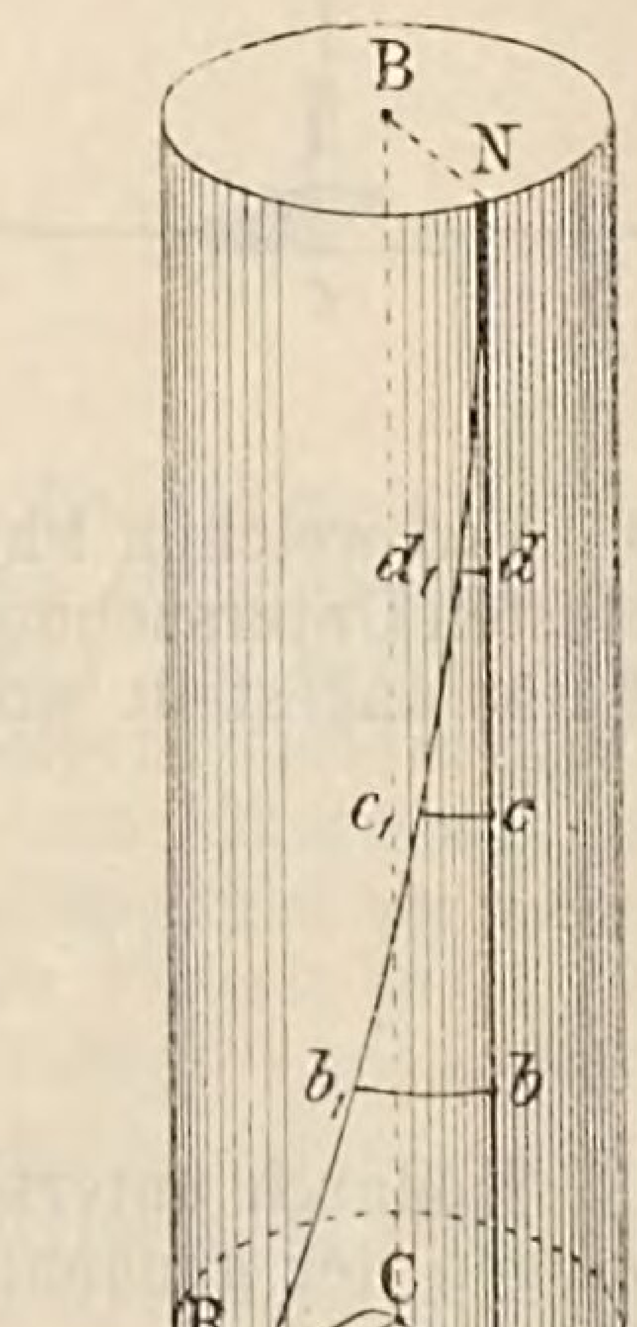
Figur 158.



Erkl. 157. *Coulomb* befestigte am unteren Ende des Drahts zur Streckung desselben einen Metallcylinder so, dass die Achse desselben mit der des Drahts eine gerade Linie bildete. Anstatt eines Cylinders nimmt man bei Wiederholung dieses Coulombschen Versuchs am ein-

Antwort. Die durch *Coulomb* befolgte Methode der Oscillationen war folgende: Er hing die zu untersuchenden Haare, Fäden und Metalldrähte lotrecht auf, band sie mit ihrem oberen Ende fest, befestigte an dem unteren einen schweren Körper[1]), durch welchen der Draht straff gespannt wurde und brachte an demselben einen Zeiger und unter diesem einen geteilten Kreis an (siehe Fig. 158).

Figur 159.



Wurde dann die Belastung B um ihre senkrechte Achse gedreht, so durchlief der Zeiger C die der Drehung zugehörigen Grade auf dem geteilten Kreis. Stellt nun AB (Fig. 159) ein stark vergrössertes Stück dieses in B befestigten Drahts vor und wird derselbe so um seine Achse gedreht, dass

[1]) Siehe Erkl. 157.

fachsten eine Metallkugel, wie sie in Fig. 158 dargestellt ist. Hat man eine kleine Setzwage oder noch besser eine Libelle zur Hand, mit deren Hilfe man einen Tisch genau horizontal aufstellen kann, so kann man sich den Teilkreis auf Papier selbst anfertigen und mit Kopier- oder Heftzwecken auf der Tischplatte so befestigen, dass die Kugel genau über der Mitte desselben schwebt. Den Faden kann man, in Ermangelung anderer Vorrichtungen, nötigenfalls mit seinem oberen Ende in den Klemmen eines Retortenhalters befestigen.

Erkl. 158. Das am Schluss der nebenstehenden Antwort erwähnte Gesetz von *Coulomb* ist ein nur ideal richtiges, aber nicht praktisch giltiges, da, wie *M. Baumeister* in Würzburg 1882 durch Versuche dargethan hat, durch das Ziehen die Drähte in ihrer Dichte und noch mehr in ihrer Elasticität geändert werden, was durchaus erklärlich ist, wenn man erwägt, wie ein Draht, während er durch das Zugloch des Zieheisens geht, von zwei Kräften in seiner molekularen Beschaffenheit angegriffen wird, von denen die eine, die Zugkraft, seine Dichtigkeit zu verringern, die andere dagegen durch seitliches Zusammenpressen dieselbe zu vergrössern strebt, und wie von vornherein nicht festzustellen ist, welche von beiden Kräften vorwaltet, nachdem beim Ziehen die Spannung und die Ziehgeschwindigkeit mit der Dicke der Drähte verändert werden muss.

Aus *Baumeisters* Untersuchungen ergibt sich ferner, dass die Spannung der Drähte nicht ganz ohne Einfluss auf ihre Torsion ist, dass geglühte Drähte eine grössere Dichte und Torsionselasticität zu besitzen scheinen als die ungeglühten (während ihre Tragkraft bedeutend kleiner ist), und dass die Verschiedenheit des Materials selbst in einem und demselben Drahtstück Schwankungen des Torsionsmodulus veranlasst. Hierüber sagt schon *Coulomb* in seiner Abhandlung (siehe Erkl. 164):

„Die Untersuchung zeigt viele Unregelmässigkeiten in den Resultaten: zwei Spulen desselben Drahts und derselben Nummer geben nicht immer dieselbe Kraft bei gleichem Torsionswinkel, was nur der Herstellungsart der Drähte zugeschrieben werden kann, dem grösseren oder geringeren Druck, den sie erleiden, wenn sie das Loch des Zieheisens passieren, dem Ausglühen, das man ihnen gibt, um allmählich den Durchmesser von Nummer zu Nummer zu bringen.“

Erkl. 159. Aus einer Betrachtung der Fig. 159 ergibt sich ohne weiteres, dass die Verdrehung bei A dem Bogen AM entspricht; bei b wird unter dem Einfluss derselben Kraft der Bogen:

$$bb_1 = \frac{Nb}{NA} \cdot AM,$$

bei c der Bogen:

$$cc_1 = \frac{Nc}{NA} \cdot AM$$

ein Streif seiner Oberfläche aus der Lage NA in die Lage NM gebracht wird, also der Punkt A den dem Winkel ACM zugehörigen Bogen durchlaufen hat, so werden die Punkte b, c, d etc. an die Oerter b_1, c_1, d_1 etc. gerückt sein und vermöge der anziehenden Kräfte, welche die Festigkeit des Körpers bedingen, wieder an ihre frühere Lage zu kommen sich bestreben[1]). Was aber von einem Teil der Oberfläche gilt, gilt von allen Teilen des ganzen Drahts. Würde der Bogen AM verdoppelt, so würde die Abweichung eines jeden der Punkte b, c, d etc. von seinem früheren Ort verdoppelt werden und nach dem früher über das Verhältnis der Elasticität aufgefundenen Gesetz (vergl. Antw. auf Frage 17) würde auch der Widerstand oder die Reaktion der Teile gegen die drehende Kraft doppelt sein, folglich muss auch der ganze Draht mit doppelter Kraft der Drehung entgegenstreben und somit werden die einzelnen Teile des Drahts nach dem Aufhören der Kraftwirkung jetzt mit doppelter Geschwindigkeit wieder in ihre frühere Gleichgewichtslage zurückkehren, der Winkel ACM wird abnehmen, zuletzt $= 0$ werden, dann aber vermöge der erhaltenen Bewegung (nach dem Gesetz der Beharrung oder Trägheit, siehe das Lehrb. der allgemeinen Eigenschaften der Körper) nach der entgegengesetzten Seite übergehen. Dadurch wird die Bewegung allmählich verzögert und wird schliesslich ganz aufhören, sobald der Winkel der entgegengesetzten Drehung gleich dem ursprünglichen Torsionswinkel geworden ist. Die Bewegung wird sich alsdann umkehren und der Draht sich so lange hin- und herdrehen, bis durch Reibung, Widerstand der Luft und unvollkommene Elasticität des Drahts die Schwingungen endlich aufhören. Indem nun die Kräfte, welche den Körper anregen, an den ursprünglichen Ort seiner Ruhe zurückzukommen, dem Abstand von diesem Punkt direkt proportional sind, so werden diese Schwingungen alle in gleichen Zeiten geschehen, wie gross auch der zu durchlaufende Bogen sein mag.

Umgekehrt können wir schliessen, dass, wenn alle Schwingungen in gleichen Zeiten stattfinden, oder was dasselbe sagt, wenn alle Oscillationen isochron[2]) sind, dass dann auch die Torsionskraft dem Torsionswinkel proportional ist.

[1]) Siehe Erkl. 159.
[2]) „ „ 160.

beschrieben. Bei gleich starker Torsion zweier gleichartiger Stäbe von ungleicher Länge aber gleichem Durchmesser verhalten sich also die Torsionsbögen direkt wie die Stablängen, oder um eine Verdrehung bis zu einer bestimmten Bogenlänge zu erreichen, verhält sich die erforderliche Kraft umgekehrt wie die Länge des Stabes.

Erkl. 160. Isochron oder isochrónisch (vom griech. isos, gleich, und chrónos, die Zeit) heisst gleichlangzeitig oder gleichlange Zeit dauernd; der Isochronismus, d. i. die gleiche Zeitdauer, z. B. der Pendelschwingungen einer Uhr.

Frage 163. Wie lauten die von *Coulomb* und *Wertheim* aufgestellten und bewiesenen Gesetze der Torsionselasticität?

Erkl. 161. Nennt man die drehende Kraft, resp. das bei Wertheims Methode an dem Umfang der Rolle wirkende Gewicht $= P$, den Hebelarm der Kraft $= R$, so ist $PR = M$ das sog. Drehungsmoment[1]).

1). Nimmt man bei einem und demselben Stab das Drehungsmoment 2, 3, 4 ... n mal so gross, indem man entweder an ein und demselben Hebelarm eine 2, 3, 4 ... n mal so grosse Kraft angreifen lässt, oder ein und dieselbe Kraft an einem 2, 3, 4 ... n mal so grossen Hebelarm wirken lässt, so wird der Torsionswinkel in demselben Verhältnis 2, 3, 4 ... n mal so gross.

2). Wendet man Stäbe von demselben Material und demselben Durchmesser, aber von verschiedener Länge an, so findet man bei Anwendung derselben Kraft, dass bei einem 2, 3, 4, n mal so langen Stab der Torsionswinkel 2, 3, 4, n mal so gross wird als bei einem Stab von einfacher Länge.

3). Wendet man cylindrische Stäbe von gleichem Material und gleicher Länge an, deren Radien sich verhalten wie $1:2:3:4:n$, so werden bei Anwendung derselben Kraft die Torsionswinkel im Verhältnis $1:16:81:256$ oder $1^4 : 2^4 : 3^4 : 4^4 : n^4$ kleiner, so dass, wenn der Winkel, der bei dem Radius 1 entsteht, ω genannt wird, die folgenden Winkel $\frac{\omega}{16}, \frac{\omega}{81}, \frac{\omega}{256}, \frac{\omega}{n^4}$ betragen.

4). Wenn man bei gleichen Dimensionen und gleichen Kräften Stäbe von verschiedenem Material benutzt, so findet man die Torsionswinkel verschieden.

Erkl 162. Unter dem Drehungsmoment einer Kraft P in Bezug auf einen beliebigen festen Punkt O (siehe Fig. 160) versteht man das Produkt, bestehend aus der Kraft P und dem senkrechten Abstand MO ihrer Richtungslinie von dem festen Drehpunkt O. Letzteren nennt man den Hebelarm oder Arm der Kraft.

[1]) Siehe Erkl. 162.

Antwort. Die von *Coulomb* und *Wertheim* aufgestellten und bewiesenen Gesetze sind folgende:

1). Die Torsionskraft ist dem Torsionswinkel proportional.

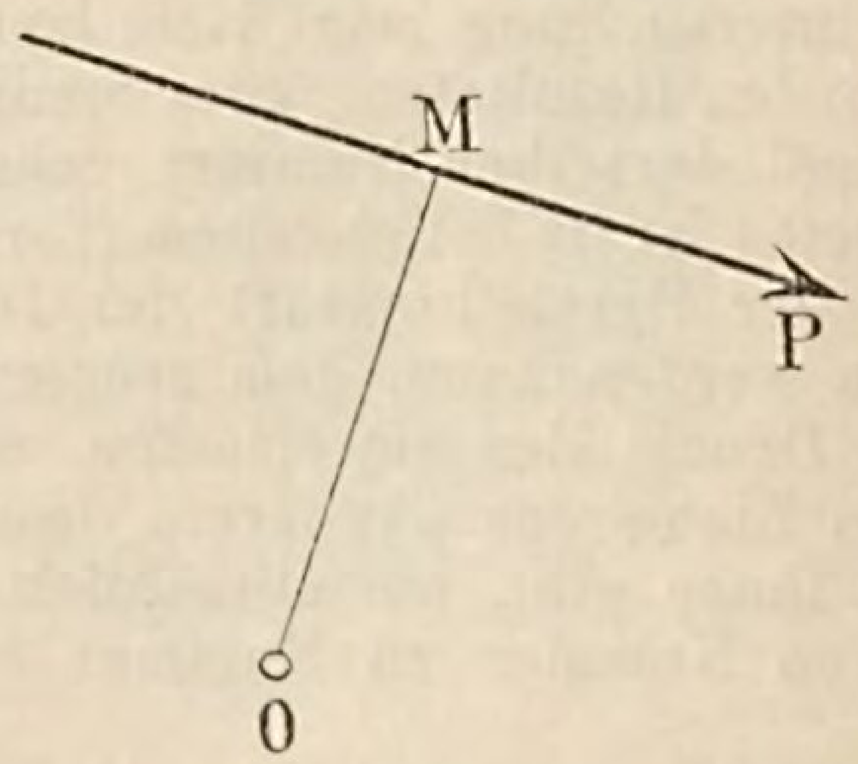
2). Der Torsionswinkel ist der Stablänge proportional.

3). Der Torsionswinkel ist umgekehrt proportional der vierten Potenz des Stabhalbmessers.

4). Der Torsionswinkel ist von der Natur oder dem Material des Stabes abhängig.

5). Der Torsionswinkel ist von der Spannung des Drahtes unabhängig.

Figur 160.



Frage 164. In welche mathematische Formel lassen sich die genannten Gesetze zusammenfassen und wie lautet diese Formel in Worten ausgedrückt?

Antwort. Bezeichnet man den Torsionswinkel mit ω, die Kraft mit P, die Stablänge mit l, den Halbmesser des Stabes mit r und den vom Material abhängigen Torsionskoeffizienten mit $\frac{1}{T}$, dann ist, den obigen Gesetzen entsprechend:

$$\omega = \frac{1}{T} \cdot \frac{Pl}{r^4}$$

Die Torsionskraft des Stabes ist gleich der Kraft, welche dem Stab die Drehung erteilt, oder:

$$P = \omega T \cdot \frac{r^4}{l}$$

d. h. Die Torsionskraft ist proportional dem Torsionswinkel, der vierten Potenz des Radius des gedrehten Stabes und umgekehrt proportional der Länge desselben, ausserdem für jede Substanz noch proportional dem sogenannten Torsionskoeffizienten[1]).

[1]) Siehe Erkl. 163.

Erkl. 163. Der Torsionskoeffizient ist dasjenige Gewicht oder diejenige Kraft, welche am Ende eines Stabhalbmessers von 1 mm Länge wirkend einen Stab von 1 mm Länge so stark dreht, dass der Endpunkt des Radius einen Bogen von 1 mm zurücklegt.

Frage 165. Die Untersuchungen, welche *Coulomb* über die Elasticität gedrehter Fäden und metallener Drähte anstellte, führten denselben zur Erfindung welchen Apparates?

Antwort. Die Untersuchungen, welche *Coulomb* über die Reaktion anstellte, welche gedrehte Haare, Seidenfäden und Metalldrähte ausüben, führten ihn zur Erfindung seiner Drehwage oder „Balance de torsion", welche sowohl zum Nachweis der Torsionselasticität als auch namentlich zu elektrischen und magnetischen Untersuchungen benutzt wird und deshalb auch den Namen der elektrischen Wage erhielt.

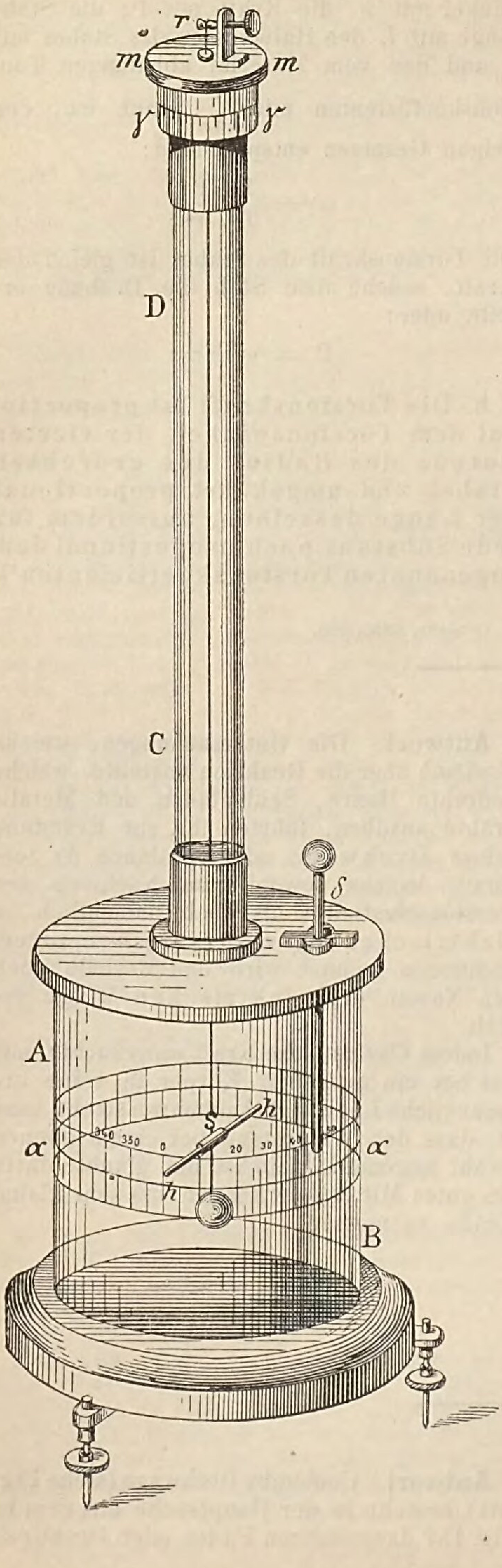
Indem *Coulomb* die Kraft untersuchte, mit welcher ein gedrehter Körper in seine ursprüngliche Lage zurückzukehren strebt, fand er, dass der Widerstand bei einem dünnen Draht ungemein klein ist und glaubte darin ein gutes Mittel zu erkennen, um sehr kleine Kräfte zu messen.

Erkl. 164. *Charles August de Coulomb*, französischer Physiker und Ingenieur, wurde am 14. Juni 1736 in Angoulême geboren Schon 1776 hatte er eine Abhandlung über die Statik der Gewölbe, und 1777 eine Arbeit über Magnetnadeln veröffentlicht. In Rochefort stellte er im grossen Versuche über die Steifigkeit der Seile an und entwickelte dann seine Theorie der einfachen Maschinen in einer von der Akademie preisgekrönten Abhandlung. Er starb am 23. August 1806. Sein Ruhm als Physiker gründet sich besonders auf die von ihm erfundene Drehwage, deren Konstruktion er in seiner Arbeit: „Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion, et sur l'elasticité des fils de métal: Application de cette théorie à l'emploi des métaux dans les arts et dans différentes expériences de physique: Construction de différentes balances de torsion pour mesurer les plus petits degrés de force. Observations sur les loix de l'elasticité et de la cohérence," Paris 1784 veröffentlichte.

Frage 166. Wie ist Coulombs Drehwage eingerichtet?

Antwort. Coulombs Drehwage (siehe Fig. 161) besteht in der Hauptsache aus dem in Fig. 157 dargestellten Faden oder Draht *cd*,

Figur 161.



an welchem sich der horizontal schwebende Arm ab befindet (weswegen der Apparat den Namen einer Wage verdient). Nach den oben erwähnten Gesetzen wird die Drehwage um so empfindlicher sein, je länger der Hebelarm $\overline{ac}$ und der ihn tragende Draht $\overline{dc}$ und je geringer der Widerstand der Drehung ist, welchen der Faden dc ausübt, vorausgesetzt, dass derselbe zugleich hinlänglich elastisch ist, um nach der erforderlichen Umdrehung um seine Achse wieder auf seinen ursprünglichen Stand zu kommen. Um den Luftzug abzuhalten, wird der in Fig. 157 dargestellte Apparat in einen gläsernen Behälter gebracht, und weil so weite und lange Cylinder, als sie einerseits die Länge der Hebelarme und anderseits die Länge des Drahtes erfordern, kostspielig sein würden und viel Raum einnehmen, so besteht die gläserne Umgebung der Drehwage aus einem Cylinder AB von 25 bis 30 cm Höhe bei 20 cm Durchmesser, der mit einer in der Mitte durchbohrten Glas- oder Messingplatte bedeckt ist, auf welcher eine 2 cm weite und 40—50 cm lange Glasröhre so aufgerichtet ist, dass die geometrische Achse der Röhre mit der des Cylinders zusammenfällt. Etwa in der halben Höhe des Cylinders ist dessen Mantel in einem horizontalen Kreis $\alpha\alpha$ in 360° geteilt und in gleicher Höhe schwebt der Hebelarm, so dass man den von den Enden desselben durchlaufenen Bogen messen kann. Das obere Ende der Glasröhre hat eine Messingfassung $\gamma\gamma$, welche etwas weiter als die Röhre und in 4 mal 90° geteilt ist. Ein auf diese Fassung aufgeschobener, nach aussen aber in dieselbe Cylinderfläche fallender Ring ist auf derselben drehbar und trägt einen Strich als Index[1]) zu der Teilung. Durch beide Ringe geht eine Teilung von etwa 3 mm Weite und auf dem drehbaren Ring ist eine geränderte Platte von etwas grösserem Durchmesser festgelötet. Beide Ringe sind auf der äusseren Cylinderfläche versilbert und die Teilstriche mit schwarzem Lack eingerieben. Auf der Oberplatte des zweiten Ringes ist eine kleine Rolle angebracht, auf die sich ein Faden oder Draht aufwickeln kann, wenn man sie an dem auf ihre Achse gesteckten Kopf dreht[2]). Der Faden oder Draht ist mit seinem einen Ende an der Rolle befestigt, einigemale um dieselbe gewunden, dann durch die Bohrung und die Glasröhre nach dem unteren Glas-

[1]) Siehe Erkl. 166.
[2]) ,, ,, 167.

Erkl. 165. Eine Coulombsche einfache Drehwage zu Versuchen über Torsionselasticität und Adhäsion liefert Mechaniker *Ferdinand Ernecke*, Berlin SW, schon zu ℳ 25. Dieselbe grösser und mit Stellschrauben, die Teilung auf das Glasgefäss geätzt (siehe Fig. 161), kostet ℳ 50. Dieselbe mit Spiegelablesungen zu genauen Messungen ℳ 75. Auch *Leppin & Masche*, Berlin S, *Max Kohl*, Chemnitz, u. a. liefern die Drehwage zum Preis von ℳ 50 bis ℳ 75.

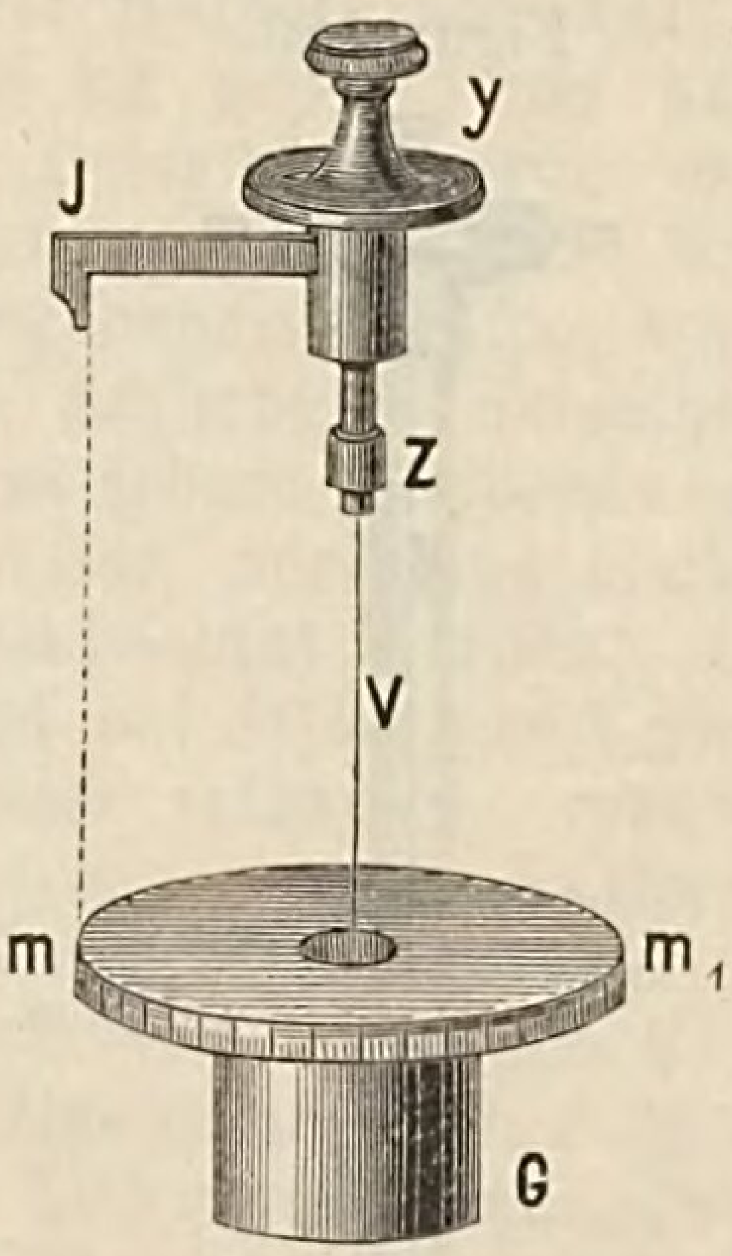
Erkl. 166. Der Index (latein.) ist der Zeiger, Anzeiger, auch der Zeigefinger.

Erkl. 167. Für Elasticitätsversuche ist die Aufhängung an der Rolle nicht immer zweckmässig, namentlich zu Versuchen mit Drähten. Man befestigt dann besser den Draht in einem Zapfen Z (siehe Fig. 162), welcher in den konischen Knopf Y endigt und in die, die Glasröhre verschliessende Kreisscheibe mm_1 so eingeschliffen ist, dass sich bei jeder Drehung dieses Knopfes auch der an demselben befestigte Draht mitsamt dem an seinem unteren Ende hängenden horizontalen Hebel dreht, und letzterem jede beliebige Gleichgewichtslage gegeben werden kann. Die Drehung des Knopfes Y muss sich so leicht bewerkstelligen lassen, dass sich hierbei die auch drehbare Scheibe mm_1 nicht mitdreht. Zur Bestimmung der Grösse der Drehung, welche dem Knopf Y und dem daran befestigten Draht gegeben wird, ist auf dem seitlichen Umfang der Kreisscheibe mm_1 eine Gradeinteilung und an dem Knopf Y selbst der Zeiger J angebracht, welcher stets auf die Gradteilung zeigt und ein Ablesen des Torsionswinkels ermöglicht.

Erkl. 168. Lange Drähte kehren auch nach bedeutenden Umdrehungen wieder in ihre vorige Stellung zurück. *Coulomb* erhielt z. B. Saiten von Messing in einer Länge von etwa 1 Meter 30 Stunden lang siebenmal durch einen ganzen Kreis umgedreht, und sie kamen dennoch mit unveränderter Elasticität wieder auf ihren anfänglichen Standpunkt zurück.

cylinder geführt, wo er den schon erwähnten horizontalen Stab trägt, welcher einmal dazu dient, den Draht zu strecken, dann auch der Zeiger für die Teilung ist. Wenn das Gewicht des Zeigers zur Streckung des Drahtes nicht ausreichen sollte, so hängt man noch eine kleine Metallkugel an. In die Deckplatte des Cylinders ist ein Loch gebohrt und dieses mit Messing ausgefuttert; es nimmt einen starken Draht δ auf, welcher in einen Knopf endigt und mit seinem unteren Ende noch etwas über die Ebene der Teilung herabreicht. Der Cylinder wird in einen eingedrehten Falz eines Fussbrettes gesetzt, das durch drei Fussschrauben horizontal gestellt werden kann. Hierdurch lässt sich immer bewirken, dass der eingehängte Faden oder Draht genau durch die Centren oder Mittelpunkte der oberen und unteren Teilung geht.

Figur 162.



Frage 167. Wie lässt sich mit Hilfe von Coulombs Drehwage der Isochronismus ungleich grosser Schwingungen eines Drahtes beweisen?

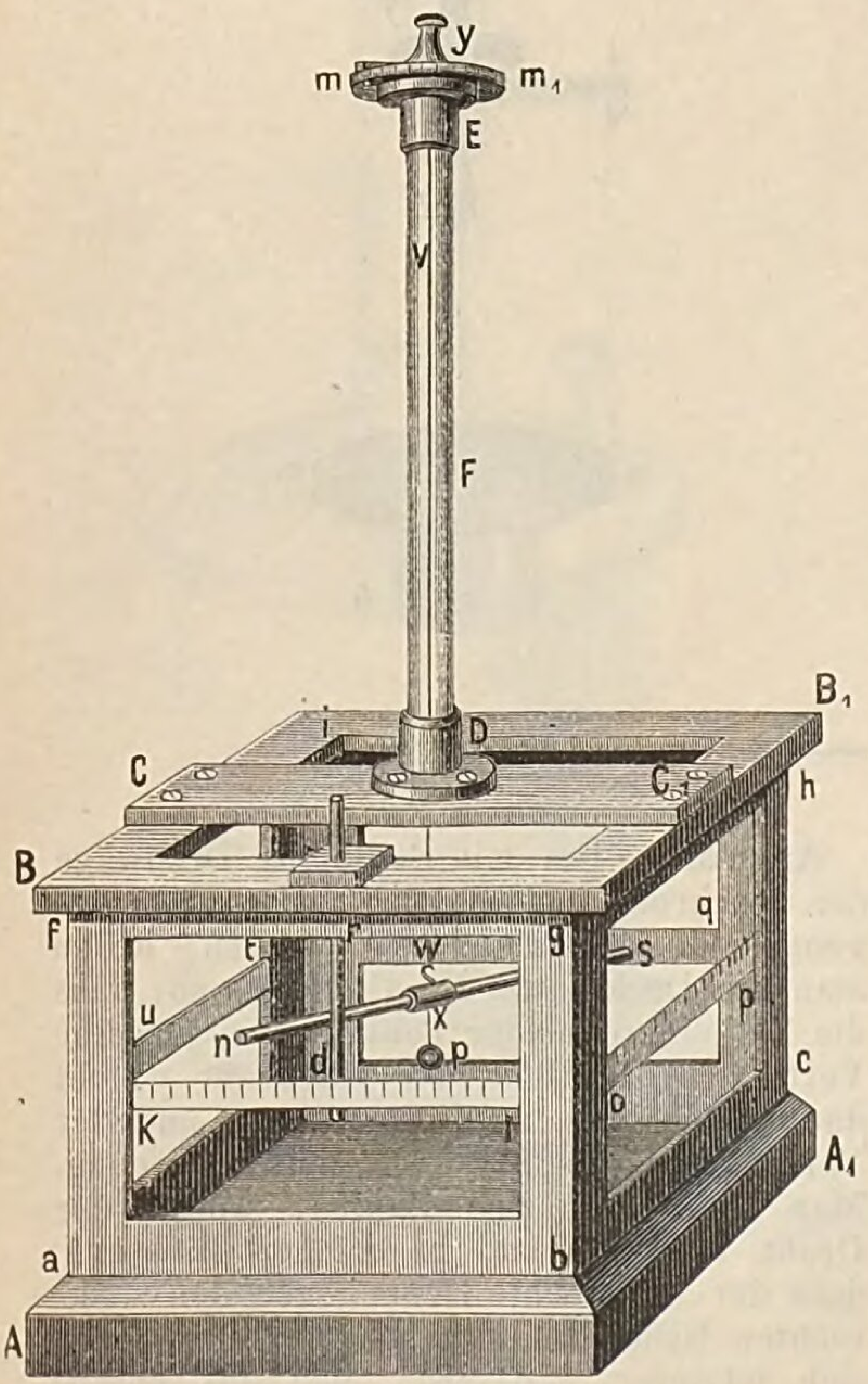
Antwort. Um mit Coulombs Drehwage den Isochronismus ungleich grosser Schwingungen eines Drahtes zu beweisen, drehe man die Deckplatte des Cylinders so, dass die Nullpunkte beider Teilungen in dieselbe Vertikalebene fallen; der Hilfsdraht δ steht dann gleichfalls in dieser Ebene und der Versuchsdraht ist dann ohne alle Drehung. Man drehe nun den Zapfen, woran der Draht befestigt ist, in solcher Richtung, dass der wagerechte Hebel gegen den senkrechten Hilfsdraht δ anschlägt, dann kann sich letzterer und also auch das untere Ende des Versuchsdrahtes nicht drehen, da

Erkl. 169. Die Coulombsche Drehwage kommt ausser der in Figur 161 dargestellten Form auch noch in einer andern, durch die Figur 163 dargestellten Form vor. Dieselbe besteht aus einem würfelförmigen Kasten *abcdifgh* von ca. 30 cm Höhe, dessen vier Seitenwände aus Glasscheiben bestehen, in deren halber Höhe die mit Gradeinteilung versehenen Papier- oder Messingstreifen *kl*, *op*, *qr* und *tu* horizontal befestigt sind. Dieser Kasten ist oben durch eine Glasscheibe abgeschlossen,

auf deren Rahmen BB_1 der Steg CC_1 befestigt ist, welcher in seiner Mitte eine grössere Durchbohrung trägt, um den senkrecht aufgehängten Faden oder Draht *vw* hindurchzulassen. Auf dem Steg CC_1 ist eine etwa 50 cm lange Glasröhre von 2 cm Durchmesser befestigt, welche in den messingenen Fassungen D und E ruht und zur Aufnahme des Drahtes *vw* dient, an dessen unterem Ende eine Hülse *x* angebracht ist, in welche der Stab, Hebel oder Zeiger *ns* jederzeit so gelegt werden kann, dass er sich nur in einer horizontalen Ebene drehen kann, sobald der Hilfsdraht *rd* entfernt wird. Die Vorrichtung zur Aufhängung des Drahtes *vw* ist die bereits in Erkl. 167 beschriebene.

Welche Abänderungen resp. Verbesserungen Coulombs Drehwage erfahren hat und wie mit derselben operiert wird, um die Wirkung des Erdmagnetismus auf einen drehbaren Magnetstab nachzuweisen oder um geringere Elektricitätsmengen zu messen, das ist ausführlich angegeben in Kleyers Lehrbuch des Magnetismus Seite 153 und folgende, sowie in Kleyers Lehrbuch der Reibungselektricität Seite 190 und folgende.

Figur 163.



der Draht aber oben gedreht wird, so kommt er in eine Lage, aus welcher ihn seine Elasticität in die anfängliche Lage zurückzudrehen bemüht ist. Hebt man nun den Hilfsdraht δ leise, d. h. ohne an dem wagerecht schwebenden Hebel Erschütterungen hervorzurufen, so wird der Versuchsdraht sofort der Kraft der Elasticität folgen und, da letztere ununterbrochen wirkt, sich mit beschleunigter Geschwindigkeit nach der Richtung drehen, nach welcher vorher der obere geteilte Ring gedreht wurde. Infolge des Beharrungsvermögens geht aber der Draht nebst Hebel über seine ursprüngliche Lage hinaus, die elastische Kraft wirkt jetzt seiner Bewegung entgegen und vermindert die Geschwindigkeit der Drehung immer mehr und mehr, bis dieselbe gleich Null wird und von neuem eine entgegengesetzte Drehung eintritt, wie es ausführlich schon in Antwort auf Frage 162 beschrieben wurde.

Neben der Drehwage stelle man noch ein Pendel mit hörbaren Schlägen auf, um bei den Versuchen die Zeit, d. h. die Dauer von einer bestimmten Anzahl (n) Schwingungen zu messen. Es braucht dies kein Pendel zu sein, welches genau Sekunden schlägt, nur muss es während der Dauer zusammengehöriger Versuche Schwingungen von gleicher Dauer machen, also seine anfängliche Länge unverändert beibehalten.

Man drehe nun den Ring mm_1 (Fig. 162) z. B. um 10°, hebe den Hilfsdraht δ heraus, zähle die Schwingungen bis zu einer festgesetzten Zahl n z. B. 20, und lasse von einem zweiten Beobachter die Pendelschläge zählen (selbstverständlich muss gleichzeitig mit dem Auslösen des Hilfsdrahtes der erste Pendelschlag beginnen). Soll der Versuch Anspruch auf grössere Genauigkeit machen können, so muss man die Schwingungen des Stäbchens *hh* durch ein Fernrohr mit senkrechtem Faden beobachten, der auf die Ruhelage des Stäbchens gerichtet ist. Nehmen wir an, es seien n Schwingungen in t Sekunden gemacht; man lasse dann den tordierten Draht wieder zur Ruhe kommen, drehe den Ring mm_1 um eine grössere Anzahl von Graden als vorher, d. h. man gebe dem Draht eine grössere Schwingungsweite oder Amplitude[1]), z. B. von 20 und stelle damit den vorigen Versuch wieder an. Der Draht macht jetzt grössere Schwingungen, aber bei den stärkeren Drehungen ist auch seine Elasticität grösser, und der

[1]) Siehe Erkl. 170.

Erkl. 170. Amplitudo, lat. (von amplus, weit, geräumig) bedeutet die Weite, der Umfang; insbesondere die Bogenweite; die äusserste Entfernung eines schwingenden Körpers von der Gleichgewichtslage; französisch Amplitude (spr. angplitüd.)

Versuch wird zeigen, dass er wieder n Schwingungen in derselben Sekundenzahl t zurücklegt. Kleine und grosse Schwingungen werden also in derselben Zeit zurückgelegt oder sie sind isochron, folglich muss die Kraft durch Elasticität dem Winkel, um welchen der Draht gedreht wird, dem sog. Torsionswinkel proportional sein.

Frage 168. Welcher Satz gilt für den Fall, dass auf einen Draht gleichzeitig eine drehende Kraft und eine dazu senkrecht ziehende Kraft einwirken?

Antwort. Wirken auf einen Draht gleichzeitig ein tordierendes Moment und ein dazu senkrechter Zug, so verstärken sich dieselben gegenseitig in ihrer Wirkung.

Frage 169. Von wem wurde dieser Satz aufgestellt und durch welches Experiment wurde er bewiesen?

Erkl. 171. Ueber das Zusammenwirken von Zug und Torsion bei Metalldrähten stellte *G. Wiedemann* 1879 den Satz auf: Wenn man einen Draht, welchem eine bleibende Drehung erteilt worden ist, abwechselnd be- und entlastet, so entzieht man ihm dadurch einen Teil seiner bleibenden Torsion, und erst nach wiederholten Be- und Entlastungen gelangt der Draht in einen Zustand, in welchem eine dauernde Aenderung seiner bleibenden Drehung durch Be- und Entlasten nicht mehr eintritt. Ueber die Wirkung, welche in diesem (stationären, bleibenden oder beständigen) Zustand eine Belastung des Drahtes durch Zug hervorbringt, bemerkte *W. Thomson* (1878), dass ein Stahldraht sich beim Belasten verdreht, und nach Fortnahme der Belastung wieder in seine alte Lage zurückkehrt, und dasselbe beobachtete *E. Warburg* (1880) bei Kupfer- und Eisendrähten, mit der weiteren Wahrnehmung, dass die in dem stationären Zustand durch einen Zug bewirkte Torsion der ziehenden Kraft nahezu proportional ist, und *F. Himstedt* bemerkte bei seinen Versuchen, dass, wenn man einem Drahte, der durch ein angehängtes Gewicht gespannt gehalten wird, eine bleibende Drehung erteilt, stets eine bleibende Verlängerung desselben eintritt.

Erkl. 172. *Kohlrausch* und *Boomis* haben die Torsion benutzt, um die Aenderungen zu messen, welche die elastische Kraft der Körper durch Erwärmung erfährt. Aus ihren Beobachtungen hat sich ergeben, dass zwischen 0° bis 100° der Elasticitätsmodulus des Eisens sich um 5 %, der des Kupfers um 6 %, der des Messings um 6,2 % vermindert. Die bei steigender Temperatur schon an sich wahrscheinliche Abnahme der elastischen Kraft hatte schon früher *Wertheim* an einer grösseren Zahl von Metallen nachgewiesen.

Antwort. Dieser Satz wurde von *F. Himstedt* in Freiburg i. Br. im Jahre 1882 aufgestellt und neben anderen Versuchen besonders durch folgendes Experiment bewiesen:

Ein weicher Kupferdraht war drei Tage lang mit 10 kg pro □ mm belastet gewesen. Die Belastung wurde entfernt bis auf 1 kg pro □ mm und dem Drahte eine vorübergehende Torsion von 90° erteilt. Nach Aufhebung derselben konnte weder eine messbare bleibende oder (permanente) Torsion, noch eine bleibende Verlängerung beobachtet werden. Der Draht wurde hierauf bei 10 kg pro □ mm wieder temporär (oder zeitweise, vorübergehend) um 90° gedreht. Nach Entfernung der drehenden Kraft zeigte derselbe eine bleibende Torsion von mehr als 8° und eine bleibende Verlängerung von 0,22 mm. Also der Zug von 10 kg pro □ mm Querschnittsfläche allein ist nicht im stande, eine bleibende Verlängerung hervorzubringen, und die zeitweise oder temporäre Torsion von 90° allein ist nicht im stande, eine bleibende oder permanente Torsion zu bewirken; wirken aber der Zug und die drehende Kraft gleichzeitig auf den Draht, so tritt sowohl bleibende Verlängerung als auch bleibende Drehung auf.

b). Bestimmung des Torsionsmoments, der Torsionskraft und des grössten Torsionswinkels eines beliebigen Querschnitts.

Frage 170. Um für den Gleichgewichtszustand eines auf Torsions- oder Verdrehungsfestigkeit beanspruchten Körpers eine algebraische Formel entwickeln zu können, haben wir uns welche Kraftwirkungen zu vergegenwärtigen?

Antwort. Wollen wir den Gleichgewichtszustand bei einer Beanspruchung auf Torsions- oder Verdrehungsfestigkeit innerhalb der Elasticitätsgrenze durch eine algebraische Formel darstellen, so haben wir einerseits von aussen auf den Körper einwirkend ein Moment M, bestehend aus Kraft P mal senkrechten Abstand R derselben von der Drehachse (resp. die algebraische Summe von zwei oder mehreren Drehungsmomenten), anderseits haben wir im Stab den Widerstand, welchen die Querschnittselemente zweier einander unendlich nahe gelegenen Normalquerschnitte einer gegenseitigen Verschiebung (wobei sich die Querschnitte um die Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte drehen) entgegensetzen.

Erkl. 173. Die Querschnittselemente eines Stabes widerstehen einer Beanspruchung auf Drehung von aussen in ganz ähnlicher Weise wie bei Biegung. Dort bilden die Querschnittselemente oder Faserquerschnitte mit dem Quadrat ihrer Abstände von der neutralen Achse, algebraisch summiert, zusammen ein Moment, das sog. Trägheitsmoment T.

Frage 171. Denkt man sich zwei ganz gleichartige Prismen in, zu ihren Achsen parallele Fasern zerlegt und nimmt man an, dass von jedem dieser Prismen eine einzelne Faser beziehlich derselben drehenden Kraft unterworfen ist, so werden die durch diese äusseren Kräfte in den beiden Fasern erzeugten inneren Spannungen nach den bisherigen Erfahrungssätzen in welchem Verhältnis zu einander stehen?

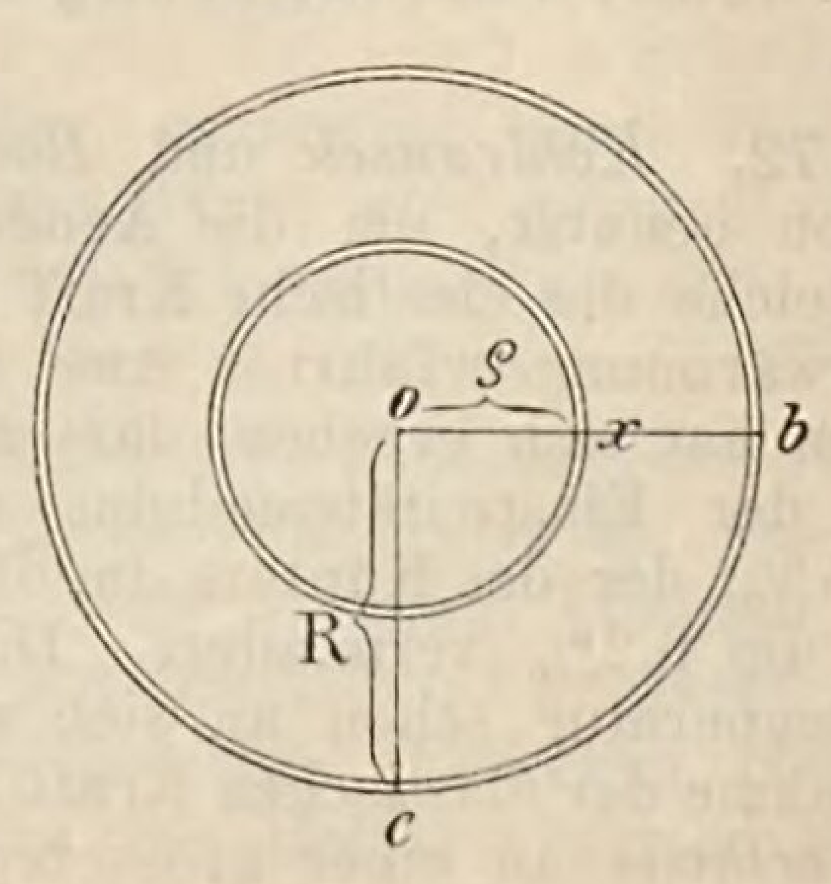
Antwort. Denkt man sich zwei ganz gleichartige Prismen in zu ihren Achsen parallele Fasern zerlegt und nimmt man an, dass von jedem dieser Prismen eine einzelne Faser beziehlich derselben drehenden Kraft unterworfen ist, so werden die durch diese äusseren Kräfte in den beiden Fasern erzeugten inneren Spannungen s und S nach den bisherigen Erfahrungssätzen um so grösser sein, je grösser der Querschnitt der Faser ist, je grösser der Drehungswinkel ist und je entfernter die Fasern von der Drehachse liegen [1]; dagegen werden die Spannungen in dem Masse geringer sein, je mehr Länge die Fasern besitzen.

[1]) Siehe Erkl. 174.

Erkl. 174. Die Figur 164 stelle einen Querschnitt des auf Drehung beanspruchten Stabes vor, dessen sämtliche Längsfasern eine Drehung erfuhren, die bei allen derselben Winkelöffnung $boc = \omega$ entspricht. Die Fasern des äusseren Umfangs waren infolgedessen gezwungen, mit ihren in dem betreffenden Querschnitt gelegenen Punkten einen Bogen $bc = R\omega$ zu beschreiben. Solche Fasern dagegen, welchen ein beliebiger Radius, wie z. B. $ox = \varrho$ angehört, konnten gleichzeitig nur den Weg $\varrho\omega$ zurücklegen und äussern demgemäss einen verhältnismässig geringeren Torsionswiderstand; es verhalten sich somit die Widerstände der Fasern bei der Drehung wie ihre Abstände von der Drehachse, oder:

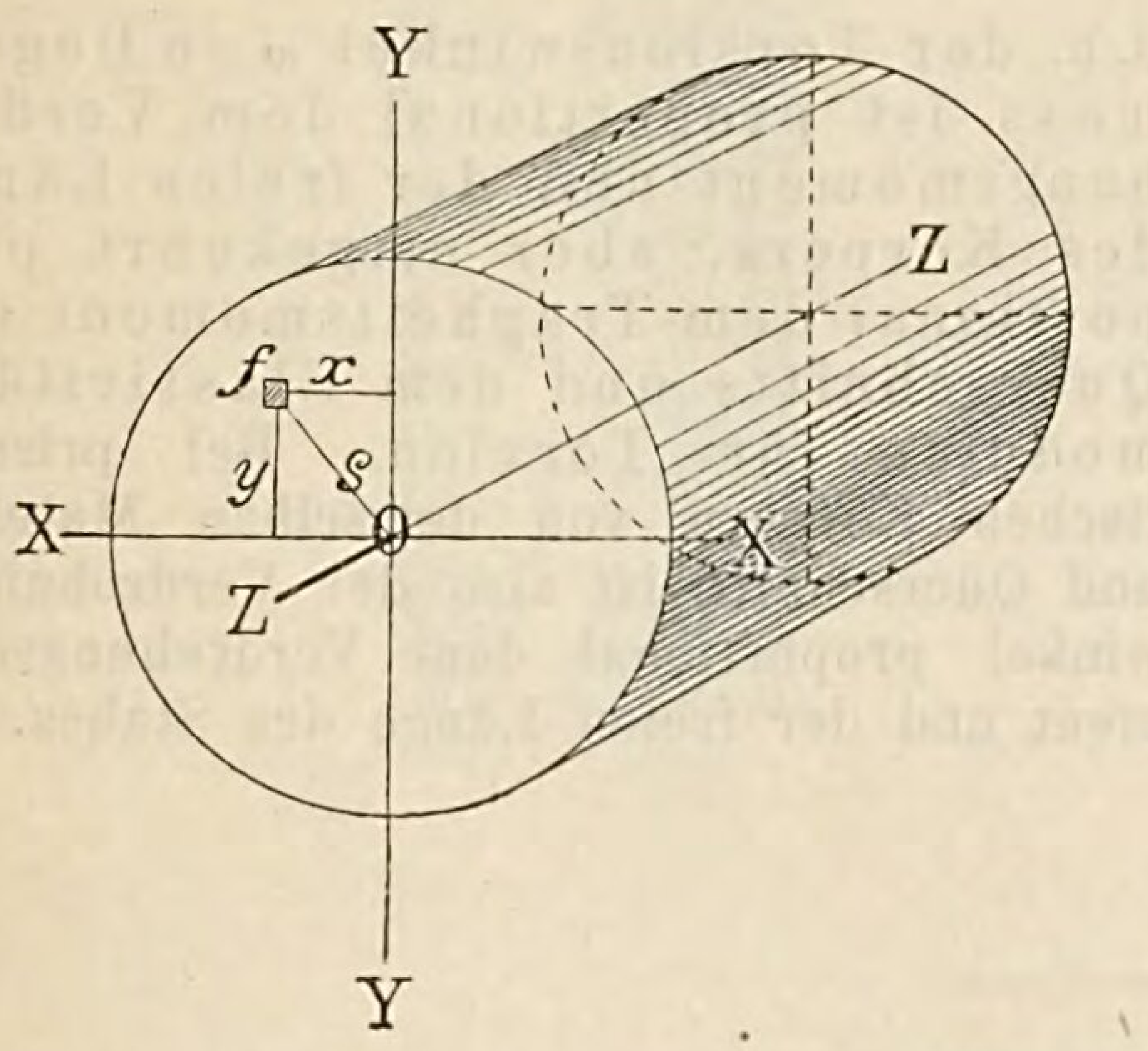
$$s : S = \varrho : R \text{ oder } s = \frac{S\varrho}{R}$$

Figur 164.



Frage 172. Wie lässt sich der Inhalt der Antwort auf die vorige Frage übersichtlich durch eine algebraische Formel darstellen, und zu welchem Gesetz gelangt man unter weiterer Benutzung dieser Formel?

Figur 165.



Erkl. 175. Je nachdem man bei der Biegung eines Stabes den Querschnitt auf XX oder YY (siehe Fig. 165) als neutrale Achse bezieht, d. h. den Querschnitt um XX oder um YY gedreht denkt, hat das Trägheitsmoment die Form:

$$T_1 = \Sigma\,(f y^2) \text{ resp. } T_2 = \Sigma\,(f x^2)$$

Hiernach bekommt man bei einem Rechteck wie überhaupt bei solchen Querschnitten, welche nicht für beide Achsen dieselbe Symmetrie zeigen, zwei verschiedene Grössen für das Trägheitsmoment, je nachdem die Biegungsebene in Richtung der einen oder andern Achse des Querschnitts fällt. Denkt man sich nun durch O (siehe Fig. 165) noch eine dritte Achse gelegt, welche auf der Ebene der beiden andern senkrecht steht, und die Flächenelemente f auf diese Achse ZZ bezogen, so bekommt man durch algebraische Summierung derselben ein Trägheitsmoment von der Form $\Sigma\,(f\varrho^2)$. Die zwei Trägheitsmomente $\Sigma\,(f y^2)$ und $\Sigma\,(f x^2)$, bezogen auf zwei in der Ebene des Querschnitts gelegene Achsen XX und YY, nennt man die achsialen Trägheitsmomente des Querschnitts, dasjenige aber, welches auf eine, ebenfalls durch den Schwerpunkt der Fläche gehende, aber auf der Ebene derselben normal stehende Achse ZZ bezogen wird, nennt man das polare Trägheitsmoment und bezeichnet es mit T_p oder wie nebenstehend mit T_o.

Mit Bezug auf Fig. 165 ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz:

$$\varrho^2 = y^2 + x^2$$

und diese Gleichung mit f multipliziert:

$$f\varrho^2 = f y^2 + f x^2$$

Antwort. Es seien für irgend zwei Fasern von den Querschnittsflächen f und f_1, deren Längen l und l_1 und deren Entfernungen von der Drehachse ϱ und ϱ_1 sind, s und s_1 die der Verdrehung widerstehenden Kräfte und ω und ω_1 die grössten Verdrehungswinkel, also $\omega\varrho$ und $\omega_1\varrho_1$ die diesen Winkeln zugehörigen Drehbögen, dann verhält sich:

$$s : s_1 = \frac{\omega\varrho f}{l} : \frac{\omega_1\varrho_1 f_1}{l_1}$$

woraus sich ergibt:

$$s = \frac{s_1 l_1}{\omega_1\varrho_1 f_1} \cdot \frac{\omega\varrho f}{l}$$

oder wenn man den von der Elasticität des Materials abhängigen Koeffizienten:

$$\frac{s_1 l_1}{\omega_1\varrho_1 f_1}$$

durch Versuche ermittelt und berechnet hat, und diesen Wert, den man den Elasticitätsmodulus in Bezug auf Torsion mit E_1 bezeichnet, so ergibt sich:

$$s = E_1 \cdot \frac{\omega\varrho f}{l}$$

oder:

$$s = \frac{E_1\,\omega}{l} \cdot \varrho f$$

Da der Arm, an welchem diese Kraft s wirkt $= \varrho$ ist, so ist das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf die Drehachse:

$$s\varrho = \frac{E_1\,\omega}{l} \cdot f\varrho^2$$

Für einen und denselben Körper müssen aber E_1, ω und l konstante, d. h. unveränderliche Grössen sein, so dass es zur Herleitung der Momente für die übrigen Fasern oder des Moments des ganzen Körpers nur auf die Bestimmung von f und ϱ^2 ankommt. Bezeichnet man die Summe der Momente aller Fasern durch $\Sigma(f\varrho^2)$ und berücksichtigt man, dass für's Gleichgewicht die Summe der statischen Momente aller widerstehenden Kräfte eines jeden Querschnitts gleich ist dem statischen Moment PR oder dem Torsionsmoment M der äusseren verdrehenden Kraft P, so folgt, dass:

$$\text{M oder PR} = \frac{E_1\,\omega}{l}\,\Sigma\,(f\varrho^2)$$

oder wenn man das polare Inhalts- oder Trägheitsmoment $\Sigma\,(f\varrho^2)$ mit T_o [1]) bezeichnet:

[1]) Siehe Erkl. 175.

Was aber für ein Flächenelement gilt, gilt für jedes andere und demnach auch für alle zusammen. Somit ist:

$$\Sigma(f\varrho^2) = \Sigma(fy^2) + \Sigma(fx^2)$$

oder:

$$T_o = T_1 + T_2$$

d. h. das polare Trägheitsmoment eines Querschnitts ist gleich der Summe der beiden achsialen Trägheitsmomente desselben Querschnitts.

Bei Querschnitten, für welche T_1 und T_2 nicht dieselbe Grösse haben, ist die vorstehende Formel nicht ganz genau, da sich z. B. bei einem Rechteck nicht alle vier Seiten gleich stark verwinden; in diesem Fall ist nach *Reuleaux* annähernd:

$$\frac{T_o}{Y} = \frac{b^2 h^2}{3(0{,}4b + 0{,}96h)}$$

worin Y die Entfernung der äussersten Faserschicht vom Mittelpunkt des Querschnitts bezeichnet.

Für Beanspruchung auf Torsion sind immer solche Querschnitte vorzuziehen, welche in Bezug auf zwei Achsen dieselbe Symmetrie zeigen, d. h. welche durch zwei rechtwinklige Schwerpunktsachsen in vier kongruente Figuren zerlegt werden. Das sind besonders Kreis, Kreisring, Quadrat, alle regulären Polygone mit gerader Seitenzahl und Kreuzformen.

Ganz in derselben Weise wie bei Biegungsfestigkeit das achsiale Trägheitsmoment den Widerstand der Materialfasern kennzeichnet, thut es bei Torsionsfestigkeit das polare Trägheitsmoment.

$$M \text{ oder } PR = \frac{E_t\,\omega}{l} \cdot T_o$$

woraus:

$$P = \frac{E_t\,\omega}{lR} \cdot T_o \text{ oder } \left(\frac{E_t\,T_o}{lR}\right)\omega$$

und

$$\omega = \frac{PlR}{E_t\,T_o} \text{ oder } \left(\frac{Rl}{E_t\,T_o}\right)P \text{ oder } \frac{Ml}{E_t\,T_o}$$

d. h. der Torsionswinkel ω in Bogenmass ist proportional dem Verdrehungsmoment und der freien Länge des Körpers, aber umgekehrt proportional dem Trägheitsmoment des Querschnitts und dem Elasticitätsmodulus für Torsion. Bei prismatischen Körpern von demselben Material und Querschnitt ist also der Verdrehungswinkel proportional dem Verdrehungsmoment und der freien Länge des Stabes.

Frage 173. Wie gross ist der Torsionswinkel ω in Gradmass?

Antwort. In Gradmass ist:

$$\omega = \frac{2\pi}{360} \cdot \omega^0 \text{ oder } \frac{\pi}{180} \cdot \omega^0$$

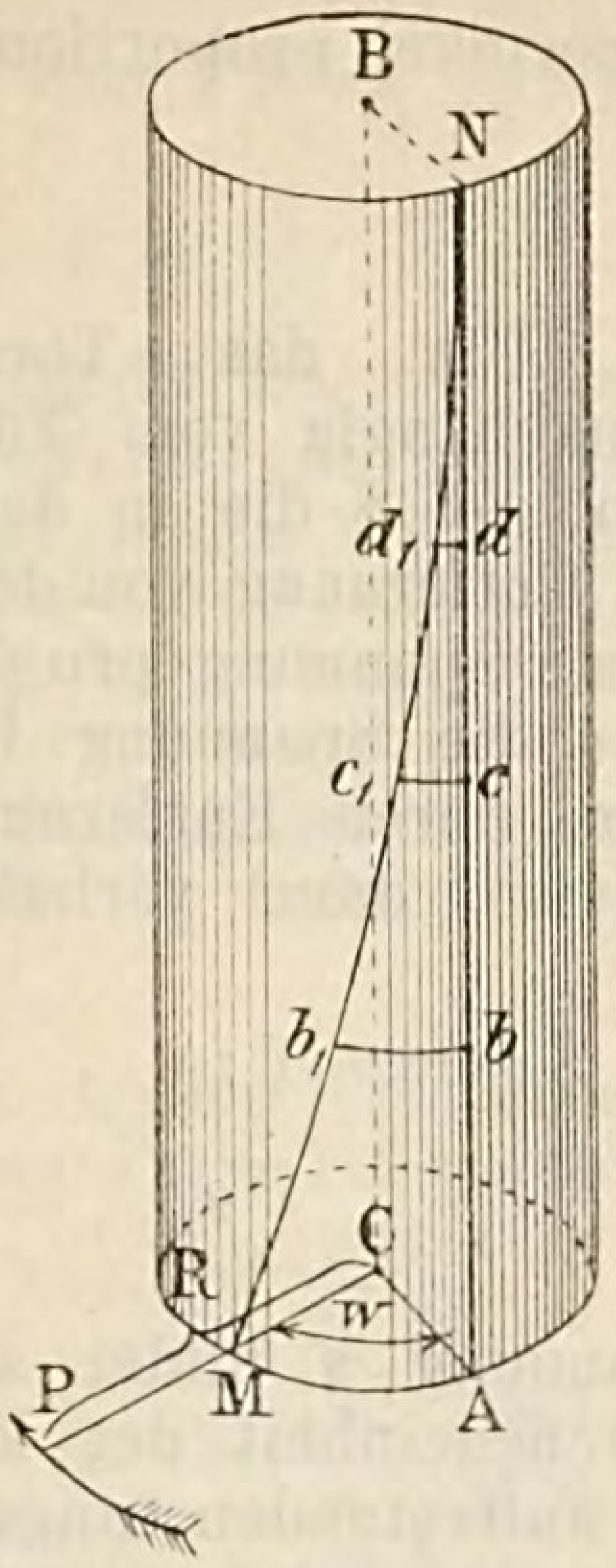
Setzt man diesen Wert für ω in die obige Gleichung, so ergibt sich:

$$\omega^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{Ml}{E_t\,T_o} \text{ oder } \frac{180}{\pi} \cdot \frac{PRl}{E_t\,T_o}$$

Frage 174. Was versteht man unter dem Verschiebungswinkel eines auf Torsion in Anspruch genommenen Stabes?

Antwort. Denkt man sich den in Fig. 159 dargestellten Cylinder durch eine an seinem freien Ende angebrachte Kraft gedreht, so wird, wie schon erwähnt, der Querschnitt des Cylinders um seinen Mittelpunkt gedreht und zwar um so mehr, je näher derselbe dem freien Ende des Cylinders liegt. Die Verbindungslinie der beiden Punkte M N bildet daher jetzt mit ihrer früheren Richtung den Winkel

Figur 166.



M N A = α oder die vor der Drehung mit der Achse parallele Faser des Cylinders bildet nach der Drehung eine Schraubenlinie, welche überall um den Winkel α gegen das Lot N A geneigt ist. Da dieser Winkel die Verschiebung der Moleküle gegen einander misst, so nennt man denselben Verschiebungswinkel.

Frage 175. Wie lässt sich die Grösse des Verschiebungswinkels bestimmen, und in welchem Verhältnis steht derselbe zu dem Torsionswinkel?

Erkl. 176. Indem bei gleicher Sicherheit der Winkel A C M = ω mit der Länge des Prismas zu- und abnimmt, so folgt hieraus, dass es eigentlich der Verschiebungswinkel α ist, dessen Wert man für jedes Material nach den erfahrungsmässig besten Konstruktionen bestimmen resp. beschränken muss, weil sich dann daraus der entsprechende grösste Winkel ω für jede gegebene Länge von selbst ergibt.

Erkl. 177. Da die Hypothenuse stets die grösste Seite im rechtwinkligen Dreieck ist, so muss die senkrechte Faser A N durch die Drehung verlängert werden. Wegen des Widerstands aber, welchen sie einer solchen Ausdehnung nach den Gesetzen der Kohäsion entgegensetzt, drückt sie die mittleren Teilchen zusammen und es findet also im allgemeinen eine Verkürzung statt. Nach *Young* wird hierbei ein Draht um den vierten Teil soviel verkürzt, als die äusseren Teile sich verlängern müssen, wenn die Stablänge unverändert bliebe, wonach die Kraft dem Kubus oder der dritten Potenz des Drehungswinkels proportional sein müsste. Da dieselbe aber nur der einfachen Potenz des Torsionswinkels der Erfahrung nach proportional ist, so folgert er hieraus, dass keine absolute Längenausdehnung der Teile, sondern hauptsächlich oder bloss eine laterale [1]) Verschiebung derselben, eine Ueberwindung der Starrheit stattfindet.

[1]) Siehe Erkl. 178.

Antwort. Die Grösse des Verschiebungswinkels kann man aus der Grösse des Torsionswinkels ableiten. Ist nämlich der äusserste Querschnitt um den Winkel A C M = ω (siehe Fig. 166) gedreht, so wird beim Abwickeln von dem Cylinder die erwähnte Schraubenlinie N M die Hypothenuse [1]) eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete N A die Länge l des Cylinders, und dessen andere Kathete der von dem äussersten Ende der Schraubenlinie beschriebene Bogen A M, oder wenn man den Abstand A C der Faser von der Achse des Cylinders mit Y bezeichnet, gleich Yω ist. Der Winkel α ist der in diesem Dreieck A N M der Seite Yω gegenüberliegende Winkel und daher:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y\omega}{l} \quad \text{oder} \quad \frac{D\omega}{2l}$$

da $Y = \frac{1}{2}D$; oder da α immer nur ein sehr kleiner Winkel ist:

$$\alpha = \frac{Y\omega}{l}$$

oder wenn man:

$$\omega = \frac{\pi}{180} \cdot \omega^0$$

setzt, so ist:

$$\alpha^0 = \frac{Y\pi}{180\,l} \cdot \omega^0$$

Der Verschiebungswinkel ist demnach der Grösse der Torsion proportional. Da nun

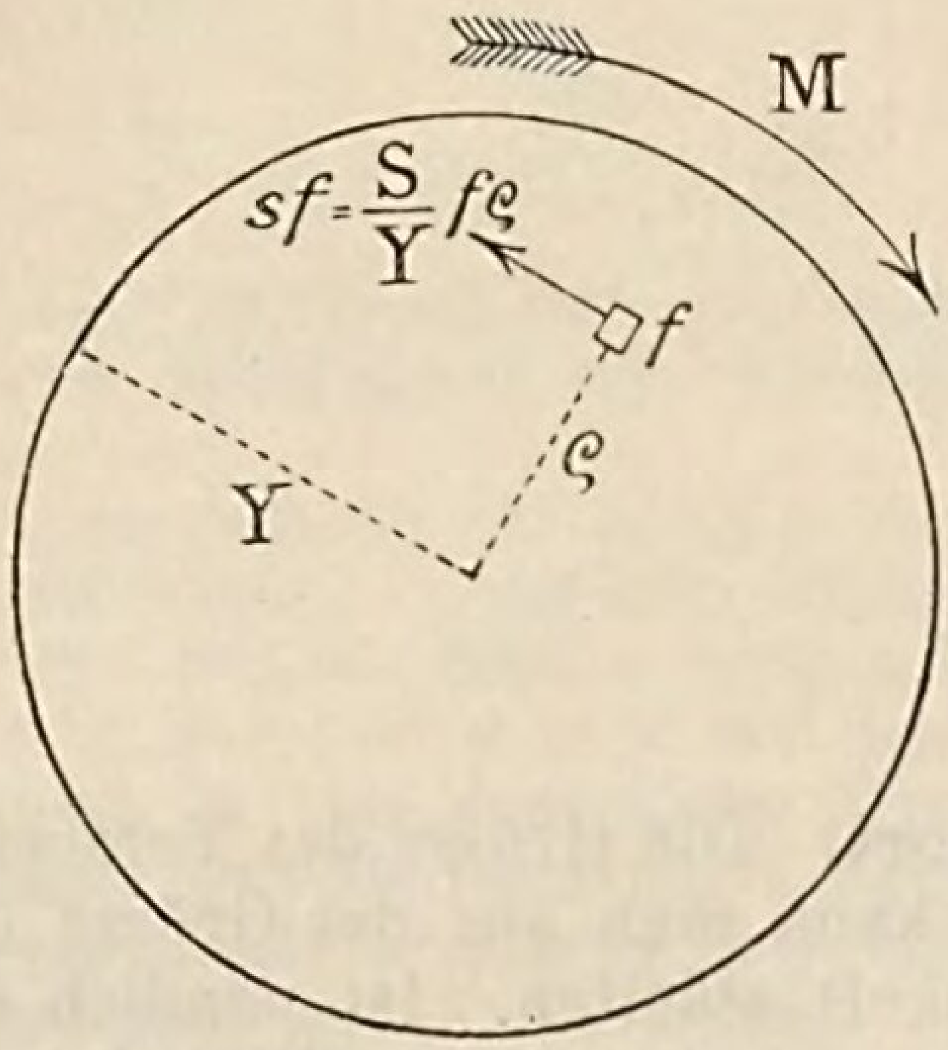
[1]) Siehe Erkl. 177.

Erkl. 178. Lateral (lat. laterālis, von latus, die Seite) heisst zur Seite gehörig, zur Seite befindlich.

die Torsionselasticität der Grösse der Torsion proportional ist, so ist sie auch diesem Verschiebungswinkel proportional.

Frage 176. Wie lässt sich das Torsionsmoment $M = PR$ unabhängig vom Drehungswinkel ω bestimmen?

Figur 167.



Erkl. 179. Die Werte T_o für das polare Trägheits- oder Inhaltsmoment und den Abstand Y, sowie für den polaren Querschnittsmodul Q_t und das Torsionsmoment M sind für einige der wichtigsten Querschnittsformen folgende:

Antwort. Um das Torsionsmoment $M = PR$ unabhängig vom Torsionswinkel zu bestimmen, sei S die in der äussersten Faser, deren Entfernung von der Drehachse Y stattfindende Spannung pro Querschnittseinheit und s die Spannung irgend einer andern Faser, deren Entfernung von der Drehachse ϱ ist, dann verhält sich nach Erkl. 174:

1). $S : s = Y : \varrho$

woraus:

$$s = \frac{S\varrho}{Y}$$

Diese Spannung s bildet zugleich den in jeder Flächeneinheit des kreisförmigen Querschnitts auftretenden tangential gerichteten Widerstand, welcher der Verdrehung des Cylinders entgegenwirkt. Der in einem Flächenteilchen f auftretende Torsionswiderstand ist also (Fig. 167):

$$sf = \frac{S}{Y} \cdot f\varrho$$

und das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf die Drehachse:

$$sf\varrho = \frac{S}{Y} \cdot f\varrho^2$$

und somit auch:

$$\Sigma(sf\varrho) = \Sigma\left(\frac{S}{Y} \cdot f\varrho^2\right) \text{ oder } \Sigma(sf\varrho) = \frac{S}{Y} \cdot \Sigma(f\varrho^2)$$

oder da:

$\Sigma(f\varrho^2) = T_o$ ist, so ist:

$$\Sigma(sf\varrho) = \frac{S}{Y} \cdot T_o$$

Querschnitt.	Y	T_o	Q_t	M
Rechteck; Höhe $= h$ Breite $= b$	$\frac{1}{2}\sqrt{b^2+h^2}$	$\frac{1}{12} bh(b^2+h^2)$	$\frac{1}{6} bh\sqrt{b^2+h^2}$	$\frac{1}{6} bhS\sqrt{b^2+h^2}$
Quadrat; eine Seite a horizontal.	$\frac{1}{2} a\sqrt{2}$	$\frac{1}{6} a^4$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^3 S}{\sqrt{2}}$
Quadrat; eine Diagonale horizontal.	$\frac{1}{2} a\sqrt{2}$	$\frac{1}{6} a^4$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^3 S}{\sqrt{2}}$
Kreis.	$\frac{1}{2} d$	$\frac{1}{32} \pi d^4$	$\frac{1}{16} \pi d^3$	$\frac{1}{16} \pi S d^3$
Kreisring.	$\frac{1}{2} D$	$\frac{1}{32} \pi (D^4 - d^4)$	$\frac{1}{16} \pi \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}$	$\frac{1}{16} \pi S \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}$

Da nach vorstehender Tabelle z. B. für einen kreisförmigen Querschnitt:

$$\text{M oder PR} = \frac{1}{16}\pi S d^3$$

also:

$$P = \frac{1}{16} \cdot \frac{\pi S d^3}{R}$$

ist, so folgt daraus folgender Satz:

Bei Cylindern von gleicher Materie verhalten sich die statischen Momente der Kräfte, welche eine Trennung durch Verdrehung bewirken, wie die dritten Potenzen ihrer Durchmesser.

Aehnliche Sätze lassen sich aus obigen Formeln auch für die andern Querschnittsformen ableiten.

Erkl. 180. Da der Verdrehungswinkel nach der in Antw. auf Frage 172 entwickelten Formel:

$$\omega = \frac{Ml}{E_t T_o}$$

oder:

$$\omega^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{Ml}{E_t T_o} \text{ ist,}$$

und nach vorstehender Tabelle für den kreisförmigen Querschnitt:

$$T_o = \frac{1}{32}\pi d^4$$

und

$$M = \frac{1}{16}\pi S d^3$$

so ist:

$$\omega = \frac{\pi S d^3 l \,.\, 32}{16 E_t \pi d^4}$$

oder:

$$\omega = \frac{2 S l}{E_t d}$$

oder in Gradmass:

$$\omega^0 = \frac{360 S l}{E_t d \pi} \quad \ldots\ldots \; 4).$$

Oder auch, wenn wir in der in Antw. auf Frage 172 resp. 175 entwickelten Gleichung für M = PR einsetzen und somit:

$$\omega = \frac{PRl}{E_t T_o}$$

erhalten, und hierein für $T_o = \frac{1}{32}\pi d^4$ setzen:

$$\omega = \frac{32 PRl}{E_t \pi d^4}$$

oder, da $\frac{1}{4}\pi d^2$ die Querschnittsfläche F bildet:

$$\omega = 2\pi \cdot \frac{PRl}{E_t F^2} \quad \ldots \; 5a).$$

oder in Gradmass:

$$\omega^0 = 16 \cdot \frac{360}{\pi^2} \cdot \frac{PRl}{E_t d^4}$$

oder:

$$\omega^0 = 360 \cdot \frac{PRl}{E_t F^2} \quad \ldots\ldots \; 5b).$$

In analoger Weise erhält man für ein Prisma von quadratförmigem Querschnitt von der Seite a:

Und da die Summe der widerstrebenden Kräfte eines und desselben Querschnitts gleich dem statischen Moment PR oder dem Torsionsmoment M der verdrehenden Kraft ist, so hat man endlich als Fundamentalformel für Torsion:

$$2). \quad \ldots \quad \text{M oder PR} = \frac{S}{Y} \cdot T_o$$

Hiernach findet bei einem auf Torsion in Anspruch genommenen Körper innerhalb der Elasticitätsgrenze Gleichgewicht statt, wenn das Torsionsmoment (Kraft P mal Normalabstand R derselben von der in ihrer Länge und Gestalt unveränderlichen Dreh- oder Schwerpunktsachse) gleich ist dem polaren Trägheitsmoment (bezogen auf die durch die Schwerpunkte der Querschnitte gehende Achse) dividiert durch den Abstand Y der am stärksten gespannten Faser von dieser Drehachse und multipliziert mit der Spannung S in der um Y abstehenden Faser.

Aus der vorigen Gleichung 2). folgt:

$$P = \frac{S T_o}{Y R}$$

oder da für:

$$\frac{T_o}{Y} = Q_t$$

der polare Querschnittsmodulus gesetzt werden kann, so ist:

$$3). \quad \ldots\ldots \quad P = \frac{S Q_t}{R}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{6\,P\,R\,l}{E_t\,a^4} \\ \text{oder:} \quad \omega^0 &= \frac{6\,P\,R\,l}{E_t} \cdot \frac{180^0}{\pi\,a^4} \end{aligned}\right\} \ldots 6).$$

und für ein Prisma, dessen Querschnitt ein Rechteck von den Seiten b und h ist:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{12\,P\,R\,l}{E_t\,b\,h\,(b^2+h^2)} \\ \text{oder:} \quad \omega^0 &= \frac{12\,P\,R\,l}{E_t\,b\,h\,(b^2+h^2)} \cdot \frac{180^0}{\pi} \end{aligned}\right\} \ldots 7).$$

Für einen hohlen Cylinder, dessen äusserer und innerer Durchmesser D und d ist, ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{32\,P\,R\,l}{E_t\,\pi\,(D^4-d^4)} \\ \text{oder:} \quad \omega^0 &= \frac{32\,P\,R\,l}{E_t\,\pi\,(D^4-d^4)} \cdot \frac{180^0}{\pi} \end{aligned}\right\} \ldots 8).$$

Frage 177. Aus den vorigen beiden Gleichungen 5 a). und b). ergibt sich welche Erklärung für den Elasticitätsmodulus in Bezug auf Torsion?

Antwort. Nimmt man in den beiden Formeln 5 a). und b). für F die Flächeneinheit (1□cm oder 1□mm) und für ω resp. ω^0 den Drehungswinkel einer ganzen Umdrehung; also 2π resp. 360^0 an, so erhält man:

$$E_t = P\,R \text{ oder } M$$

d. h. der Elasticitätsmodulus E_t in Bezug auf Torsion ist gleich dem Torsions- oder Drehungsmoment $M = P\,R$, durch welches ein Stab, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit und dessen Länge gleich der Längeneinheit ist um eine volle Umdrehung von 2π resp. 360^0 verdreht würde, wenn dies überhaupt möglich wäre. Da dies aber für die meisten Körper nicht möglich ist, so ist es auch hier besser, den Elasticitätsmodulus einfach als die Konstante (unveränderliche Grösse) zu definieren, die man erhält, wenn man die Gleichungen 5 a). oder b). oder allgemein die in Antw. auf Frage 172 entwickelte Gleichung in Bezug auf E_t auflöst.

Erkl. 181. Nach neueren Versuchen kann, wie schon bemerkt worden ist:

$$E_t = \frac{2}{5}\,E$$

gesetzt, d. h. der Elasticitätsmodulus in Bezug auf Torsion kann ungefähr zu $^2/_5$ des Elasticitätsmodulus der übrigen Festigkeitsarten angenommen werden.

Erkl. 182. Die nur mit wenigen Körpern direkt vorgenommenen Versuche geben auch hier wieder Resultate, die oft sehr weit auseinander liegen, und zwar insbesondere, wenn man die aus runden Stangen hervorgehenden mit jenen vergleicht, die aus quadratförmigen Prismen resultieren.

Frage 178. Was ist über die Tragfähigkeit, sowie über den Verdrehungswinkel eines an beiden Enden festgehaltenen Stabes von kreisringförmigem Querschnitt zu bemerken, wenn derselbe in seiner Mitte mit P R auf Verdrehung beansprucht ist?

Antwort. Wenn ein an beiden Enden festgehaltener Stab in seiner Mitte durch das Moment P R auf Verdrehung beansprucht wird, so verhält sich jede Hälfte des Stabes, auf welche das Moment $\frac{1}{2}\,P\,R$ kommt, wie der an einem Ende festgehaltene, am andern Ende auf Verdrehung beanspruchte Stab.

Da nun nach Gleichung 3). in Antw. auf Frage 176:

$$PR = Q_1 S$$

ist, und das polare Widerstandsmoment Q_1 des Kreisrings nach der in Erkl. 179 gegebenen Tabelle:

$$Q_1 = \frac{1}{16}\pi \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}$$

ist, so ergibt sich für die Tragfähigkeit im vorliegenden Fall:

$$\frac{1}{2} PR = \frac{1}{16}\pi \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D} \cdot S$$

und für den Verdrehungswinkel nach Gleichung 8). in Erkl. 180:

$$w^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{32 PR l}{E_1 \pi (D^4 - d^4)} \cdot \frac{180^0}{\pi}$$

c). Berechnung von Transmissions- und Radwellen.

Frage 179. Wo finden die oben gegebenen Formeln und Regeln hauptsächlich Anwendung?

Antwort. Die oben gegebenen Formeln und Regeln finden hauptsächlich Anwendung auf die in der Maschinenkonstruktion häufig vorkommenden Rad- und Transmissionswellen, welche grösstenteils auf ihre Torsionsfestigkeit in Anspruch genommen werden.

Erkl. 183. Man pflegt die Wellen, namentlich die eisernen, je nach ihrer Verwendung in schwere und leichte einzuteilen, und versteht unter ersteren diejenigen, welche unmittelbar von den Kraftmaschinen betrieben werden oder mit diesen zunächst in Verbindung stehen, schwere Räder tragen oder überhaupt Vibrationen oder Stössen ausgesetzt sind, während man zu den letzteren oder leichten die Wellen der Arbeitsmaschinen, Triebwerke und gewöhnlich schnell umlaufende Transmissions-, sowie die durch Menschenkräfte bewegten Wellen (wie jene der Winden und Krahnen etc.) rechnet. Für schwere Wellen rechnet man gewöhnlich die doppelte Sicherheit als für leichte.

Frage 180. Welchen Einfluss hat die Länge einer Welle auf deren Torsionsfestigkeit?

Antwort. Aus der Antwort auf Frage 176 resp. aus den dort gegebenen Formeln ergibt sich, dass die Länge der Welle ohne allen Einfluss auf deren Torsionsfestigkeit ist. Eine längere Welle ist zwar leichter zu verdrehen als eine kürzere, dieselbe kann aber auch im Verhältnis ihrer Länge eine grössere Verschiebung ihrer Fasern aushalten, ehe der Bruch erfolgt.

Erkl. 184. Da die Wellenlänge ohne Einfluss auf das Abwinden selbst ist, dagegen, wie bereits angegeben, auf die Grösse des Verdrehungswinkels in der Art einwirkt, dass der Winkel, um dessen Einschränkung oder Begrenzung es sich eigentlich gewöhnlich handelt, mit dieser Länge zunimmt, so ist es oft zweckmässig, erst diesen Torsionswinkel auszudrücken und mit Hilfe desselben die Stärke der Wellen zu bestimmen.

Frage 181. Von welchem Einfluss ist die Grösse des Querschnitts auf die Widerstandsfähigkeit gegen das Abdrehen?

Antwort. Wie die relative Festigkeit, so nimmt auch die Torsionsfestigkeit eines

Erkl. 185. Gleichwie beim Widerstand gegen das Abbrechen, so sind auch bei Torsion bei einem 2-, 3- oder n-fachen Querschnitt 2-, 3- oder n-mal mehr Fasern zu zerdrehen. Wie aber in Erkl. 174 dargethan wurde, verhalten sich die Widerstände der Fasern bei der Drehung wie ihre Abstände von der Drehachse. Der Abstand der innersten Faser von der Drehachse ist aber $= 0$, der der äussersten Faser $= r$ (Radius), folglich kann man für sämtliche Fasern die mittlere Entfernung $\frac{1}{2} r$ als gemeinschaftlichen Abstand setzen und ein gemeinsames statisches Moment aller Faserwiderstände annehmen. Nennt man nun den Widerstand einer Faser von 1 □ cm resp. 1 □ mm Querschnitt $=$ S, so ist der Widerstand im ganzen Querschnitt, dessen Fläche $r^2 \pi$ beträgt,

$$= r^2 \pi \mathrm{S}$$

und da wir uns diesen Gesamtwiderstand an dem Hebelarm $\frac{1}{2} r$ wirkend denken können, so ist das statische Moment dieses Widerstands gegen das Zerdrehen, also die Torsionsfestigkeit des Cylinders:

$$\frac{1}{2} r \cdot r^2 \pi \mathrm{S} = \frac{1}{2} r^3 \pi \mathrm{S}$$

oder wenn man die Wellendicke mit d $(= 2r)$ bezeichnet:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d^3}{8} \pi \mathrm{S} = \frac{1}{16} d^3 \pi \mathrm{S}$$

das ist derselbe Wert für das Torsionsmoment M, welcher in der in Erkl. 179 gegebenen Tabelle enthalten ist.

Cylinders nicht bloss in dem Verhältnis zu, als der Querschnitt grösser wird, sondern wie jene, so wächst auch die Torsionsfestigkeit mit dem Kubus oder der dritten Potenz des Wellenhalbmessers oder Durchmessers (siehe Erkl. 179).

Frage 182. Welche Formel ergibt sich aus dem Widerstands- oder Torsionsmoment zur Berechnung der Wellendicke?

Antwort. Da, wie bereits erwähnt:

$$\mathrm{M} \text{ oder } \mathrm{PR} = \frac{1}{16} d^3 \pi \mathrm{S}$$

ist, so erhält man zur Berechnung des Wellendurchmessers:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,\mathrm{PR}}{\pi \mathrm{S}}}$$

Frage 183. Welche Werte erhält man für Wellen a). aus Schmiedeeisen, b). aus Gusseisen, wenn man nach *Redtenbacher* für Schmiedeeisen die 20fache und für Gusseisen die 33fache Sicherheit annimmt und für den Festigkeitskoeffizienten S für Schmiedeeisen 4500 und für Gusseisen 3000 kg pro □ cm setzt?

Antwort. Die vorstehende Gleichung lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \mathrm{S}}} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{PR}}$$

oder wenn wir die gegebenen Zahlenwerte einsetzen, so ist:

Hilfsrechnungen.

1). . . $\sqrt[3]{\frac{16}{3{,}14159\,.\,225}} = \frac{1}{3}\Big(\log 16 - (\log 3{,}14159 + \log 225)\Big)$

$$\begin{aligned} \log 3{,}14159 &= 0{,}4971499 \\ +\log 225 &= 2{,}3521825 \\ & \quad 2{,}8493324 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 16 &= \overset{+3}{1}{,}2041200 \overset{-3}{} \\ -\log & \;\; 2{,}8493324 \\ & \;\; 1{,}3547876-3 \\ & \;\; \cdot\tfrac{1}{3} \\ & \;\; 0{,}4515959-1 \end{aligned}$$

mithin:
num-log = 0,2829

2). . . $\sqrt[3]{\frac{16\,.\,11}{3{,}14159\,.\,1000}} = \sqrt[3]{\frac{176}{3141{,}59}}$

$$\begin{aligned} \log 176 &= \overset{+3}{2}{,}2455127 \overset{-3}{} \\ -\log 3141{,}59 &= 3{,}4971499 \\ & \;\; 1{,}7483928-3 \\ & \;\; \cdot\tfrac{1}{3} \\ & \;\; 0{,}5827876-1 \end{aligned}$$

mithin:
num-log = 0,3826

a). für Schmiedeeisen:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{3{,}14159 \cdot \frac{4500}{20}}} \cdot \sqrt[3]{PR}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

1). $d = 0{,}28\sqrt[3]{PR}$

b). für Gusseisen:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{3{,}14159 \cdot \frac{3000}{33}}} \cdot \sqrt[3]{PR}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

2). $d = 0{,}38\sqrt[3]{PR}$

Frage 184. Wie lässt sich eine Formel zur Berechnung von Transmissionswellen entwickeln, für die ein Verdrehungswinkel von $^1/_4{}^0$ pro 1 m Länge als zulässig angenommen werden kann?

Antwort. Aus Gleichung 5 b). in Erkl. 180:

$$\omega^0 = 16 \cdot \frac{360}{\pi^2} \cdot \frac{PRl}{E_1\, d^4}$$

folgt:

$$d^4 = \frac{16\,.\,360\,.\,PRl}{\omega^0\, \pi^2\, E_1}$$

oder da nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$\frac{16\,.\,360}{\pi^2} = 583{,}6$$

beträgt, so ist:

$$d^4 = 583{,}6 \cdot \frac{PRl}{\omega^0 E_1}$$

Ist in dieser Gleichung als Masseinheit das Millimeter angenommen, so ist es vorteilhaft, l in Meter auszudrücken, also mit 1000 zu multiplizieren. Es kann dann

$$\omega^0 = \frac{1}{4}\, l$$

gesetzt werden und so erhält man, wenn für E_1 pro □mm = 8000 (siehe Tabelle Seite 38) eingesetzt wird:

Hilfsrechnungen.

$$\begin{aligned} 1). \;.\;.\;.\;.\; \log \pi &= 0{,}4971499 \\ & \quad .\,2 \\ \log \pi^2 &= 0{,}9942998 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 16\,.\,360 = 5760 &= \;\; 3{,}7604225 \\ -\log \pi^2 &= -0{,}9942998 \\ & \;\;\; 2{,}7661227 \end{aligned}$$

mithin:
num-log = 583,61

2). $\sqrt[4]{291,8} = \frac{1}{4} \cdot \log 291,8$

$$\log 291,8 = 2,4650853$$
$$\cdot \frac{1}{4}$$
$$0,6162713$$

mithin:
num-log = 4,133

$$d^1 = 583600 \cdot \frac{P\,R\,l}{\frac{1}{4}\,l \,.\, 8000}$$

oder:

$$d^1 = 291,8\,P\,R$$

oder:

$$d^1 = \sqrt[4]{291,8\,P\,R}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$d^1 = 4,133\,\sqrt[4]{P\,R} \text{ in Millimeter.}$$

Frage 185. Nach *Buchanan*, *Redtenbacher* u. a. soll bei Bestimmung des Wellendurchmessers auch die Umdrehungsgeschwindigkeit der Welle, somit auch die Grösse der von dieser übertragenen Arbeit berücksichtigt werden. Mit dieser Berücksichtigung ergibt sich welche allgemeine Formel für die Berechnung des Wellendurchmessers?

Erkl. 186. Man versteht unter einer Pferdekraft diejenige Kraft, welche nötig ist, um in einer Sekunde eine bestimmte Anzahl von Pfunden 1 Fuss hoch (Fusspfund) oder eine bestimmte Zahl von Kilogramm 1 Meter hoch zu heben (Kilogrammometer). In England setzt man allgemein die Grösse der Arbeit eines Pferdes = 500 Fusspfund pro Sekunde, in Frankreich = 75 Meterkilogramm; Werte, welche nur wenig von einander abweichen. In Preussen bestimmte das Gesetz die Grösse einer Pferdekraft zu 480 Fusspfund preuss.; in Oesterreich zu 430 Fusspfund (Wiener). Alle diese Werte weichen wenig von einander ab. So betragen diese Pferdekrafteinheiten, sämtlich auf Kilogrammometer berechnet, für Baden 75, Bayern 75,01, England 76,03, Frankreich 75, Oesterreich 75,87, Preussen 75,32. Die wirkliche Durchschnittskraft eines lebenden Pferdes beträgt jedoch nur 50 Kilogrammometer, und wenn man die Maschine Tag und Nacht arbeiten lässt, so leistet eine Maschinenpferdekraft durchschnittlich soviel, als $3\frac{1}{2}$ lebendige Pferde.

(*R. Klimpert*, Lexik. d. Münzen, Masse u. Gewichte.)

Hilfsrechnungen.

1). . . . $\frac{60 \,.\, 75000}{2\,\pi} = \frac{4500000}{2\,\pi}$

$$\log \pi = 0,4971499$$
$$+ \log 2 = 0,3010300$$
$$0,7981799$$

$$\log 4500000 = 6,6532125$$
$$- \log 2\,\pi = -0,7981799$$
$$5,8550326$$

mithin:
num-log = 716200

Antwort. Wie in demjenigen Lehrbuch dieser Encyklopädie, welches die Bewegungshindernisse der festen Körper behandelt, angegeben ist, gilt für das Widerstandsmoment einer getriebenen Welle die Gleichung:

1). $W\,\varrho = \frac{N}{n} \cdot \frac{60 \,.\, 75}{2\,\pi}$

worin W den Widerstand, ϱ den Radius der Welle, N den Effekt, d. h. die von der treibenden Kraft pro Sekunde geleistete Arbeit in Pferdekräften ausgedrückt und n die Umdrehungszahl der Welle pro Minute bezeichnet. Denn da eine mechanische Arbeit stets gemessen wird durch das Produkt aus dem zu überwindenden Widerstand in den Weg, der Widerstand aber = W und der Weg pro Sekunde = dem Wellenumfang $2\,\varrho\,\pi$ multipliziert mit der Zahl der sekundlichen Umläufe $= \frac{n}{60}$ ist, so ist die zur Ueberwindung des Widerstands nötige Arbeit $= W \,.\, 2\,\varrho\,\pi \,.\, \frac{n}{60}$; diese Arbeit ist gleichzusetzen der Zahl N der Pferdekräfte oder in Meterkilogramm ausgedrückt = N . 75, und somit erhält man die Gleichung:

$$W \,.\, 2\,\varrho\,\pi \cdot \frac{n}{60} = N \,.\, 75$$

woraus sich die oben erwähnte Gleichung 1). ergibt.

Für das Moment der widerstehenden oder treibenden Kraft kann also auch gesetzt werden, wenn das Millimeter als Längeneinheit genommen, also für eine Pferdekraft = 75000 Millimeterkilogramm gesetzt wird:

$$P\,R \text{ oder } M = \frac{N}{n} \cdot \frac{60 \,.\, 75000}{2\,\pi}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$P\,R \text{ oder } M = 716200\,\frac{N}{n}$$

2). $\sqrt[3]{\frac{16 \cdot 716200}{\pi}}$ = log 16 = 1,2041200
+ log 716200 = 5,8550326
7,0591526
— log π = 0,4971499
6,5620027
$\cdot \frac{1}{3}$
2,1873342

mithin:
num-log = 153,9

3). $\frac{45}{20} = 2{,}25$

$154 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2{,}25}} = \log 154 + \frac{1}{3}(\log 1 - \log 2{,}25)$

log 1 = 3,0000000 — 3
— log 2,25 = 0,3521825
2,6478175 — 3
$\cdot \frac{1}{3}$
0,8826058 — 1
+ log 154 = 2,1873342
2,0699400

mithin:
num-log = 117,47 oder rund 120

4). $\frac{1}{\frac{30}{33}} = \frac{33}{30}$ oder 1,1

$154 \cdot \sqrt[3]{1{,}1} = \log 154 + \frac{1}{3}(\log 1{,}1)$

log 1,1 = 3,0413927 — 3
$\cdot \frac{1}{3}$
1,0137976 — 1
+ log 154 = 2,1873342
2,2011318

mithin:
num-log = 158,9 oder ca. 160

Wenn man diesen Wert in die in Antw. auf Frage 182 gegebene Gleichung substituiert, so erhält man für den Durchmesser der Welle die Gleichung:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 716200\, \mathrm{N}}{\pi\, \mathrm{S}\, n}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

2). . . . $d = 154 \sqrt[3]{\frac{\mathrm{N}}{n \mathrm{S}}}$ in Millimeter.

Da für Schmiedeeisen der Festigkeitskoeffizient nach Tabelle Seite 38 pro □cm = 4500 kg, also pro □mm = 45 kg beträgt, so erhält man bei 20facher Sicherheit aus obiger Formel 2).:

$$d = 154 \sqrt[3]{\frac{\mathrm{N}}{n \cdot \frac{45}{20}}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 3).:

3). . . . $d = 120 \sqrt[3]{\frac{\mathrm{N}}{n}}$ in Millimeter.

Für Gusseisen ist $\mathrm{S} = \frac{30}{33}$, wenn 33fache Sicherheit angenommen wird, denn der Festigkeitskoeffizient ist nach Tabelle Seite 38 pro □cm = 3000, also pro □mm = 30 und somit ist:

$$d = 154 \sqrt[3]{\frac{\mathrm{N}}{n \cdot \frac{30}{33}}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 4).:

4). . . . $d = 160 \sqrt[3]{\frac{\mathrm{N}}{n}}$ in Millimeter.

Wellen aus Eichenholz sollen etwa $2^1/_4$ mal so dick als gusseiserne gemacht werden.

Frage 186. Was ist über die Anwendung hohler cylindrischer Wellen zu bemerken?

Erkl. 187. Wenn man in nebenstehender Formel als ein gut anerkanntes Verhältnis:

$$d = \frac{3}{5}\mathrm{D}$$

also:

$$n = 0{,}6$$

setzt, so ist:

$$\mathrm{D} = \frac{\delta}{\sqrt[3]{1 - 0{,}6^4}}$$

oder:

Antwort. So wie überall, wo es sich um Materialersparnis bei gleicher Festigkeit handelt, so ist auch hier die Anwendung hohler cylindrischer Wellen vorteilhafter. Denn soll ein hohler Cylinder, dessen äusserer und innerer Durchmesser D und d ist, mit einem massiven Cylinder von gleicher Länge und dem Durchmesser S dieselbe Festigkeit haben, so müssen die in Tabelle Erkl. 179 gegebenen Formeln des Torsionsmoments für den Kreis und Kreisring einerlei Wert besitzen und daher:

$$D = \frac{\delta}{\sqrt[3]{1 - 0{,}1296}}$$

oder:

$$D = \frac{\delta}{\sqrt[3]{0{,}8704}}$$

Nun ist

$$D = \frac{1}{\sqrt[3]{0{,}8704}} = \log 1 - \frac{1}{3}\left(\log 0{,}8704\right)$$

$$\log 0{,}8704 = \overset{+2}{0{,}9397189} \overset{-2}{-1}$$

$$\cdot \frac{1}{3}$$

$$0{,}9799063 - 1$$

$$\begin{aligned} \log 1 &= 1{,}0000000 - 1 \\ &- 0{,}9799063 + 1 \\ &0{,}0200937 \end{aligned}$$

mithin:

numlog $= 1{,}047$ oder ca. $1{,}05$

also ist:

$$D = 1{,}05\,\delta$$

woraus schon an und für sich eine Materialersparnis gefolgert werden kann. Um jedoch dessen Verhältnis zu finden, ist wegen $d = \frac{3}{5} \cdot 1{,}05\,\delta = 0{,}93\,\delta$, und da sich der Materialaufwand in diesen beiden Fällen wie

$$\delta^2 : D^2 - d^2 = \delta^2 : 0{,}7056\,\delta^2,$$

also nahe wie $1 : 0{,}7$ oder $10 : 7$ verhält, so folgt, dass man bei Anwendung hohler Wellen nahe $\frac{3}{10}$ an Material erspart (genauer berechnet ist nämlich $\delta^2 : D^2 - d^2 = 1 : 0{,}70197$).

$$\frac{1}{16}\pi S \delta^3 = \frac{1}{16}\pi S \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}$$

oder:

$$\delta^3 = \frac{D^4 - d^4}{D} \text{ sein.}$$

Setzt man

$$d = n D,$$

so wird

$$\delta^3 = \frac{D^4 - n^4 D^4}{D}$$

oder:

$$\delta^3 = D^3 (1 - n^4)$$

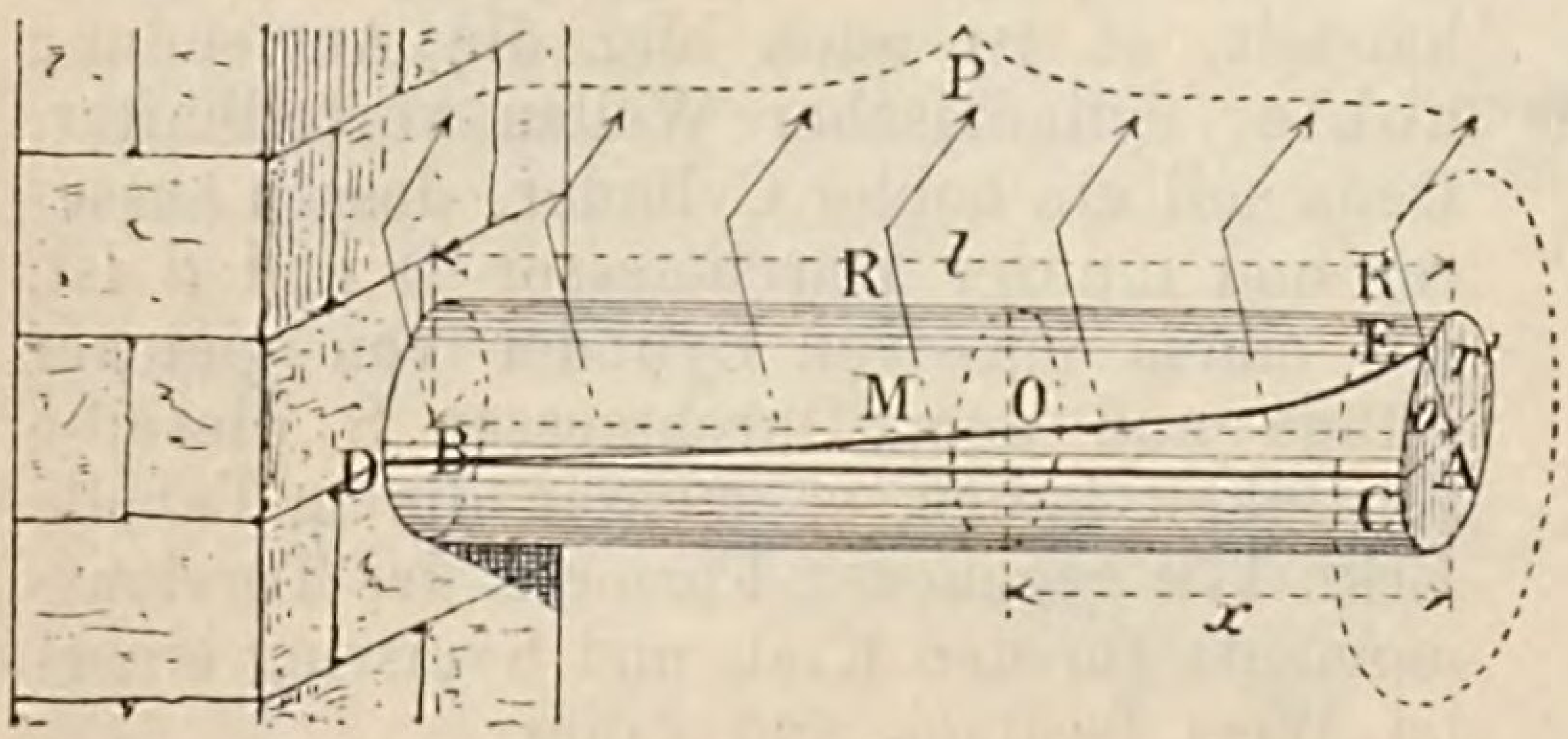
und daraus:

$$D = \frac{\delta}{\sqrt[3]{1 - n^4}}$$

d). Der an einem Ende festgehaltene Stab ist in seiner ganzen Länge gleichmässig mit dem Drehungsmoment M = P R beansprucht.

Frage 187. Wenn die verdrehende Kraft P auf die ganze Länge des Stabes gleichmässig verteilt ist, so erhält man zur Bestimmung des Torsionsmoments $M = P R$ und der Torsionskraft P irgend eines im Abstand x vom äusseren Ende entfernten Querschnitts welche Formeln?

Figur 168.



Antwort. Wenn die verdrehende Kraft P auf die ganze Länge des an einem Ende festgehaltenen Stabes gleichmässig verteilt ist, so erhält man zur Bestimmung des Torsionsmomentes irgend eines im Abstand x vom äusseren Ende entfernten Querschnitts:

$$\text{1 a).} \; \ldots \ldots \; M = P R \cdot \frac{x}{l}$$

oder da nach Gleichung 2). in Antw. auf Frage 176:

$$P R = \frac{S}{Y} T_o$$

und

$$\frac{T_o}{Y} = Q_t$$

ist, so kann man auch setzen:

$$1\,b). \ldots M = PR\frac{x}{l} = \frac{S}{Y}T_o \text{ oder } SQ_t$$

und hieraus ergibt sich die Torsionskraft:

$$2). \ldots P = \frac{ST_o}{YR}\cdot\frac{l}{x} \text{ oder } \frac{SQ_t}{R}\cdot\frac{l}{x}$$

Frage 188. Wo liegt im vorliegenden Fall der gefährliche Querschnitt?

Antwort. Da das Torsionsmoment M, wie aus obiger Gleichung 1 a). ersichtlich ist, mit x zunimmt und den grössten Wert erhält, wenn $x = l$ ist, so ist der Querschnitt der Befestigungsstelle der gefährliche Querschnitt, und bei einem Stab von überall gleichem Querschnitt müsste darum auch der Bruch durch Verdrehung in diesem Fall an der Befestigungsstelle eintreten.

Frage 189. Was ist über die Grösse des Verdrehungswinkels zu bemerken?

Antwort. Der Verdrehungswinkel ist im vorliegenden Fall nur halb so gross als im ersten Fall, also unter Berücksichtigung der in Antw. auf Frage 172 gegebenen Formel in Bogenmass:

$$1). \ldots \omega = \frac{1}{2}\cdot\frac{PRl}{E_t T_o} \text{ oder } = \frac{1}{2}\cdot\frac{Sl}{YE_t}$$

oder unter Berücksichtigung der in Antw. auf Frage 173 gegebenen Formel in Gradmass:

$$2). \ldots \omega^0 = \frac{360}{4\pi}\cdot\frac{PRl}{E_t T_o} \text{ oder } = \frac{90}{\pi}\cdot\frac{Sl}{YE_t}$$

(denn nach Gleichung 2). in Antw. auf Frage 176 kann man für $\frac{PR}{T_o} = \frac{S}{Y}$ einsetzen).

Erkl. 188. Für den Kreisquerschnitt ist:

$$Y = r = \frac{1}{2}d$$

und

$$T_o = \frac{1}{32}\pi d^4 \text{ oder } = \frac{1}{2}\pi r^4$$

(s. Erkl. 179) und damit erhält man für irgend einen Querschnitt im Abstand x vom äusseren Ende:

$$1). \ldots\ldots M = PR\cdot\frac{x}{l}$$

und da nach Tabelle Seite 226:

$$M = \frac{\pi}{16}\cdot Sd^3$$

so ist:

$$2). \ldots\ldots P = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{Sd^3}{R}\cdot\frac{l}{x}$$

Für die Befestigungsstelle ist:

$$x = l$$

und dafür erhält man:

$$M = PR \text{ oder } M = \frac{\pi}{16}\cdot Sd^3$$

und

$$P = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{Sd^3}{R}$$

also dieselben Werte wie im ersten Fall, wo die Torsionskraft am freien Ende wirkt.

Erkl. 189. Für den grössten Verdrehungswinkel eines Kreisquerschnitts folgt aus nebenstehender Antwort und mit Rücksicht auf die Gleichung 4). in Erkl. 180:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{S\,l}{E_1\,d} \\ \omega^0 &= \frac{180}{\pi} \cdot \frac{S\,l}{E_1\,d} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; 1).$$

oder auch nach Gleichung 5a und b). in Erkl. 180:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \pi \cdot \frac{P\,R\,l}{E_1\,F^2} \\ \omega^0 &= 180 \cdot \frac{P\,R\,l}{E_1\,F^2} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; 2).$$

e). Bestimmung der Körperformen von gleicher Torsionsfestigkeit.

Frage 190. Wo liegt bei einem prismatischen Körper, der an einem Ende befestigt und am andern freien Ende auf Torsion in Anspruch genommen wird, der gefährliche Querschnitt?

Antwort. Der gefährliche Querschnitt liegt bei einem prismatischen Körper da, wo das Verdrehungsmoment M am grössten oder ein Maximum ist. Da nun für einen und denselben Stab der Querschnittsmodulus

$$Q_1 = \frac{T_o}{Y}$$

unveränderlich oder konstant ist, so ist im vorliegenden Fall für dieselbe verdrehende Kraft P und denselben Hebelarm R nach Gleichung 2). in Antw. auf Frage 176 auch das Torsionsmoment:

$$M = P\,R$$

und folglich auch die grösste zulässige Drehungsspannung in allen Querschnitten dieselbe, also ist jeder Querschnitt ein gefährlicher.

Frage 191. Was folgt unmittelbar aus der Antwort auf die vorhergehende Frage in Bezug auf die Form der Körper, welche überall die gleiche Torsionsfestigkeit besitzen sollen?

Erkl. 190. Das in der nebenstehenden Antwort Gesagte gilt auch für den Fall, dass der Stab an beiden Enden befestigt und durch ein Drehungsmoment in seiner Mitte beansprucht ist.

Antwort. Da in jedem Querschnitt eines prismatischen oder cylindrischen Körpers, der auf die angegebene Weise verdreht wird, die Spannungen oder Torsionswiderstände dieselben sind, so besitzt ein solcher Körper schon an und für sich in allen Querschnitten gleiche Torsionsfestigkeit und es ist daher die einfache prismatische Gestalt zugleich die rationelle oder einzig richtige.

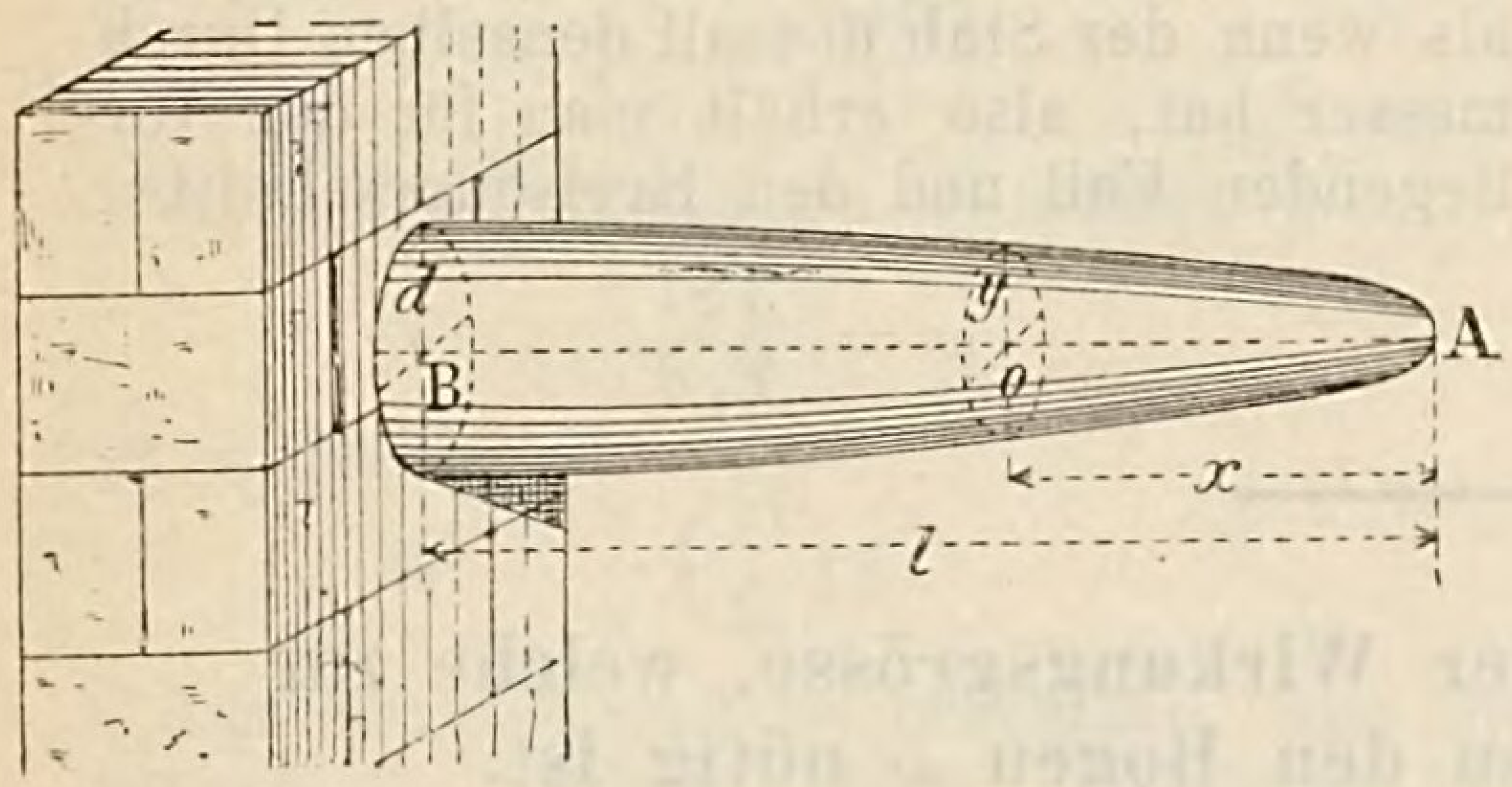
Frage 192. Was gilt in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt, wenn mehrere über die Länge des Stabes verteilte Momente wirksam sind?

Antwort. Sind mehrere gleiche oder ungleiche, gleichmässig oder ungleichmässig über die Länge l des Stabes verteilte Momente wirksam, so liegt der gefährliche Querschnitt an der Befestigungsstelle; ebenso bei zweiseitiger Einmauerung und gleichen,

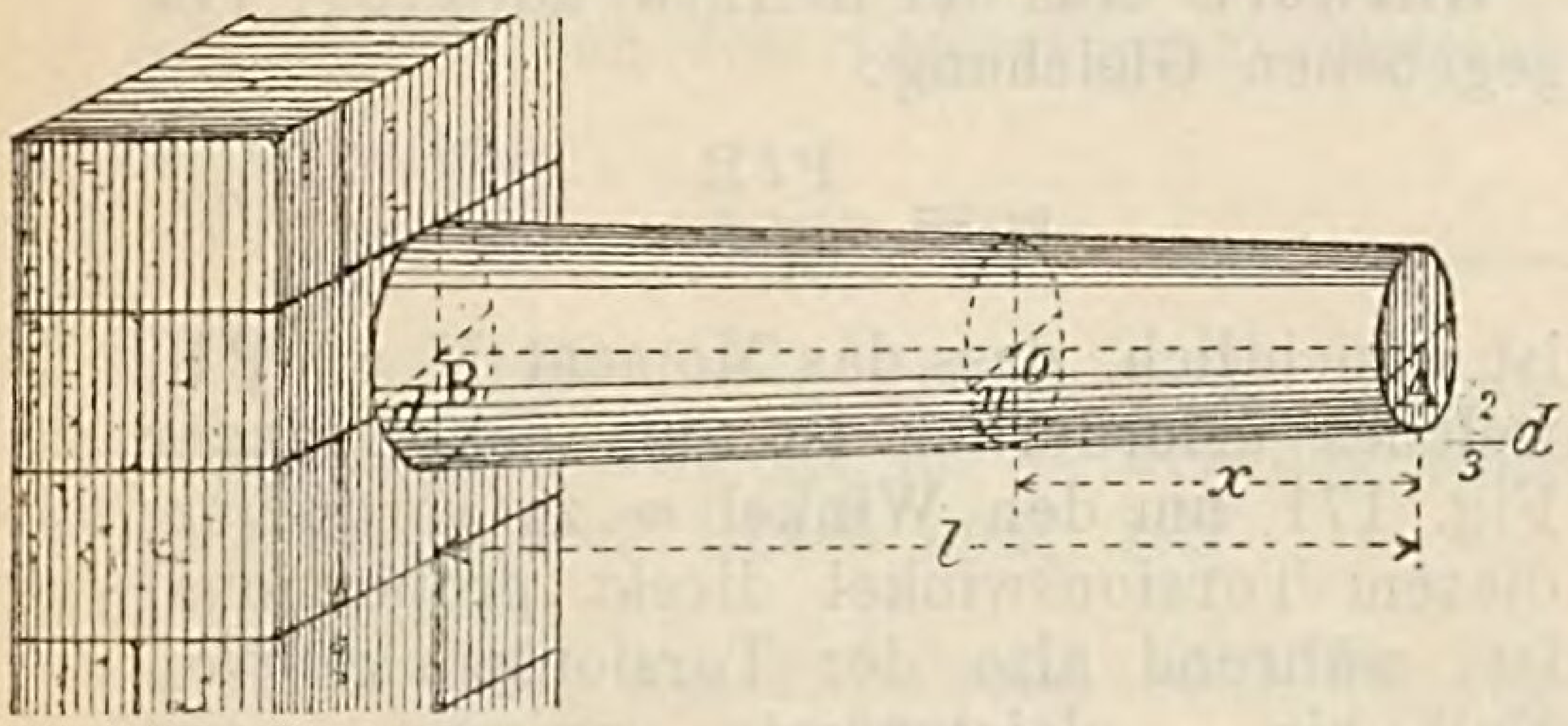
gleichmässig verteilten Momenten. Ist endlich der Stab zweiseitig befestigt, und daran ein Moment ausserhalb der Mitte wirksam, so liegt der gefärliche Querschnitt im kürzeren Stabteil.

Frage 193. Welche Körperform von gleicher Torsionsfestigkeit ergibt sich für den Fall, dass der an einem Ende befestigte Stab in seiner ganzen Länge gleichmässig mit dem Drehungsmoment M = P R beansprucht ist?

Figur 169.



Figur 170.



Hilfsrechnung.

Wenn Gleichung b).:

$$\mathrm{P\,R} \cdot \frac{x}{l} = \frac{\pi}{16} \cdot \mathrm{S}\, y^3$$

dividiert wird durch Gleichung a).:

$$\mathrm{P\,R} = \frac{\pi}{16} \cdot \mathrm{S}\, d^3$$

so erhält man:

$$\frac{\mathrm{P\,R}\,x}{\mathrm{P\,R}\,l} = \frac{\pi\,\mathrm{S}\,y^3 \,.\, 16}{16\,\pi\,\mathrm{S}\,d^3}$$

oder die gleichen Faktoren in Zähler und Nenner gehoben:

oder: $$\frac{x}{l} = \frac{y^3}{d^3} \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{\frac{x}{l}} = \frac{y}{d}$$

Antwort. Da für den vorliegenden Fall das Torsionsmoment M = P R und damit auch die Torsionsspannung S nach Antw. auf Frage 188 gegen die Befestigungsstelle hin zunimmt, so kann der Körper, wenn er in allen Querschnitten gleiche Torsionsfestigkeit besitzen soll, gegen das äussere freie Ende zu schwächer gemacht werden. Nimmt man nun die Spannung S für alle Querschnitte als unveränderlich an, so erhält man nach Tabelle in Erkl. 179 für den Kreisquerschnitt das Torsionsmoment M an der Befestigungsstelle:

a). M oder $\mathrm{P\,R} = \frac{\pi}{16} \cdot \mathrm{S}\, d^3$

und im Abstand x vom äusseren freien Ende, in welchem der Durchmesser $= y$ ist:

b). . . . $\mathrm{M_x}$ oder $\mathrm{P\,R}\,\frac{x}{l} = \frac{\pi}{16} \cdot \mathrm{S}\, y^3$

Aus diesen beiden Werten folgt durch Division:

$$\left(\frac{y}{d}\right) = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$$

oder:

$$y^3 = \left(\frac{16}{\pi} \cdot \frac{\mathrm{P\,R}}{\mathrm{S}\,l}\right) x$$

d. i. die Gleichung einer kubischen Parabel, deren Parameter gleich dem konstanten Koeffizienten $\left(\frac{16\,\mathrm{P\,R}}{\pi\,\mathrm{S}\,l}\right)$ ist. Dieselbe führt auf die Form der Fig. 169 mit der Annäherungsform eines Kegelstumpfes, dessen äusserer Durchmesser $= {}^2/_3 d$, d. h. gleich ${}^2/_3$ des Durchmessers an der Befestigungsstelle ist, wie in Fig. 170.

$$y^3 = d^3 \frac{x}{l}$$

Setzen wir in diese letzterhaltene Gleichung den sich aus Gleichung a). für d^3 ergebenden Wert

$$d^3 = \frac{16\,P\,R}{\pi\,S}$$

so erhalten wir:

$$y^3 = \frac{16\,P\,R\,x}{\pi\,S\,l} \text{ oder } \left(\frac{16\,P\,R}{\pi\,S\,l}\right) x$$

Frage 194. Wie gross ist der Torsionswinkel bei der durch Fig. 169 dargestellten Form von gleicher Torsionsfestigkeit?

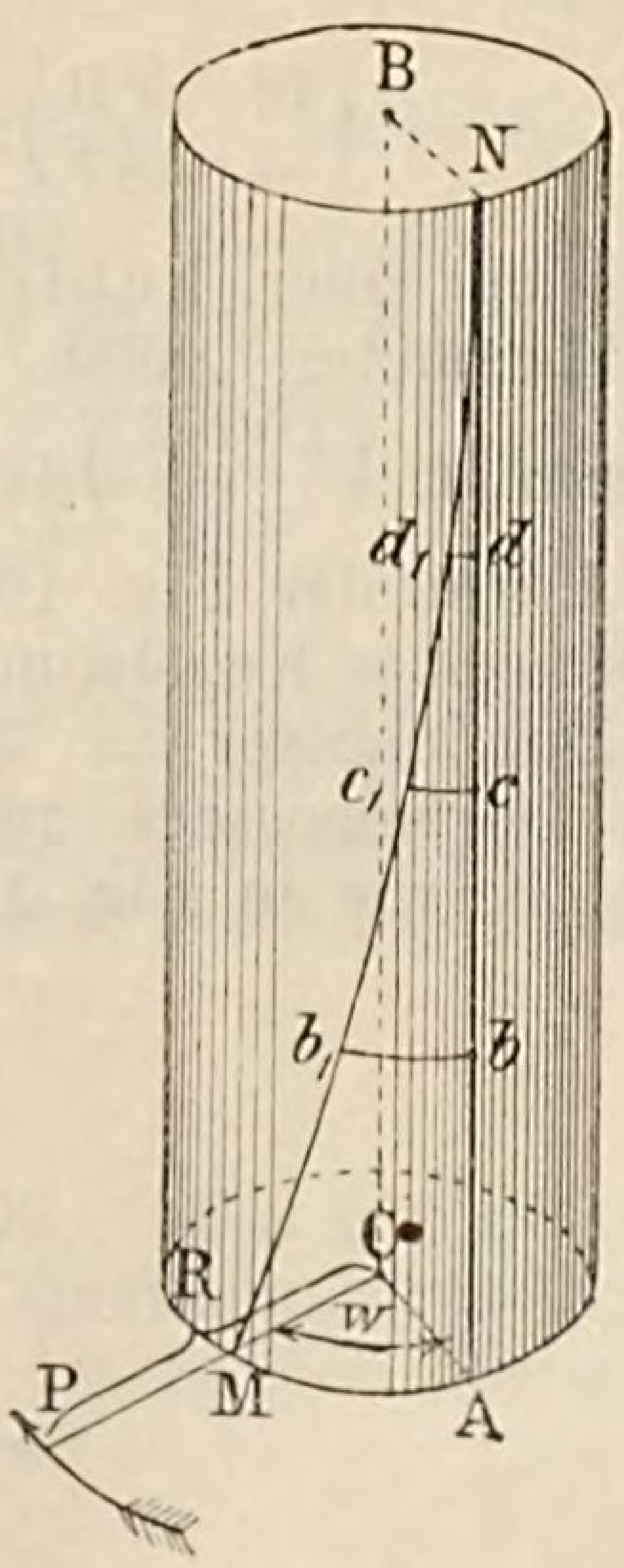
Antwort. Für die Körperform Fig. 169 ist der Verdrehungswinkel dreimal so gross, als wenn der Stab überall denselben Durchmesser hat, also erhält man für den vorliegenden Fall und den Kreisquerschnitt:

$$\omega = \frac{3\,S\,l}{E_1\,d}$$

f). Bestimmung der Arbeits- oder Wirkungsgrösse, welche zur Verdrehung eines Stabes um den Bogen ω nötig ist.

Frage 195. Nach welchen Formeln lässt sich die Arbeits- oder Wirkungsgrösse berechnen, welche zur Verdrehung eines Stabes um den Bogen ω nötig ist und aus welcher Betrachtung ergeben sich diese Formeln?

Figur 171.



Antwort. Aus der in Antw. auf Frage 172 gegebenen Gleichung:

$$\omega = \frac{P\,l\,R}{E_1\,T_0}$$

ist ersichtlich, dass das Moment $M = P\,R$, welches erforderlich ist, um den Cylinder Fig. 171 um den Winkel ω zu verdrehen, diesem Torsionswinkel direkt proportional ist, während also der Torsionswinkel von Null bis ω gleichmässig zunimmt, muss auch das Torsionsmoment von Null bis M gleichmässig zunehmen, und wenn dabei der Hebelarm der drehenden Kraft seine Länge unverändert beibehält, so muss die an demselben wirkende Kraft P gleichmässig zunehmen und zwar von Null bis P. Die mechanische Arbeit lässt sich also auch hier, wie bei der Biegungsfestigkeit, durch ein rechtwinkliges Dreieck darstellen oder ausdrücken, dessen eine Kathete gleich dem Torsionsmoment M und dessen andere Kathete gleich dem Drehbogen ω ist und demnach ist die mechanische Arbeit gleich dem Inhalt dieses Dreiecks, oder:

$$W = \frac{1}{2}\,M\,\omega$$

oder wenn man nach der in Antw. auf Frage 172 gegebenen Gleichung für:

Erkl. 191. Wie aus der Tabelle Seite 226 ersichtlich ist, ist die Entfernung der äussersten Faserschicht von dem Mittelpunkt des Querschnitts bei dem Kreisquerschnitt:

$$Y = \frac{1}{2} d$$

und das Trägheits- oder Inhaltsmoment:

$$T_o = \frac{1}{32} \pi d^4$$

setzt man diese Werte in die nebenstehende Gleichung, so ergibt sich:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{S^2}{E_t}\right) \cdot \frac{\pi d^4 . l . 4}{32 d^2}$$

oder:

$$W = \left(\frac{S^2}{E_t}\right) \cdot \frac{\pi d^2 l}{16}$$

oder da das Volumen des Cylinders:

$$V = \frac{1}{4} \pi d^2 l$$

ist, so ist:

$$W = \frac{1}{4} \left(\frac{S^2}{E_t}\right) V$$

Aus dieser Formel ist ersichtlich, dass die mechanische Arbeits- oder Wirkungsgrösse, welche zur Verdrehung eines Stabes nötig ist, sich ebenfalls nicht nach den einzelnen Dimensionen des Stabes, sondern einzig nach dem Volumen V und dem Verdrehungskoeffizienten $\left(\frac{S^2}{E_t}\right)$ richtet.

$$\omega = \frac{P R l}{E_t T_o} \text{ oder } \frac{M l}{E_t T_o}$$

substituiert, so ist:

$$W = \frac{1}{2} M \cdot \frac{M l}{E_t T_o}$$

oder:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2 l}{E_t T_o}$$

Und wenn man aus Gleichung 2). in Antw. auf Frage 176 noch für:

$$M = \frac{S}{Y} T_o$$

einführt, so ist:

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{S T_o}{Y}\right)^2 \cdot \frac{l}{E_t T_o}$$

oder:

$$W = \frac{1}{2} \frac{S^2 T_o^2 l}{Y^2 E_t T_o}$$

oder:

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{S^2}{E_t}\right) \cdot \frac{T_o l}{Y^2}$$

Frage 196. Wie gross ist die mechanische Arbeit, welche zur Verdrehung eines Stabes bis zum Bruch nötig ist?

Antwort. Will man die mechanische Arbeits- oder Wirkungsgrösse kennen, welche zur Verdrehung bis zum Bruch nötig ist, so hat man in den beiden vorigen Formeln statt des Sicherheitskoeffizienten S den Festigkeitskoeffizienten s in Rechnung zu bringen.

Erkl. 192. Aus den Zahlenwerten des Verdrehungskoeffizienten $\left(\frac{S^2}{E_t}\right)$ wie sie in der Tabelle Seite 38 enthalten sind, ergibt sich, dass derselbe für Gussstahl = 83, für Schmiedeeisen = 49, für Gusseisen = 22, für Eichenholz = 1,6 u. s. w. beträgt, und dass somit der Gussstahl sich für diese Verwendung am besten eignet.

g). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 129. Die senkrecht stehende, cylindrische gusseiserne Welle eines horizontalen Wasserrads trägt an ihrem oberen Ende ein Rad von 70 cm Radius, welches einen Widerstand von 922 kg zu überwinden hat; wie gross ist der Radius der Welle zu nehmen?

Auflösung. Nach Gleichung 2). in Antw. auf Frage 183 ist:

$$d = 0{,}38 \sqrt[3]{P R}$$

also:

$$r = 0{,}19 \sqrt[3]{P R}$$

Hilfsrechnung.

$$\log r = \log 0{,}19 + \frac{1}{3}(\log 64540)$$

$$\log 64540 = 4{,}8098290$$
$$\cdot \frac{1}{3}$$
$$1{,}6032763$$
$$+\log 0{,}19 = 0{,}2787536-1$$
$$\log r = 0{,}8820299$$

mithin:
num-log r oder $r = 7{,}6213$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$r = 0{,}19\sqrt[3]{922 \cdot 70}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$r = 7{,}6 \text{ cm.}$$

Aufgabe 130. Welchen Durchmesser muss eine schmiedeeiserne Welle erhalten, die in jeder Minute 100 Umdrehungen macht und dabei eine mechanische Arbeit von 50 Pferdekräften von einer Welle auf die andere überträgt.

a). Wenn der Festigkeitsmodulus zu 4000 kg pro □cm und 10fache Sicherheit angenommen wird.

b). Wenn bei 20facher Sicherheit der Festigkeitsmodulus zu 4500 pro □cm angenommen wird?

Auflösung. a). Nach Gleichung 2). in Antw. auf Frage 185 ist:

$$d = 154\sqrt[3]{\frac{N}{nS}}$$

oder:

$$d = 154\sqrt[3]{\frac{50}{100 \cdot 4}}$$

Da S pro □mm = 4 kg beträgt; oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$d = 77 \text{ mm oder } 7{,}7 \text{ cm.}$$

b). Nach Gleichung 3). in Antw. auf Frage 185 ist:

$$d = 120\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$d = 120\sqrt[3]{\frac{50}{100}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$d = 95 \text{ mm oder } 9{,}5 \text{ cm.}$$

Hilfsrechnungen.

2). . . $\log d = \log 154 + \frac{1}{3}\left(\log \frac{1}{8} \text{ oder } 0{,}125\right)$

$$\log 0{,}125 = \overset{+2}{0{,}0969100} \overset{-2}{-1}$$
$$\cdot \frac{1}{3}$$
$$0{,}6989700-1$$
$$+\log 154 = 2{,}1875207$$
$$\log d = 1{,}8864907$$

mithin:
num-log d oder $d = 77{,}00$

2). . . $\log d = \log 120 + \frac{1}{3}(\log 0{,}5)$

$$\log 0{,}5 = 2{,}6989700-3$$
$$\cdot \frac{1}{3}$$
$$0{,}8996567-1$$
$$+\log 120 = 2{,}0791812$$
$$\log d = 1{,}9788379$$

mithin:
num-log d oder $d = 95{,}244$

Aufgabe 131. Welcher Kraft kann eine schmiedeeiserne Welle von 18 cm Durchmesser widerstehen, wenn diese Kraft an einem Rad von 90 cm Durchmesser wirkt?

Auflösung. Nach Gleichung 1). in Antw. auf Frage 183 ist:

$$d = 0{,}28\sqrt[3]{PR}$$

oder:

$$d^3 = 0{,}28^3\, PR$$

und hieraus ergibt sich:

Hilfsrechnung.

$\log P = 3 . \log 18 - (3 . \log 28 + \log 45)$

$$\begin{array}{rl} \log 18 = & 1{,}2552725 \\ & .\,3 \\ \hline +^{1} & 3{,}7658175 \\ & 0{,}9946865-1 \\ \hline \log P = & 3{,}7711310 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log 0{,}28 = & 0{,}4471580-1 \\ & .\,3 \\ \hline & 1{,}3414740-3 \\ +\log 45 = & 1{,}6532125 \\ \hline & 2{,}9946865-3 \\ \text{oder} & 0{,}9946865-1 \end{array}$$

mithin:
num-log P oder $P = 5903{,}8$

$$P = \frac{d^3}{0{,}28^3\,R}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{18^3}{0{,}28^3 . 45}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$P = 5900 \text{ kg}.$$

Aufgabe 132. Bei einer Dampfmaschine beträgt der Druck auf den Kurbelzapfen im Maximum 1300 kg und die Kurbellänge (der Kurbelhalbmesser) 68 cm.

a). Wie stark muss die cylindrische gusseiserne Welle gemacht werden, damit sie dem Abwinden durch Torsion mit einer 30fachen Sicherheit widersteht?
(s = 3000 kg pro □cm.)

b). Wie gross ist bei dieser Welle der Torsionswinkel, wenn die Länge derselben, insoweit sie der Torsion ausgesetzt ist, 1,25 m beträgt?
(E_t = 400000, siehe Tabelle Seite 38.)

Hilfsrechnungen.

1). . . $\sqrt[3]{\dfrac{16 . 13 . 68}{\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{208 . 68}{\pi}}$

$\log d = \frac{1}{3}\left(\log 208 + \log 68 - \log 3{,}14159\ldots\right)$

$$\begin{array}{rl} \log 208 = & 2{,}3180633 \\ +\log 68 = & 1{,}8325089 \\ \hline & 4{,}1505722 \\ -\log \pi = & -0{,}4971499 \\ \hline & 3{,}6534223 \\ & .\,\frac{1}{3} \\ \hline \log d = & 1{,}2178074 \end{array}$$

mithin:
num-log d oder $d = 16{,}51$

2). . . $\log \omega^0 = (\log 13 + \log 68 + \log 180) - (2 . \log 3{,}14159\ldots + 4 . \log 16{,}5)$

$$\begin{array}{rl} \log 13 = & 1{,}1139434 \\ +\log 68 = & 1{,}8325089 \\ +\log 180 = & 2{,}2552725 \\ \hline +^{1} & 5{,}2017248^{-1} \\ - & 5{,}8655294 \\ \hline \log \omega^0 = & 0{,}3361954-1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log \pi = & 0{,}4971499 \\ & .\,2 \\ \hline \log \pi^2 = & 0{,}9942998 \\ \log 16{,}5 = & 1{,}2178074 \\ & .\,4 \\ \hline & 4{,}8712296 \\ +\log \pi^2 = & 0{,}9942998 \\ \hline & 5{,}8655294 \end{array}$$

mithin:
num-log ω^0 oder $\omega^0 = 0{,}21687^0$
oder $0{,}21687 . 60 = 13{,}0122'$

Auflösung. a). Setzt man in der in Antw. auf Frage 182 gegebenen Gleichung:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,P\,R}{\pi\,S}}$$

$P = 1300$ kg, $R = 68$ und $S = \dfrac{3000}{30} = 100$

so ergibt sich für den gesuchten Durchmesser der Welle:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 . 1300 . 68}{\pi . 100}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$d = 16{,}5 \text{ cm}$$

b). Setzt man in der Formel 5 b). in Erkl. 180:

$$\omega^0 = \frac{16\,P\,R\,l}{E_t} . \frac{360}{\pi^2\,d^4}$$

die entsprechenden Zahlenwerte ein, so ist:

$$\omega^0 = \frac{16 . 1300 . 68 . 125 . 360}{400000 . \pi^2 . (16{,}5)^4}$$

oder gleiche Faktoren in Zähler und Nenner gehoben:

$$\omega^0 = \frac{13 . 68 . 180}{\pi^2 . 16{,}5^4}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$\omega^0 = 0{,}21687^0 \text{ oder } 13{,}0122'$$
$$\text{oder } 13'\,0{,}732''$$

Aufgabe 133. Zur Bestimmung des Elasticitätsmodulus für Torsion hat man eine runde gusseiserne Stange von 10 cm Durchmesser und 1,5 m Länge (diese von dem der Torsion ausgesetzten Teil verstanden) an dem einen Ende horizontal befestigt und am andern Ende senkrecht darauf ebenfalls in horizontaler Richtung einen (von der Achse der Stange bis zum Aufhängepunkt des Gewichts gemessen) 2 m langen Hebel, sowie endlich am Ende desselben ein Gewicht von 798 kg angebracht, wodurch, ohne die Elasticitätsgrenze zu überschreiten, ein Drehungswinkel von $3^1/_2{}^0$ entstand. Wie gross ergibt sich hieraus der Elasticitätsmodulus des Gusseisens?

Auflösung. Bestimmt man aus der Formel 5 in Erkl. 180:

$$\omega^0 = \frac{16\,P\,R\,l\,.\,360}{E_t\,\pi^2\,d^4}$$

den Elasticitätsmodulus:

$$E_t = \frac{16\,.\,360\,.\,P\,R\,l}{\omega^0\,.\,\pi^2\,d^4}$$

und setzt die entsprechenden Zahlenwerte, so ist:

$$E_t = \frac{16\,.\,2\,.\,360\,.\,798\,.\,200\,.\,150}{7\,\pi^2\,.\,10^4}$$

oder gleiche Faktoren in Zähler und Nenner gegeneinander gehoben:

$$E_t = \frac{32\,.\,36\,.\,114\,.\,30}{\pi^2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$E_t = \text{ca. } 400000.$$

Hilfsrechnung.

```
32 . 36 . 114 . 30
 192       3420
 96
1152  .  3420
       2304
      4608
     3456
     3939840

3,14 . 3,14
    1256
    314
   942
   9,8596 : 3939840
```

oder:

```
98596 : 39398400000 = 399594
        295788
         981960
         887364
          945960
          887364
           585960
           492980
            929800
            887364
             424360
```

Aufgabe 134. Bei einer quadratischen Welle aus Eichenholz wirkt die Kraft $P = 250$ kg an einem Hebelarm von 6,3 m, während die Last an einem Hebelarm von 63 cm in einer nach der Achsenrichtung gemessenen Entfernung $l = 3{,}15$ m angreift.

a). Wie gross ist eine Seite des Wellenquerschnitts zu nehmen?

b). Wie gross ist der Torsionswinkel?

c). Welchen Bogen beschreibt demnach die äusserste Faserschicht?

Auflösung. a). Nach Tabelle in Erkl. 179 ist:

$$M \text{ oder } P\,R = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3\,S}{\sqrt{2}}$$

und hieraus erhält man:

$$a = \sqrt[3]{\frac{P\,R\,.\,3\sqrt{2}}{S}}$$

d). Wie dick hätte die Welle sein müssen, wenn der Torsionswinkel höchstens $^1/_2{}^0$ hätte betragen sollen?

(S = 30 kg pro □cm und E_t = 48000.)

Hilfsrechnungen.

1). . . $\log a = \frac{1}{3}(\log 4{,}242 + \log 5250)$

$$\begin{array}{rl} \log 4{,}242 = & 0{,}6275707 \\ +\log 5250 = & 3{,}7201593 \\ \hline & 4{,}3477300 \\ & \cdot\frac{1}{3} \\ \hline \log a = & 1{,}4492433 \end{array}$$

mithin:
num-log a oder $a = 28{,}13$

2). $\log \omega^0 = \log 180 + \log 157500 + \log 1890 - (\log \pi + \log 48000 + 4 \cdot \log 28{,}13)$

$$\begin{array}{rl} \log 180 = & 2{,}2552725 \\ +\log 157500 = & 5{,}1972806 \\ +\log 1890 = & 3{,}2764618 \\ \hline & {}^{+1}10{,}7290149^{-1} \\ & -10{,}9750699 \\ \hline & 0{,}7539450-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log 28{,}13 = & 1{,}4491697 \\ & .4 \\ \hline \log 28{,}13^4 = & 5{,}7966788 \\ +\log \pi = & 0{,}4971499 \\ +\log 48000 = & 4{,}6812412 \\ \hline & 10{,}9750699 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0{,}56747^0 \\ .60 \\ \hline 34{,}0482' \\ .60 \\ \hline 2{,}8920'' = \text{ca. } 3'' \end{array}$$

3). Wenn eine Quadratseite des Querschnitts mit a bezeichnet wird, so ist nach Tabelle in Erkl. 179:

$$Y = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$$

also im vorliegenden Fall:

$$Y = \frac{1}{2} \cdot 28{,}13 \sqrt{2}$$

oder da $\sqrt{2} = 1{,}414$, so ist:

$$\begin{array}{r} Y = 14{,}06 \,.\, 1{,}414 \\ \hline 8484 \\ 56560 \\ 1414 \\ \hline 19{,}88084 \end{array}$$

Es sind hier zwei Momente, nämlich P R und Q r bekannt, welche nach den Gesetzen der Statik (siehe *Klimpert*, Lehrbuch der Statik fester Körper) für den Fall des Gleichgewichts einander gleich sein müssen, also muss:

$$P R = Q r$$

oder nach den gegebenen Zahlenwerten:

$$630 \,.\, 250 = Q \,.\, 63$$

wonach Q = 2500 kg beträgt.

Für die Berechnung der auf Torsion in Anspruch genommenen Wellen ist es demnach ganz gleich, ob man das Moment der Kraft oder das der Last nimmt; beide sind im vorliegenden Fall:

$$630 \,.\, 250 = 157500 \text{ kgcm.}$$

Es ist also mit Bezug auf obige Formel, wenn S = 30 kg pro □cm beträgt:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2} \,.\, 157500}{30}}$$

oder da $\sqrt{2} = 1{,}414$ ist und 30 gegen 157500 gehoben werden kann:

$$a = \sqrt[3]{3 \,.\, 1{,}414 \,.\, 5250}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$a = 28{,}13 \text{ cm.}$$

b). Nach der in Antw. auf Frage 173 gegebenen Gleichung ist:

$$\omega^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M l}{E_t T_o}$$

oder da nach Tabelle Erkl. 179 für das Quadrat:

$$T_o = \frac{1}{6} a^4$$

beträgt, so ist:

$$\omega^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M l \,.\, 6}{E_t a^4}$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$\omega^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{157500 \,.\, 315 \,.\, 6}{48000 \,.\, 28{,}13^4}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$\omega = 34' \; 3''.$$

c). Diesem Torsionswinkel entspricht ein Ausweichen der äussersten Faserschicht um:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 28{,}13 \sqrt{2} \,.\, \pi \,.\, 0{,}56747}{180} = \text{ca. } 2 \text{ mm}$$

(siehe nebenstehende Hilfsrechnung 3).

Es ist also das zu einem Winkel von 0,56747° gehörige Bogenstück eines Kreises vom Radius 19,88 cm zu berechnen. Dasselbe beträgt

$$\frac{19{,}88 \, . \, \pi \, . \, 0{,}56747}{180}; \quad \begin{aligned} \log 19{,}88 &= 1{,}2984164 \\ + \log \pi &= 0{,}4971499 \\ + \log 0{,}56747 &= 0{,}7539450 - 1 \\ \hline & 1{,}5495113 \\ - \log 180 &= -2{,}2552725 \\ \hline & 0{,}2942388 - 1 \end{aligned}$$

mithin:

num-log = 0,1969 cm oder ca. 2 mm

4). . . $\log a = \frac{1}{4} \left[\log 2160 + \log 157500 + \log 315 - (\log \pi + \log 48000)\right]$

$$\begin{aligned} \log 2160 &= 3{,}3344538 \\ + \log 157500 &= 5{,}1972806 \\ + \log 315 &= 2{,}4983106 \\ \hline & 11{,}0300450 \\ & -5{,}1783911 \\ \hline & 5{,}8516539 \\ & \cdot \tfrac{1}{4} \\ \hline & 1{,}4629135 \end{aligned}$$

mithin:

num-log a oder
$a = 29{,}034$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0{,}4971499 \\ + \log 48000 &= 4{,}6812412 \\ \hline & 5{,}1783911 \end{aligned}$$

5). . . $\log a = \log 28{,}13 + \frac{1}{4} \left(\log 1{,}13494\right)$

$$\begin{aligned} \log 1{,}13494 &= 0{,}0549729 \\ & \cdot \tfrac{1}{4} \\ \hline & 0{,}0137432 \\ + \log 28{,}13 &= 1{,}4491697 \\ \hline \log a &= 1{,}4629129 \end{aligned}$$

mithin:

num-log a oder $a = 29{,}034$

d). Soll der Torsionswinkel nicht wie bei der oben berechneten Welle 34′ 3″, sondern höchstens $\frac{1}{2}^0 = 30'$ betragen, so muss die Welle entsprechend dicker genommen werden, und zwar ergibt sich dann nach der in Antw. auf Frage 173 gegebenen Gleichung:

$$\frac{1^0}{2} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M\,l\,.\,6}{E_1\,a^4}$$

und hieraus:

$$a^4 = \frac{2\,.\,180\,.\,6\,.\,M\,l}{\pi\,E_1}$$

oder:

$$a = \sqrt[4]{\frac{2160\,M\,l}{\pi\,E_1}}$$

oder:

$$a = \sqrt[4]{\frac{2160\,.\,157500\,.\,315}{\pi\,.\,48000}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 4).:

$$a = 29 \text{ cm.}$$

Will man aber die Seite a der quadratischen Welle nicht direkt aus den gegebenen Grössen berechnen, sondern die bereits unter a). und b). berechneten Werte zu Hilfe nehmen, so benützt man die sich aus der in Antwort auf Frage 173 gegebenen Gleichung ergebende Proportion:

$$\omega_1 : \omega = a^4 : a_1{}^4$$

denn es verhalten sich die Torsionswinkel umgekehrt wie die vierten Potenzen der Seiten der quadratischen Querschnitte, oder unter Einsetzung der entsprechenden Zahlenwerte:

$$0{,}56747^0 : 0{,}5^0 = a^4 : 28{,}13^4$$

oder:

$$a = \sqrt[4]{\frac{0{,}56747\,.\,28{,}13^4}{0{,}5}}$$

oder:

$$a = 28{,}13 \sqrt[4]{1{,}13494}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 5).:

$$a = 29 \text{ cm.}$$

Aufgabe 135. Ein Balken von Eichenholz ist mit seinen beiden Enden in zwei feste Wände eingespannt, so dass eine Lagerdrehung desselben um seine Achse nicht stattfinden kann. In der Mitte zwischen seinen beiden Befestigungsstellen ist ein Stab senkrecht durch den Balken gesteckt und in 70 cm Entfernung von der Balkenachse eine Last P = 20000 kg angehängt.

a). Wie gross ist eine Kante des regulär-sechsseitigen Querschnitts des Balkens zu nehmen, wenn dieser zwischen den Befesti-

Auflösung. a). Im vorliegenden Fall wird jede Balkenhälfte = $\frac{1}{2}\,l$ durch das Moment $\frac{1}{2}$ P R auf Drehung in Anspruch genommen, so dass die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\tfrac{1}{2}\,M \text{ oder } \tfrac{1}{2}\,P\,R = \frac{S}{Y}\,T_o$$

oder:

$$P\,R = \frac{2\,S\,T_o}{Y}$$

gungspunkten 3 m misst und eine merkliche Verdrehung nicht eintreten soll?

b). Wie gross müsste der Halbmesser eines Balkens von kreisförmigem Querschnitt genommen werden, wenn derselbe auf gleiche Weise auf Drehung in Anspruch genommen wird wie der Balken von sechsseitigem Querschnitt?

c). Wie gross ist in jedem der beiden Fälle der Torsionswinkel?

(S = 30 kg, E_t = 48000 kg pro □cm.)

Hilfsrechnungen.

1). . . $\log b = \frac{1}{3}\left(\log 140000 - \log 6{,}495\right)$

denn

$$\sqrt[3]{\frac{2000 \cdot 70}{2{,}165 \cdot 30}} = \sqrt[3]{\frac{140000}{6{,}495}}$$

$$\begin{array}{rl} \log 140000 = & 5{,}1461280 \\ -\log 6{,}495 = & 0{,}8125792 \\ \hline & 4{,}3335488 \\ & \cdot \frac{1}{3} \\ \hline \log b = & 1{,}4445163 \end{array}$$

mithin:

num-log b oder $b = 27{,}83$

2). . . $\sqrt[3]{\frac{8 \cdot 140000}{\pi \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{1120000}{3\pi}}$

$$\log d = \frac{1}{3}\left(\log 1120000 - (\log 3 + \log \pi)\right)$$

$$\begin{array}{rl} \log 1120000 = & 6{,}0492180 \\ & -0{,}9742712 \\ \hline & 5{,}0749468 \\ & \cdot \frac{1}{3} \\ \hline \log d = & 1{,}6916489 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \pi = & 0{,}4971499 \\ +\log 3 = & 0{,}4771213 \\ \hline & 0{,}9742712 \end{array}$$

mithin:

num-log d = 49,164 cm

also r = 24,58 cm.

Da nun nach Erkl. 175:

$$T_o = T_1 + T_2$$

und nach Gleichung 43). auf Seite 92:

$$T_1 = T_2 = {}^5/_{16}\, b^4 \sqrt{3}$$

so ist das polare Trägheitsmoment für den sechsseitigen Querschnitt:

$$T_o = 2 \cdot {}^5/_{16}\, b^4 \sqrt{3}$$

oder:

$$T_o = {}^5/_8\, b^4 \sqrt{3}$$

und da die Entfernung der äussersten Faserschicht von dem Mittelpunkt des Querschnitts:

$$Y = b$$

ist, worin b einer Kante des Sechsecks entspricht, so ist auch:

$$PR = \frac{2S \cdot {}^5/_8\, b^4 \sqrt{3}}{b}$$

oder da

$$\sqrt{3} = 1{,}732$$

beträgt,

$$PR = {}^5/_4 \cdot S\, b^3 \cdot 1{,}732$$

oder:

$$PR = 2{,}165\, S\, b^3$$

und hieraus ergibt sich für die Seite des sechseckigen Querschnitts:

$$b = \sqrt[3]{\frac{PR}{2{,}165\, S}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$b = \sqrt[3]{\frac{20000 \cdot 70}{2{,}165 \cdot 30}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$b = 27{,}83 \text{ cm.}$$

b). Bei einem Balken von kreisförmigem Querschnitt ist nach Tabelle siehe Erkl. 179:

$$\frac{1}{2} PR = \frac{1}{16}\pi S d^3$$

oder:

$$PR = \frac{1}{8}\pi S d^3$$

und hieraus erhält man für:

$$d = \sqrt[3]{\frac{8\, PR}{\pi S}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 20000 \cdot 70}{3{,}14 \ldots 30}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).

$$d = 49{,}164 \text{ oder } r = 24{,}58 \text{ cm.}$$

3). . . $\frac{5}{8} b^4 \sqrt{3} = 0{,}625 \,.\, 27{,}83^4 \,.\, 1{,}732$

$$\begin{array}{r} 0{,}625 \,.\, 1{,}732 \\ \hline 8660 \\ 3464 \\ 10392 \\ \hline 1{,}082500 \end{array}$$

4). $\frac{90 \,.\, 20000 \,.\, 70 \,.\, 300}{\pi \,.\, 48000 \,.\, 1{,}0825 \,.\, 27{,}83^4} = \frac{630 \,.\, 1250}{\pi \,.\, 1{,}0825 \,.\, 27{,}83^4}$

$\log \omega^0 = \log 630 + \log 1250 - (\log \pi + \log 1{,}0825 + 4 \,.\, \log 27{,}83)$

$$\begin{array}{rl} \log 630 = & 2{,}7993405 \\ + \log 1250 = & 3{,}0969100 \\ \hline & 5{,}8962505 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \pi = & 0{,}4971499 \\ + \log 1{,}0825 = & 0{,}0344279 \\ + \log 27{,}83^4 = & 5{,}7780652 \\ \hline & 6{,}3096430 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log 27{,}83 = & 1{,}4445163 \\ & .\, 4 \\ \hline & 5{,}7780652 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \text{des Zählers} = & 5{,}8962505 \\ - \log \text{des Nenners} = & -6{,}3096430 \\ \hline \log \omega^0 = & 0{,}5866075 - 1 \end{array}$$

mithin:

num-log ω^0 oder $\omega^0 = 0{,}386^0$

oder:

$\frac{3{,}86 \,.\, 6}{= 23{,}16'}$; $\frac{1{,}6 \,.\, 6}{= 9{,}6''}$

5). . . $\frac{8 \,.\, 360 \,.\, 20000 \,.\, 70 \,.\, 300}{\pi^2 \,.\, 48000 \,.\, 49{,}164^4} = \frac{120000 \,.\, 210}{\pi^2 \,.\, 49{,}164^4}$

$\log \omega^0 = \log 120000 + \log 210 - (2 \,.\, \log \pi + 4 \,.\, \log 49{,}164)$

$$\begin{array}{rl} \log \pi = & 0{,}4971499 \\ & .\, 2 \\ \hline \log \pi^2 = & 0{,}9942998 \\ + \log d^4 = & 6{,}7665956 \\ \hline & 7{,}7608954 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log 49{,}164 = & 1{,}6916489 \\ & .\, 4 \\ \hline \log d^4 = & 6{,}7665956 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log 120000 = & 5{,}0791812 \\ + \log 210 = & 2{,}3222193 \\ \hline & 8{,}4014005 - 1 \\ & - 7{,}7608954 \\ \hline \log \omega^0 = & 0{,}6405051 - 1 \end{array}$$

mithin:

num-log ω^0 oder $\omega^0 = 0{,}437^0$

oder:

$\frac{4{,}37 \,.\, 6}{= 26{,}22'}$; $\frac{2{,}2 \,.\, 6}{= 13{,}2''}$

c). Wäre der Stab nur an einem Ende befestigt und am andern freien Ende durch $P R = M$ in Anspruch genommen, so würde nach der in Antw. auf Frage 173 gegebenen Gleichung: $\omega^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M l}{E_t T_o}$ sein. Da der Stab aber im vorliegenden Fall an beiden Seiten befestigt, und in seiner Mitte durch $P R = M$ beansprucht ist, so ist der Torsionswinkel in diesem Fall nur halb so gross, also:

$$\omega^0 = \frac{90}{\pi} \cdot \frac{M l}{E_t T_o}$$

Wie unter a). bereits erwähnt, ist:

$$T_o = {}^5/_8 \, b^4 \sqrt{3}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 3).:

$$T_o = 1{,}0825 \,.\, 27{,}83^4$$

Setzen wir diesen Wert nebst den übrigen Zahlenwerten in die obige Gleichung für ω^0, so ist:

$$\omega^0 = \frac{90}{\pi} \cdot \frac{20000 \,.\, 70 \,.\, 300}{48000 \,.\, 1{,}0825} \cdot 27{,}83^4$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 4).:

$$\omega^0 = 23' \; 9{,}6''$$

Der Torsionswinkel für den oben unter b). berechneten Balken von kreisförmigem Querschnitt ist nach Gleichung 5). in Erkl. 180:

$$\omega^0 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{360}{\pi^2} \cdot \frac{P R l}{E_t d^4}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\omega^0 = \frac{8 \,.\, 360 \,.\, 20000 \,.\, 70 \,.\, 300}{\pi^2 \,.\, 48000 \,.\, 49{,}164^4}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 5).:

$$\omega^0 = 26' \; 13{,}2''$$

NB. Der Torsionswinkel ist bei dem Balken von kreisförmigem Querschnitt etwas grösser als bei dem Balken von sechseckigem Querschnitt, weil bei letzterem die Entfernung der äussersten Faserschicht $Y = b$ genommen und somit der Querschnitt, resp. eine Seite desselben etwas grösser berechnet wurde als es unbedingt nötig ist. Eine Vergleichung der in Antw. auf Frage 67 enthaltenen Formeln zeigt, dass für die senkrechte Achse $Y = \frac{1}{2} b \sqrt{3}$ also kleiner ist als für die wagerechte Achse. Nimmt man z. B. eine Seite des sechseckigen Querschnitts anstatt 27,83 cm nur 27 cm gross, so wird der Torsionswinkel des Balkens von sechsseitigem Querschnitt mit dem Torsionswinkel des Balkens von kreisförmigem Querschnitt übereinstimmen.

Aufgabe 136. Welche mechanische Arbeit ist nötig zum Zerdrehen eines an einem Ende befestigten Eichenholzbalkens von 3 m Länge, wenn der Querschnitt

a). eine Kreisfläche von 49 cm Durchmesser;

b). ein reguläres Sechseck von 27 cm Kante ist und der Festigkeitskoeffizient $s = 280$ kg pro □cm und der Elasticitätsmodulus = 48000 kg beträgt?

Hilfsrechnungen.

1). . . $\log W = (2 . \log 280 + 2 . \log 49 + \log \pi) - \log 2560$

$$\begin{aligned} \log 49 &= 1{,}6901961 \\ &\quad .2 \\ \log 49^2 &= 3{,}3803922 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 280 &= 2{,}4471580 \\ &\quad .2 \\ \log 280^2 &= 4{,}8942160 \\ + \log 49^2 &= 3{,}3803922 \\ + \log \pi &= 0{,}4971499 \\ &\quad 8{,}7717581 \\ - \log 2560 &= -3{,}4082400 \\ \log W &= 5{,}3635181 \end{aligned}$$

mithin:

num-log W oder W = 230950 Centimeterkilogr.
oder W = 2309,5 Meterkilogr.

2). . . $\log W = (2 . \log 280 + 2 . \log 27 + \log 2{,}598) - \log 640$

$$\begin{aligned} \log 27 &= 1{,}4313638 \\ &\quad .2 \\ \log 27^2 &= 2{,}8627276 \\ + \log 280^2 &= 4{,}8942160 \\ + \log 2{,}598 &= 0{,}4146391 \\ &\quad 8{,}1715827 \\ - \log 640 &= 2{,}8061800 \\ \log W &= 5{,}3654027 \end{aligned}$$

mithin:

num-log W oder W = 231900 Centimeterkilogr.
oder W = 2319 Meterkilogr.

Erkl. 193. Wenn an dem einen Endpunkte einer in Drehbewegung begriffenen Welle ein Schwungrad sich befindet, und am andern Endpunkte der Welle durch irgend ein Bewegungshindernis die Bewegung plötzlich ins Stocken gerät, so wird die lebendige Kraft des Schwungrades (im Vergleich zu welcher die lebendige Kraft der Welle selbst als verschwindend klein vorausgesetzt wird) in mechanische Arbeit verwandelt, und durch diese mechanische Arbeit ein Torsionszustand in der Welle hervorgebracht. Die Grösse, welche die Spannung S dabei schliesslich erreicht, findet man aus der in Erkl. 191 gegebenen Gleichung, indem man darin für W

Auflösung. a). Nach der in Erkl. 191 gegebenen Gleichung ist die mechanische Arbeit:

$$W = \frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{E_1} \cdot V$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte und für das Volumen des kreisförmigen Balkens

$$V = \frac{49^2 . \pi . 300}{4}$$

eingesetzt:

$$W = \frac{280^2 . 49^2 . \pi \cdot 300}{4 . 48000 . 4}$$

oder:

$$W = \frac{280^2 . 49^2 . \pi}{2560}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).

$$W = 2309{,}5 \text{ mkg.}$$

b). Ist der Querschnitt des Balkens ein reguläres Sechseck von der Seite $b = 27$ cm, so ist der Inhalt der Querschnittsfläche:

$$6 . 0{,}433 . b^2 = 6 . 0{,}433 . 27^2$$

denn man kann sich das reguläre Sechseck von seinem Mittelpunkt aus in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke von der Seite $b = 27$ cm zerlegt denken. Mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes lässt sich nun leicht nachweisen, dass die Höhe eines solchen regulären Dreiecks:

$$h = \frac{1}{2} b \sqrt{3}$$

oder da:

$$\sqrt{3} = 1{,}732,$$

$$h = \frac{1}{2} b . 1{,}732 \text{ oder } h = 0{,}866\, b \text{ ist,}$$

und somit ist der Inhalt eines solchen Dreiecks, Grundlinie mal halbe Höhe:

$$\triangle = \frac{1}{2} \cdot 0{,}866\, b^2$$

oder:

$$\triangle = 0{,}433\, b^2$$

und da sechs solcher Dreiecke vorhanden sind, so ist der Inhalt des Sechsecks:

$$6 . 0{,}433\, b^2 = 6 . 0{,}433 . 27^2$$

und das Volumen des sechseckigen Balkens:

$$V = 6 . 0{,}433 \cdot 27^2 . 300$$

oder:

$$V = 2{,}598 . 27^2 . 300$$

die anfängliche lebendige Kraft des Schwungrades substituiert.

Hat z. B. das Schwungrad die Form eines Ringes von dem Gewicht P, so ist die Masse m desselben $m = \frac{P}{g}$, denn wie in dem Lehrbuch der Dynamik weiter erörtert wird, ist das Gewicht P eines jeden Körpers gleich der Masse m des Körpers, multipliziert mit der Beschleunigung g des freien Falles oder $P = mg$, worin $g = 9{,}81$ Meter bezeichnet, indem ein frei fallender Körper in jeder Sekunde eine Beschleunigung von 9,81 m erfährt. Ein anderes Gesetz der Dynamik sagt nun: „Die lebendige Kraft oder Energie einer bewegten Masse ist gleich dem halben Produkt aus der Masse, multipliziert mit dem Quadrat der Geschwindigkeit oder $W = \frac{1}{2} m v^2$", oder setzt man für m den oben erwähnten Wert $\frac{P}{g}$ ein, so ist:

$$W = \frac{P v^2}{2g}$$

und da nach der in Erkl. 191 gegebenen Gleichung:

$$W = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_2}{E_t} V$$

so ist auch:

$$\frac{P v^2}{2g} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_2}{E_t} V$$

Es wurde nun in der nebenstehenden Lösung berechnet, dass eine mechanische Arbeit von ca. 2300 mkg genügen würde, um den Eichenholzbalken von den gegebenen Dimensionen zu zerdrehen. Diese Zerdrehung würde also z. B. etwa eintreten, wenn an dem einen Ende des in einer Drehbewegung begriffenen Balkens ein Schwungrad von 5000 kg Gewicht und einer Umfangsgeschwindigkeit von 3 m (d. h. ein Punkt des Umfangs bewegt sich pro Sekunde 3 Meter weit fort) sich befindet und am andern Endpunkt der Welle die Bewegung plötzlich stockt, denn alsdann ist:

$$\frac{P v^2}{2g} = \text{ca. } 2300 \text{ (siehe Hilfsrech. 3).}$$

Dass unter den angenommenen Verhältnissen die Spannung S ihren höchsten Wert (für Eichenholz also = 280 kg pro □cm) erreicht, lässt sich dadurch beweisen, dass wir alle die gegebenen Werte in die obige Gleichung einsetzen und S als unbekannte Grösse daraus berechnen. Es ist also (alle Masse in Centimetern ausgedrückt, da sich der Zahlenwert von E = 48000 auf 1 □cm bezieht und auch S pro □cm berechnet werden soll):

$$\frac{5000 \cdot 300^2}{1962} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{48000} \cdot \frac{49^2 \cdot \pi \cdot 300}{4}$$

oder:

$$x = \sqrt[2]{\frac{5000 \cdot 90000 \cdot 4 \cdot 48000 \cdot 4}{1962 \cdot 49^2 \cdot \pi \cdot 300}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 4).:

$x = 279$ kg oder $x =$ ca. 280 kg.

Setzen wir diesen Wert in die in Erkl. 191 gegebene Gleichung, so ist:

$$W = \frac{1}{4} \cdot \frac{280^2 \cdot 2{,}598 \cdot 27^2 \cdot 300}{48000}$$

oder:

$$W = \frac{280^2 \cdot 27^2 \cdot 2{,}598}{640}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$W = 2319 \text{ mkg.}$$

Die beiden Balken sind also nahezu von gleicher Torsionsfestigkeit.

Hilfsrechnungen.

3). . . $P = 5000$, $v = 3$, $2g = 19{,}62$

also:

$$\frac{P v^2}{2g} = \frac{5000 \cdot 9}{19{,}62} = \frac{5000}{2{,}18}$$

2,18|5000 oder 218 : 500000 = ca. 2300 mkg.
436
―
640
654
―

4). . . $\sqrt{\frac{5000 \cdot 90000 \cdot 4 \cdot 48000 \cdot 4}{1962 \cdot 49^2 \cdot \pi \cdot 300}} =$

$$\sqrt{\frac{50000000 \cdot 1280}{109 \cdot 49^2 \cdot \pi}}$$

$$\log x = \frac{1}{2} \left[(\log 50000000 + \log 1280) - (\log 109 + 2 \cdot \log 49 + \log \pi)\right]$$

$$\begin{aligned} \log 50000000 &= 7{,}6989700 \\ + \log 1280 &= 3{,}1072100 \\ &\overline{10{,}8061800} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 109 &= 2{,}0374265 \\ + \log 49^2 &= 3{,}3803922 \\ + \log \pi &= 0{,}4971499 \\ &\overline{5{,}9149686} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &10{,}8061800 \\ &- 5{,}9149686 \\ \log x^2 = &\ \overline{4{,}8912114} \\ &\cdot \tfrac{1}{2} \\ \log x = &\ \overline{2{,}4456057} \end{aligned}$$

mithin:

num-log x oder $x = 279$ kg.

Aufgabe 137. Wie gross ist an der Elasticitätsgrenze

a). die Kraft P und

b). die Verdrehung

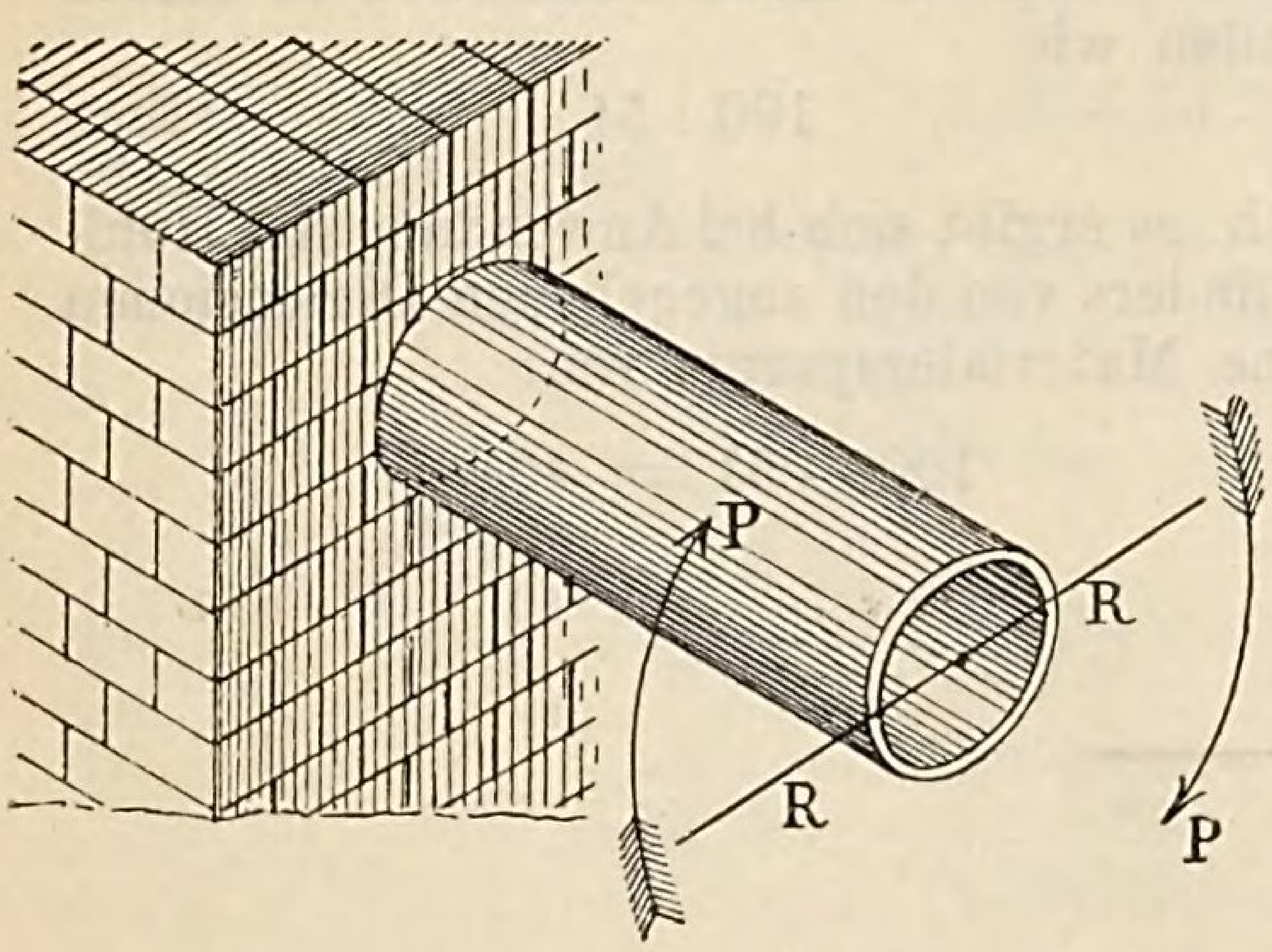
eines 5 m langen gusseisernen Prismas von kreisringförmigem Querschnitt, wenn dasselbe mit einem Ende fest eingemauert ist und am andern durch die zwei gleichgerichteten Momente P R, siehe Fig. 172, auf Torsion in Anspruch genommen wird? Der Stab hat 5 cm äusseren und 4 cm inneren Durchmesser, während P an einem 50 cm langen Hebelarm R wirkt.

c). Welchen Durchmesser muss ein massiver Cylinder von derselben Länge erhalten, wenn er die gleiche Torsionsfestigkeit besitzen soll wie der Hohlcylinder, und

d). welche Materialersparnis ergibt sich somit bei Anwendung des Hohlcylinders?

(S = 500 kg, E_t = 400000 kg pro □cm.)

Figur 172.



Hilfsrechnungen.

1). . . $\frac{36900\,\pi}{32\,.\,50} = \frac{369\,\pi}{16} = 23{,}0625\,\pi$

$$\begin{aligned} \log 23{,}0625 &= 1{,}3629064 \\ + \log \pi &= 0{,}4971499 \\ \hline \log P &= 1{,}8600563 \end{aligned}$$

mithin:

num-log P oder P = 72,458 kg.

2). . . $\frac{64\,.\,72{,}458\,.\,50\,.\,500\,.\,180}{400000\,.\,\pi^2\,.\,369} = \frac{72{,}458\,.\,720}{\pi^2\,.\,369}$

$\log \omega^0 = (\log 72{,}458 + \log 720) - (2\,.\log \pi + \log 369)$

$$\begin{aligned} \log 72{,}458 &= 1{,}8600563 \\ + \log 720 &= 2{,}8573325 \\ \hline & 4{,}7173888 \\ &- 3{,}5613262 \\ \hline \log \omega^0 &= 1{,}1560626 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \pi &= 0{,}4971499 \\ &\ .\,2 \\ \hline \log \pi^2 &= 0{,}9942998 \\ + \log 369 &= 2{,}5670264 \\ \hline & 3{,}5613262 \end{aligned}$$

Auflösung. a). Mit Bezug auf Fig. 172 und auf Gleichung 2). Seite 227 ist:

$$2\,P\,R = \frac{S}{Y}\,T_o$$

oder nach dem in der Tabelle Erkl. 179 für den Kreisquerschnitt gegebenen Wert ist:

$$2\,P\,R = \frac{1}{16}\,\pi\,S\,\frac{D^4 - d^4}{D}$$

oder:

$$P\,R = \frac{1}{32}\,\pi\,S\,\frac{D^4 - d^4}{D}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P\,R = \frac{1}{32}\,\pi\,.\,500 \cdot \frac{625 - 256}{5}$$

oder:

$$P\,R = \frac{100\,\pi\,.\,369}{32}$$

oder:

$$P = \frac{36900\,\pi}{32\,.\,50}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$P = 72{,}458 \text{ kg.}$$

b). Der Winkel, um welchen der gusseiserne Hohlcylinder durch das Kräftepaar 2 P R verdreht wird, ist nach Gleichung 8). in Erkl. 180:

$$\omega^0 = 2 \cdot \frac{32\,P\,R\,l\,.\,180}{E_t\,\pi\,(D^4 - d^4)\,.\,\pi}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\omega^0 = \frac{64\,.\,72{,}458\,.\,50\,.\,500\,.\,180}{400000\,.\,\pi^2\,.\,369}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$\omega^0 = 14^0\ 19'\ 26{,}4''$$

c). Nach der in Antw. auf Frage 186 entwickelten Gleichung ist für einen massiven Cylinder von derselben Torsionsfestigkeit der Durchmesser:

$$\delta = D\,\sqrt[3]{1 - n^4}$$

in welcher Formel $n = \frac{d}{D}$, also im vorliegenden Fall $n = \frac{4}{5}$ bedeutet, und somit ergibt sich für:

mithin:

num-log ω^0 oder $\omega^0 = 14{,}324^0$

$$3{,}24 \cdot 6 = 19{,}44' \; ; \quad 4{,}4 \cdot 6 = 26{,}4''$$

Hilfsrechnung 3.

$$5\sqrt[3]{1-\left(\frac{4}{5}\right)^4} = 5\sqrt[3]{1-\frac{256}{625}} = 5\sqrt[3]{\frac{369}{625}}$$

$$\log \delta = \log 5 + \frac{1}{3}\left(\log 369 - \log 625\right)$$

$$\begin{aligned} & \qquad\quad\; +3 \qquad\qquad -3 \\ \log 369 &= 2{,}5670264 \\ -\log 625 &= 2{,}7958800 \\ &\overline{\,2{,}7711464-3} \\ &\qquad \cdot \tfrac{1}{3} \\ &\overline{\,0{,}9237155-1} \\ +\log 5 &= 0{,}6989700 \\ \log \delta &= \overline{0{,}6226855} \end{aligned}$$

mithin:

num-log δ oder $\delta = 4{,}1495$ cm.

Hilfsrechnung 4.

$$17{,}64 : 9 = 1 : \frac{9}{17{,}64} = 100 : \frac{900}{17{,}64}$$

$$\begin{aligned} 17{,}64 : 900 \text{ oder } 1764 : 90000 &= 51 \\ 8820 & \\ \overline{1800} & \\ 1764 & \\ \overline{} & \end{aligned}$$

also $100 : 51$

$$\delta = 5\sqrt[3]{1-\left(\frac{4}{5}\right)^4}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 3).:

$$\delta = 4{,}2 \text{ cm.}$$

d). Der Flächeninhalt des Kreises vom Durchmesser δ verhält sich zu dem Flächeninhalt des Kreisrings von den Durchmessern D und d wie:

$$\frac{\delta^2 \pi}{4} : \frac{D^2 \pi}{4} - \frac{d^2 \pi}{4}$$

oder:

$$\delta^2 : D^2 - d^2$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$4{,}2^2 : 5^2 - 4^2$$

oder:

$$17{,}64 : 9$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 4). verhält sich der Materialaufwand in beiden Fällen wie

$$100 : 51$$

d. h. es ergibt sich bei Anwendung des Hohlcylinders von den angegebenen Dimensionen eine Materialersparnis von:

$$100 - 51 = 49\,\%.$$

Aufgabe 138. Ein Stab von 150 cm freier Länge wird seiner ganzen Länge nach gleichmässig auf Drehung in Anspruch genommen. Wie gross müssen in 25, 50, 75, 100 und 125 cm Entfernung vom freien Ende die Durchmesser genommen werden, wenn der Stab in allen Querschnitten dieselbe Torsionsfestigkeit besitzen soll und an der Befestigungsstelle der Durchmesser $d = 36$ cm beträgt?

Auflösung. Nach der in Antwort auf Frage 193 gegebenen Formel ist:

$$y = d\sqrt[3]{\frac{x}{l}}$$

Nennen wir nun die zu ermittelnden Durchmesser der Reihe nach y_1, y_2, y_3, y_4 und y_5, so ist:

$$y_1 = 36\sqrt[3]{\frac{25}{150}} \quad \text{oder} \quad y_1 = d\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$$

$$y_2 = 36\sqrt[3]{\frac{50}{150}} \quad \text{oder} \quad y_2 = d\sqrt[3]{\frac{2}{6}}$$

$$y_3 = 36\sqrt[3]{\frac{75}{150}} \quad \text{oder} \quad y_3 = d\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Hilfsrechnungen.

1). . . . $\sqrt[3]{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}(\log 1 - \log 6)$

$$\begin{array}{rl} \log 1 = & 3{,}0000000-3 \\ -\log 6 = & -0{,}7781513 \\ \hline & 2{,}2218487-3 \\ & \cdot\frac{1}{3} \\ \hline & 0{,}7406162-1 \end{array}$$

mithin:
num-log = 0,55032

$$\begin{array}{r} 0{,}550 \,.\, 35 \\ \hline 330 \\ 165 \\ \hline 19{,}80 \text{ cm.} \end{array}$$

2). . . . $\sqrt[3]{\frac{2}{6}} = \frac{1}{3}(\log 2 - \log 6)$

$$\begin{array}{rl} \log 2 = & 3{,}3010300-3 \\ -\log 6 = & -0{,}7781513 \\ \hline & 2{,}5228787-3 \\ & \cdot\frac{1}{3} \\ \hline & 0{,}8409596-1 \end{array}$$

mithin:
num-log = 0,69336

$$\begin{array}{r} 0{,}693 \,.\, 36 \\ \hline 4158 \\ 2079 \\ \hline 24{,}948 \text{ cm.} \end{array}$$

3). . . . $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(\log 1 - \log 2)$

$$\begin{array}{rl} \log 1 = & 3{,}0000000-3 \\ -\log 2 = & -0{,}3010300 \\ \hline & 2{,}6989700-3 \\ & \cdot\frac{1}{3} \\ \hline & 0{,}8996567-1 \end{array}$$

mithin:
num-log = 0,7937

$$\begin{array}{r} 0{,}794 \,.\, 36 \\ \hline 4764 \\ 2382 \\ \hline 28{,}584 \text{ cm.} \end{array}$$

4). . . . $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(\log 2 - \log 3)$

$$\begin{array}{rl} \log 2 = & 3{,}3010300-3 \\ -\log 3 = & -0{,}4771213 \\ \hline & 2{,}8239087-3 \\ & \cdot\frac{1}{3} \\ \hline & 0{,}9413029-1 \end{array}$$

mithin:
num-log = 0,87358

$$\begin{array}{r} 0{,}873 \,.\, 36 \\ \hline 5238 \\ 2619 \\ \hline 31{,}428 \text{ cm.} \end{array}$$

$$y_4 = 36\sqrt[3]{\frac{100}{150}} \quad \text{oder} \quad y_4 = d\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

$$y_5 = 36\sqrt[3]{\frac{125}{150}} \quad \text{oder} \quad y_5 = d\sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

oder nach den nebenstehenden Hilfsrechnungen 1—5 ist:

$$y_1 = 0{,}550\, d$$
$$y_2 = 0{,}693\, d$$
$$y_3 = 0{,}794\, d$$
$$y_4 = 0{,}874\, d$$

und

$$y_5 = 0{,}941\, d$$

oder da im gegebenen Fall $d = 36$ cm beträgt, so ist:

$$y_1 = 19{,}8 \text{ cm}$$
$$y_2 = 24{,}9 \text{ cm}$$
$$y_3 = 28{,}6 \text{ cm}$$
$$y_4 = 31{,}5 \text{ cm}$$

und

$$y_5 = 33{,}9 \text{ cm.}$$

5). . . . $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3}(\log 5 - \log 6)$

$$\begin{aligned} \log 5 &= 3,6989700 - 3 \\ -\log 6 &= -0,7781513 \\ & \overline{2,9208187 - 3} \\ & \cdot \tfrac{1}{3} \\ & \overline{0,9736062 - 1} \end{aligned}$$

mithin:
num-log = 0,94104

$$\begin{array}{r} 0,941 \,.\, 36 \\ \hline 5646 \\ 2823 \\ \hline 33,876 \text{ cm.} \end{array}$$

Aufgabe 139. Wenn ein ringförmiges Schwungrad 500 kg wiegt und seine Umfangsgeschwindigkeit $v = 2,8$ m beträgt, welchen körperlichen Inhalt muss dann die dazu gehörige schmiedeeiserne Welle haben, wenn die für Schmiedeeisen als zulässig anzunehmende Torsionsspannung S = 400 kg pro □cm nicht überschreiten darf und E = 100000 gesetzt wird?

Auflösung. Nach der in Erkl. 193 entwickelten Gleichung ist:

$$\frac{P v^2}{2g} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{E_1} \cdot V$$

und hieraus ergibt sich für den körperlichen Inhalt oder das Volumen der Welle:

$$V = \frac{P v^2}{2g} \cdot \frac{4 E_1}{S^2}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte (in cm) eingesetzt:

$$V = \frac{500 \,.\, 280^2 \,.\, 4 \,.\, 1000000}{2 \,.\, 981 \,.\, 400^2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

V = 500000 Kubikcentimeter

oder:

V = 0,5 Kubikmeter.

Hilfsrechnung.

$$\frac{500 \,.\, 280 \,.\, 280 \,.\, 4000000}{1962 \,.\, 160000} = \frac{35 \,.\, 28000000}{1962}$$

$$\log V = \log 35 + \log 28000000 - \log 1962$$

$$\begin{aligned} \log 35 &= 1,5440680 \\ + \log 28000000 &= 7,4471580 \\ & \overline{8,9912260} \\ - \log 1962 &= 3,2926990 \\ \log V &= \overline{5,6985270} \end{aligned}$$

mithin:
num-log V oder V = 499490
oder ca. 500000 Kubikcentimeter
oder 0,5 Kubikmeter.

h). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 140. Wie dick muss eine schmiedeeiserne Welle gemacht werden, wenn im Zahnkranze eines auf derselben sitzenden Zahnrades von 2 m Durchmesser eine Kraft von 1200 kg wirksam ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 129 unter Anwendung der Formel 1 in Antw. auf Frage 183.

Aufgabe 141. Welchen Durchmesser muss eine gusseiserne Welle erhalten, die in jeder Minute 50 Umdrehungen macht und dabei eine mechanische Arbeit von 84 Pferdekräften entwickelt, wenn 33fache Sicherheit angenommen wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 130 b unter Benutzung der Formel 4 in Antw. auf Frage 185.

Aufgabe 142. Welcher Kraft kann eine gusseiserne Welle von 25 cm Durchmesser widerstehen, wenn diese Kraft an einem Rad von 1,5 m Durchmesser wirkt? ($S = {}^{3000}/_{33}$)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 131 unter Anwendung der Formel 2 in Antw. auf Frage 183.

Aufgabe 143. Der Widerstand an dem Bohrstahl einer Cylinderbohrmaschine sei 1000 kg, die Länge des Stahls entsprechend dem Radius des zu bohrenden Cylinders sei 20 cm und die Länge der den Stahl haltenden Bohrstange 1 m.

a). Wie gross muss der Durchmesser der Bohrstange sein, wenn für S nur 500 kg pro □ cm angenommen wird, und

b). wie gross ist der Torsionswinkel, wenn $E_t = 1200000$ gerechnet wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 132. $PR = 1000 . 20$.

Aufgabe 144. Zur Bestimmung des Elasticitätsmodulus für Torsion hat man eine runde Stahlstange von 7,4 cm Durchmesser und 1 m freier Länge an dem einen Ende horizontal befestigt und am andern Ende senkrecht dazu, ebenfalls in horizontaler Richtung, einen 2 m langen Hebelarm angebracht, an dessen Ende ein Gewicht von 100 kg angebracht wird, wodurch ein Drehungswinkel von $^1/_2{}^0$ entsteht. Wie gross ergibt sich hieraus der Elasticitätsmodulus des Gussstahls?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 133.

Aufgabe 145. An einer quadratischen Kurbelwelle aus Buchenholz wirkten zwei Arbeiter mit je 34 kg an einer Kurbel von 42 cm Länge.

a). Wie gross ist eine Seite des Wellenquerschnitts zu nehmen, wenn der Festigkeitskoeffizient für Buchenholz = 320 beträgt und 16fache Sicherheit angenommen wird?

b). Wie gross ist der Torsionswinkel, wenn die Wellenlänge 130 cm beträgt und $E_t = 37200$ gerechnet wird?

c). Welchen Bogen beschreibt demnach die äusserste Faserschicht?

d). Wie gross muss eine Kante des quadratischen Querschnitts genommen werden, wenn der Torsionswinkel nur $^1/_{10}{}^0$ betragen soll?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 134.

Aufgabe 146. Ein Balken von Tannenholz ist mit seinen beiden Enden in zwei feste Wände eingespannt, so dass eine Lagerdrehung desselben um seine Achse nicht stattfinden kann. In der Mitte zwischen seinen beiden Befestigungsstellen ist ein Stab senkrecht durch den Balken gesteckt und in 1 m Entfernung von der Balkenachse eine Last von 12000 kg angehängt.

a). Wie gross ist eine Kante des regulären sechsseitigen Querschnitts des Balkens zu nehmen, wenn dieser zwischen den Befestigungspunkten 5 m misst, der Festigkeitskoeffizient für Tannenholz = 240 beträgt und 8fache Sicherheit angenommen wird?

b). Wie gross müsste der Radius eines Balkens von kreisförmigem Querschnitt genommen wer-

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 135.

den, wenn derselbe auf gleiche Weise einer Drehung widerstehen soll?

c). Wie gross ist in jedem der beiden Fälle der Torsionswinkel, wenn $E_t = 40000$?

Aufgabe 147. a). Welche mechanische Arbeit ist erforderlich zum Zerdrehen eines an einem Ende befestigten cylindrischen Stabes aus Schmiedeeisen von 10 m Länge und 8 cm Durchmesser, wenn der Festigkeitskoeffizient $s = 4500$ und der Elasticitätsmodulus $E_t = 600000$ kg pro □cm angenommen wird?

b). Welche mechanische Arbeit wäre zum Zerdrehen des Stabes nötig, wenn derselbe ein regelmässiges Sechseck von 4,5 cm Kante zum Querschnitt hätte?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 136.

Aufgabe 148. Wie gross ist

a). die Kraft P,

b). der Torsionswinkel eines 8 m langen gusseisernen Rohres von kreisringförmigem Querschnitt, wenn dasselbe mit einem Ende fest eingemauert ist und am andern durch die zwei gleichgerichteten Momente P R (s. Fig. 173) auf Torsion in Anspruch genommen wird. Der Stab hat 23 mm äusseren und 18 mm inneren Durchmesser, während P an einem 40 cm langen Hebelarme wirkt.

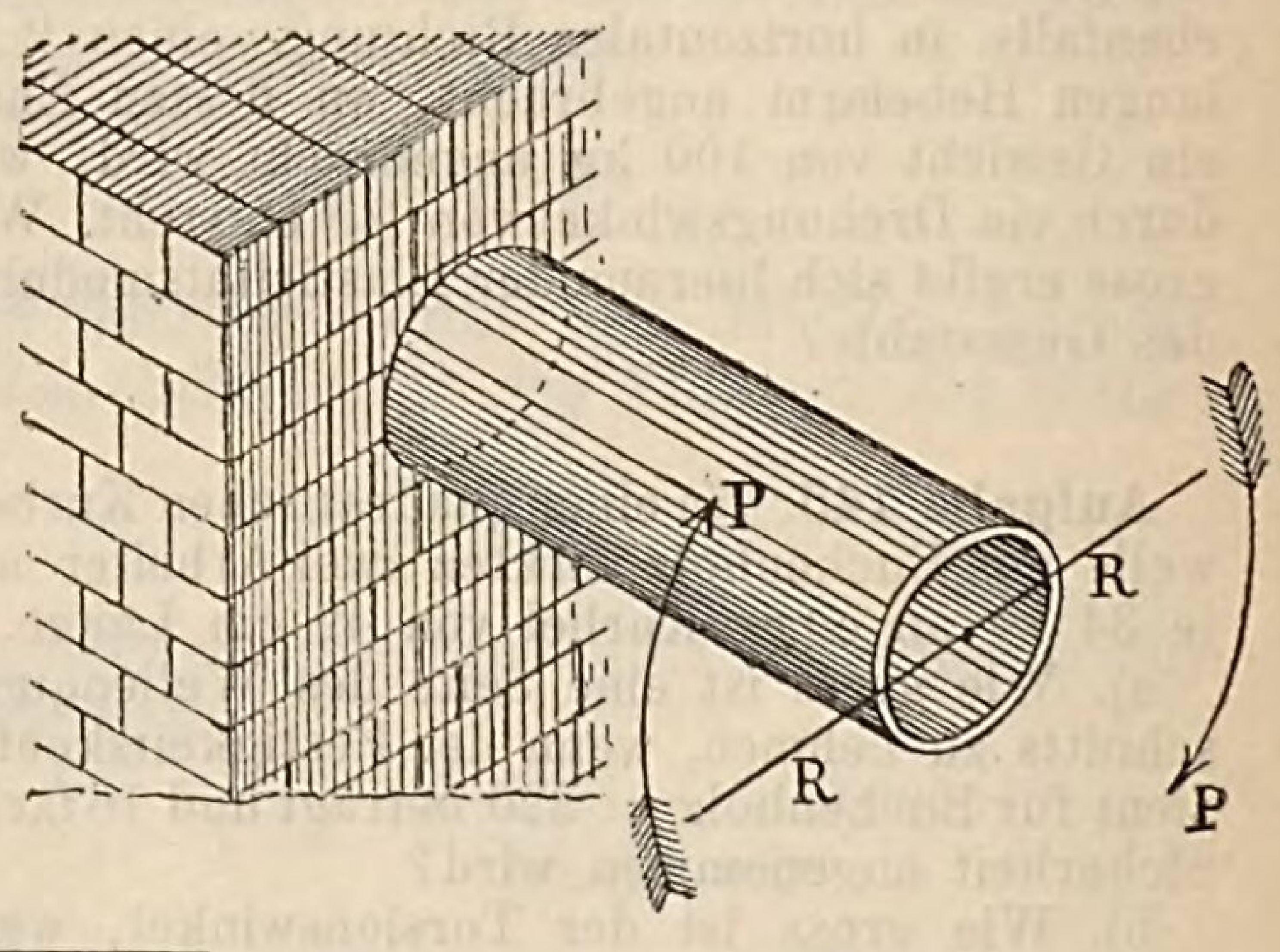
c). Welchen Durchmesser δ muss ein massiver Cylinder von derselben Länge erhalten, wenn er die gleiche Torsionsfestigkeit besitzen soll wie ein Hohlcylinder?

d). Welche Materialersparnis ergibt sich somit bei Anwendung des Hohlcylinders?

($S = 500$ kg, $E_t = 400000$ kg pro □cm.)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 137.

Figur 173.



Aufgabe 149. Ein Stab von 3 m freier Länge wird seiner ganzen Länge nach gleichmässig auf Drehung in Anspruch genommen. Wie gross müssen in 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240 und 270 cm Entfernung vom freien Ende die Durchmesser genommen werden, wenn der Stab in allen Querschnitten dieselbe Torsionsfestigkeit besitzen soll und an der Befestigungsstelle der Durchmesser 50 cm beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 138.

Aufgabe 150. Wenn der Ring eines Schwungrades von 5 m Durchmesser 4000 kg wiegt und das Rad pro Minute 48 Umdrehungen macht, welches Volumen muss dann die dazu gehörige Welle aus Bessemerstahl haben, wenn die als zulässig anzunehmende Torsionsspannung 600 kg pro □cm nicht überschreiten darf und $E = 1200000$ gesetzt wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 139. Die Umfangsgeschwindigkeit $v = \frac{5\pi \,.\, 48}{60}$ Meter.

VII. Die Zerknickungsfestigkeit.

a). Tragkraft der auf diese Weise in Anspruch genommenen Körperformen.

Frage 197. Was versteht man unter der Zerknickungsfestigkeit eines Körpers?

Antwort. Wenn ein Körper gleichzeitig auf Druck und Biegung, also auf rückwirkende und relative Festigkeit in Anspruch genommen wird, so nennt man den dabei im Körper auftretenden Widerstand die Zerknickungsfestigkeit.

Frage 198. Welche Körper werden besonders auf ihre Zerknickungsfestigkeit in Anspruch genommen?

Erkl. 194. Die Untersuchungen über die rückwirkende Festigkeit der Körper, oder über die Last, welche gerade, auf einem horizontalen Boden stehende Säulen oder prismatische Körper zu tragen vermögen, ehe sie sich biegen, sind zuerst von *L. Euler* theoretisch geführt worden und in Verbindung damit auch die wissenschaftlich interessante Frage beantwortet, wie hoch eine Säule von gegebener Dicke sein darf, bis sie durch ihre eigene Last gebogen wird.

Antwort. Die Zerknickungsfestigkeit kommt immer dann in Betracht, wenn auf Körper von ansehnlicher Länge in der Richtung ihrer Längsausdehnung ein Druck ausgeübt wird, wie dies der Fall ist bei allen senkrecht stehenden Pfosten, Säulen, Stützen, Mauern u. s. w., welche bedeutende Lasten zu tragen haben und deren Länge im Verhältnis zu den Querschnittsdimensionen ziemlich gross ist.

Frage 199. Welcher Unterschied besteht zwischen der Wirkung des Drucks auf eine kurze Säule und der Druckwirkung auf eine lange Säule?

Erkl. 195. Die Grösse des Drucks, bei welchem die Biegung beginnt, lässt sich nur nach Wahrscheinlichkeitsgründen im voraus berechnen. Als Grundlage einer solchen Rechnung benutzt man die Erfahrungen, welche bei einer grossen Anzahl besonderer Fälle gemacht worden sind und aus welchen ein mittleres Resultat gezogen wird. Genau vergleichbare Ausdrücke für die Zerknickungsfestigkeit sind daher noch weniger zu erlangen, als für ihre absolute Festigkeit.

Erkl. 196. So lange die Mittellinie eines auf Druck in Anspruch genommenen Körpers ihre gerade Richtung beibehält, wird die Kraft P in den einzelnen Punkten des Körpers gleiche Zusammendrückungen hervorrufen, die sich für jeden Querschnitt zu der Gesamtpressung:

$$S = \frac{P}{F}$$ (siehe Gleichung 11 Seite 64)

zusammensetzen, wenn F die Grösse des Querschnitts bedeutet. Sobald aber die Mittellinie eines auf Druck in Anspruch genommenen Kör-

Antwort. Wirkt ein starker Druck auf eine Säule oder überhaupt auf ein Prisma, dessen Länge nur wenig grösser ist als die kleinste Querschnittsdimension desselben, so tritt eine Verkürzung des Körpers, aber zugleich auch eine Verdickung desselben ein, woraus hervorgeht, dass die Teilchen nicht nur nach der Richtung des Drucks einander näher rücken, sondern auch nach den Seiten ausweichen und gleichsam wie Keile in die Zwischenräume anderer Teile einzudringen streben. Die Elasticität widersetzt sich dieser Seitenbewegung. Werden ihre Grenzen überschritten, so treten bleibende seitliche Anschwellungen ein und endlich fallen die Teile ganz auseinander; es findet eine Zerdrückung statt.

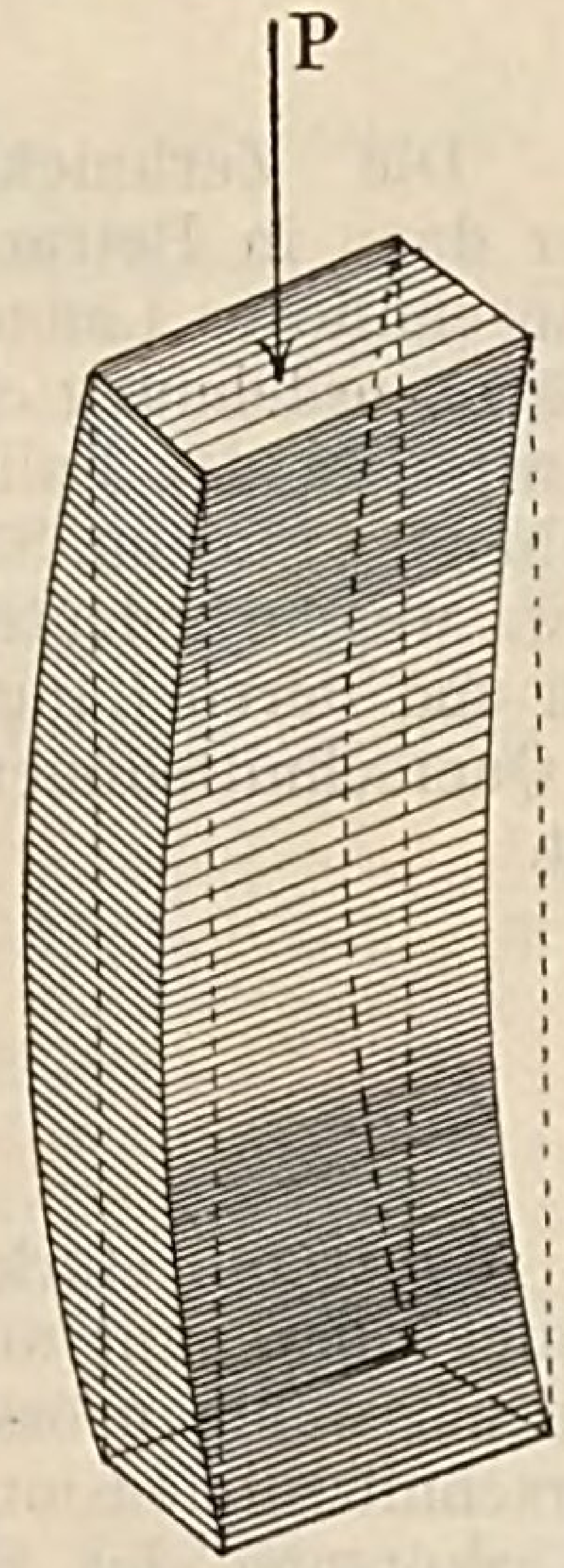
Bei einer Säule oder einem Pfeiler von beträchtlicher Höhe tritt dagegen bei fortgesetzter Belastung eine Biegung der Körperachse ein; dieselbe ist eine Folge der ungleichen inneren Beschaffenheit des Körpers, infolgedessen der Körper nach den verschiedenen Faserrichtungen eine ungleiche Widerstandsfähigkeit besitzt und an der Seite des zufällig geringeren Wider-

pers gebogen wird, dann ist (vergl. Antw. auf Frage 80) das Spannungsmoment für einen beliebigen Querschnitt

$$M = \frac{E\,T}{R}$$

Dieses Moment (bestehend aus der drückenden Kraft P multipliziert mit der Grösse y der Durchbiegung, für den betreffenden Querschnitt also $M = P\,y$) ändert sich für denselben Querschnitt mit der Grösse der Durchbiegung y, während das entsprechende Moment für den auf relative Festigkeit in Anspruch genommenen Körper bei den in der Praxis zulässigen Biegungen für denselben Querschnitt denselben (konstanten) Wert behält.

Figur 174.



standes eine stärkere Zusammendrückung erfährt, so dass sich die auf den Körper anfänglich als Druck äussernde Kraft in eine biegende Kraft umwandelt[1]). Bei zunehmender Belastung wächst auch die Biegung und endlich erfolgt die Zerstörung des Körpers durch Zerknicken. Ist der Querschnitt ein Rechteck, so tritt in der Regel die Biegung in der Art ein, dass von den beiden breiten Seitenflächen des Prismas die eine konkav und die andere konvex ausgebogen wird, wie es in Fig. 174 dargestellt ist.

[1]) Siehe Erkl. 195.

Frage 200. Auf welchem Wege gelangt man zu einer Grundformel für die Zerknickungsfestigkeit und wie lautet dieselbe?

Erkl. 197. In der nebenstehenden Formel bedeutet T das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts für irgend eine neutrale Achse, da angenommcn werden muss, dass die Biegung nach der Richtung erfolgt, für welche der Widerstand gegen Biegung am kleinsten ist. D. h. bei einem Querschnitt, welcher, wie z. B. das Rechteck Fig. 175, in Bezug auf zwei rechtwinklige Achsen verschiedene achsiale Trägheitsmomente hat und für welchen

$$T = \frac{1}{12}\,b\,h^3 \text{ ist,}$$

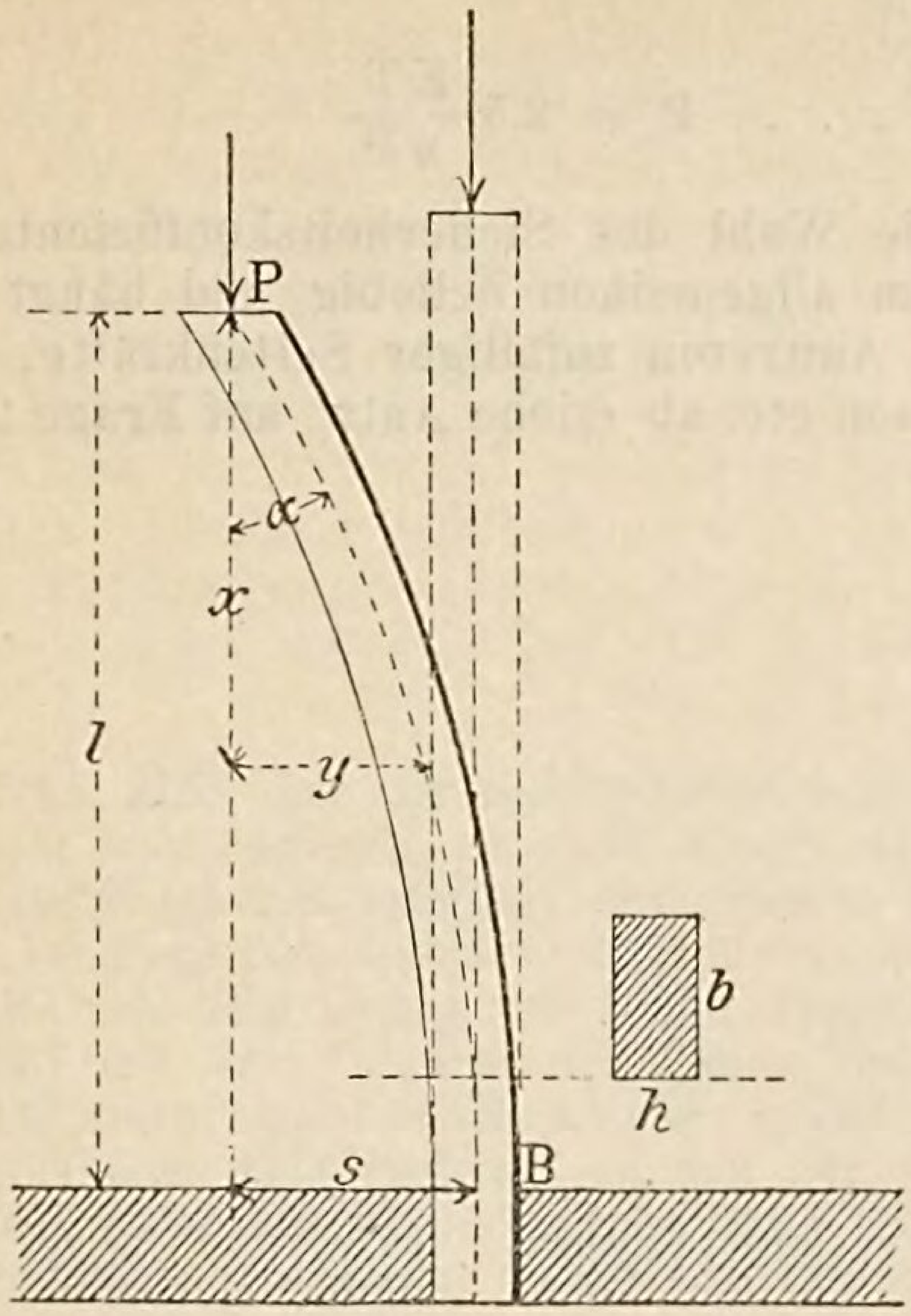
ist hier unter h immer die kleinere der beiden Rechtecksseiten zu verstehen. E ist der Elasticitätsmodulus des Materials und P die Kraft, welche in der Richtung der Längsachse den Stab auf Zerknickung beansprucht.

Antwort. Der einfachste Weg, welcher zur Herleitung einer Grundformel für die Zerknickungsfestigkeit einzuschlagen ist, geht von der allgemeinen Formel für den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie eines gebogenen Stabes aus. Dabei fassen wir zunächst den Fall ins Auge, in welchem ein Pfosten oder eine Säule (siehe Fig. 175) am unteren Ende eingemauert oder sonst befestigt und am oberen Ende von einer Druckkraft P, die parallel zur Längenachse und senkrecht abwärts wirkt, neben der Zusammendrückung auch noch eine Biegung erleidet.

Es ist nach Formel 1 in Antw. auf Frage 80 der Krümmungshalbmesser allgemein:

$$R = \frac{E\,T}{M}$$

Figur 175.



Erkl. 198. Aus der nebenstehenden Formel ersieht man, dass die Biegung des Stabes an der Angriffsstelle der Kraft P am geringsten ist, weil dort $y = 0$, also $R = \infty$, die Krümmung selbst also Null ist. Dagegen ist sie am stärksten an der Befestigungsstelle, wo y seinen grössten, R seinen kleinsten Wert erhält. Diese Stelle ist auch der gefährliche Querschnitt des Stabes.

Erkl. 199. Wer mit den Elementen der höheren Mathematik betraut ist, beachte folgendes: Wenn man für den Krümmungshalbmesser

$$R = -\frac{d x^2}{d^2 y} \text{ oder } R = -\frac{d x}{d\left(\frac{d y}{d x}\right)}$$

oder:

$$R = -\frac{d x}{d\,(tg\,\alpha)}$$

einführt, so erhält man:

$$P\,y\,d x = -E\,T\,.\,d\,(tg\,\alpha)$$

oder indem man aus $\frac{d y}{d x} = tg\,\alpha$ den Wert $d x = \frac{d y}{tg\,\alpha}$ einsetzt:

$$P\,y\,\frac{d y}{tg\,\alpha} = -E\,T\,.\,d\,.\,(tg\,\alpha)$$

oder:

$$P\,y\,.\,d y = -E\,T\,.\,tg\,\alpha\,.\,d\,(tg\,\alpha)$$

und durch Integration:

$$\frac{1}{2}\,P\,y^2 = -\frac{1}{2}\,E\,T\,.\,tg^2\,\alpha + C$$

Das Biegungsmoment M und damit die Biegungsform kann nun zweifacher Art sein und ist im vorliegenden Fall eine andere als jene, welche bei der Biegung durch eine zur Längsachse senkrechte Kraft entsteht, denn es ist jetzt nicht mehr die Senkrechte (oder Abscisse) x, sondern die Horizontale (oder Ordinate) y (siehe Fig. 175) der Hebelarm der Kraft, und somit ist für den vorliegenden Fall:

$$M = P\,y$$

und also:

$$R = \frac{E\,T}{P\,y} \;^{1)}$$

Durch weitere Ausführung dieser Formel, welche aber nur mit Hilfe höherer Mathematik möglich ist, erhält man, wenn man noch die grösste Ausbiegung mit s bezeichnet, die sog. Gleichung der elastischen Linie:

$$1) \ldots \quad \frac{y}{s} = \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{E\,T}}\right) \;^{2)}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, wenn man $x = l$ und damit $y = s$ setzt, für den gefährlichen Querschnitt B (siehe Fig. 175):

$$1 = \sin\left(l\sqrt{\frac{P}{E\,T}}\right)$$

In dieser Gleichung bedeutet $l\sqrt{\frac{P}{E\,T}}$ den Bogen des Winkels, dessen Sinus $= 1$ ist. Dieser Bogen ist aber der von der Länge $\frac{\pi}{2}$, entsprechend dem Winkel von 90^0, und es ist demnach:

$$l\sqrt{\frac{P}{E\,T}} = \frac{\pi}{2} \;^{3)}$$

und daraus ergibt sich für die theoretische Tragkraft P eines nach Art der Fig. 175 auf Zerknickung beanspruchten Stabes von der Länge l:

$$2) \ldots\ldots \quad P = \frac{\pi^2 E\,T}{4\,l^2}$$

eine Gleichung, die nur zur Bestimmung derjenigen Belastung dient, bei welcher die Zerknickung wirklich erfolgt.

Damit letzteres, wie überhaupt eine Durchbiegung nicht stattfinden kann, darf der Stab nur mit einem gewissen, dem n^{ten} Teil von P belastet werden, so dass man erhält:

$$P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E\,T}{n\,l^2}$$

[1] Siehe Erkl. 197 u. 198.
[2] „ „ 199.
[3] „ „ 200.

Um die Konstante C zu bestimmen, erwäge man, dass für $x = l$, $y = s$ und $\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha = 0$, also die Konstante $C = \frac{1}{2} P s^2$ und folglich:

$$P y^2 = - E T\, tg^2 \alpha + P s^2$$

woraus:

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{P(s^2 - y^2)}{E T}}$$

oder:

$$\frac{dy}{\sqrt{s^2 - y^2}} = \frac{d\left(\frac{y}{s}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{s}\right)^2}} = \left(\sqrt{\frac{P}{E T}}\right) dx$$

Und wenn man diese Differentialgleichung nochmals integriert, folgt:

$$arc\left(sin = \frac{y}{s}\right) = \left(\sqrt{\frac{P}{E T}}\right) x$$

oder umgekehrt:

$$\left(\frac{y}{s}\right) = sin\left(x\sqrt{\frac{P}{E T}}\right) \text{ wie Gleich. 1).}$$

Erkl. 200. Die übrigen Werte $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$ etc., die ebenfalls die Gleichung erfüllen, lassen darauf schliessen, dass bei vergrösserter, besonders stossweise wirkender Kraft die elastische Linie des Stabes mehrere Wellen bildet und der Stab somit in mehreren Querschnitten gefährdet ist. Für die Anwendung ist nur der kleinste Wert $\frac{\pi}{2}$ in Rechnung zu ziehen.

Erkl. 201. In dem erhaltenen Wert für die Zerknickungskraft P (siehe nebenst. Gleich. 2 u. 3) ist die grösste Durchbiegung s nicht mit enthalten, so dass also die Tragkraft bei jeder Grösse der Durchbiegung eines Stabes dieselbe ist oder dieselbe Kraft P hält bei jeder Grösse der Durchbiegung den Faserspannungen das Gleichgewicht. Der Grund davon liegt in dem Umstande, dass mit zunehmender Durchbiegung s ebenso das Moment der Kraft P wächst und demnach die Zunahme der Widerstandsfähigkeit des Materials bei grösserer Durchbiegung dieselbe sein muss wie bei Vergrösserung des Kraftmoments.

Daraus geht aber hervor, dass dieselbe Kraft, welche überhaupt eine Biegung zu bewirken fähig ist, den Stab auch bis zum Bruch belasten kann und es ist somit P gleichzeitig die theoretische Trag- oder Bruchkraft.

oder, da $\frac{\pi^2}{4} = 2{,}4674$ oder $=$ circa 2,5 ist, so ist:

$$3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P = 2{,}5 \frac{E T}{n l^2}$$

Die Wahl des Sicherheitskoeffizienten n ist im allgemeinen beliebig und hängt von dem Auftreten zufälliger Seitenkräfte, von Stössen etc. ab (siehe Antw. auf Frage 205).

Frage 201. Welche Formeln erhält man aus der obigen Gleichung 2). für die Zerknickungsfestigkeit rechteckiger, quadratischer und cylindrischer Stäbe, wenn man die früher berechneten entsprechenden Inhalts- oder Trägheitsmomente einsetzt?

Antwort. Ist der Stab ein Parallelepipedon, dessen Querschnittsdimensionen b und h sind (und zwar h die kleinere, in der

Biegungsebene liegende Dimension und b die grössere, senkrecht darauf stehende Abmessung, siehe Fig. 175), so ist das äquatoriale Trägheits- oder Inhaltsmoment nach Formel 14 Seite 82:

$$T = \frac{1}{12} b h^3$$

und wenn wir diesen Wert in Gleichung 2). in Antw. auf die vorige Frage einsetzen, so ist:

$$P = \frac{\pi^2}{4 l^2} E \cdot \frac{1}{12} b h^3$$

oder:

$$1). \ldots\ldots P = \frac{\pi^2}{48} \cdot \frac{E b h^3}{l^2}$$

Ist der Stab quadratisch, und die Quadratseite $= a$, so ist nach Formel 18 Seite 84:

$$T = \frac{1}{12} a^4$$

also:

$$P = \frac{\pi^2}{4 l^2} E \cdot \frac{1}{12} a^4$$

oder:

$$2). \ldots\ldots P = \frac{\pi^2}{48} \cdot \frac{E a^4}{l^2}$$

Ist der Stab cylindrisch und der Durchmesser $= d$, so ist nach Gleichung 1). auf Seite 98:

$$T = \frac{1}{64} d^4 \pi$$

also:

$$3). \ldots\ldots P = \frac{\pi^3}{256} \cdot \frac{E d^4}{l^2}$$

Ist endlich der Stab eine hohle cylindrische Säule, deren Durchmesser D und d sind, so ist nach Gleichung 1). auf Seite 101:

$$T = \frac{1}{64} \pi (D^4 - d^4)$$

also:

$$4). \ldots\ldots P = \frac{\pi^3}{256} E \left(\frac{D^4 - d^4}{l^2}\right)$$

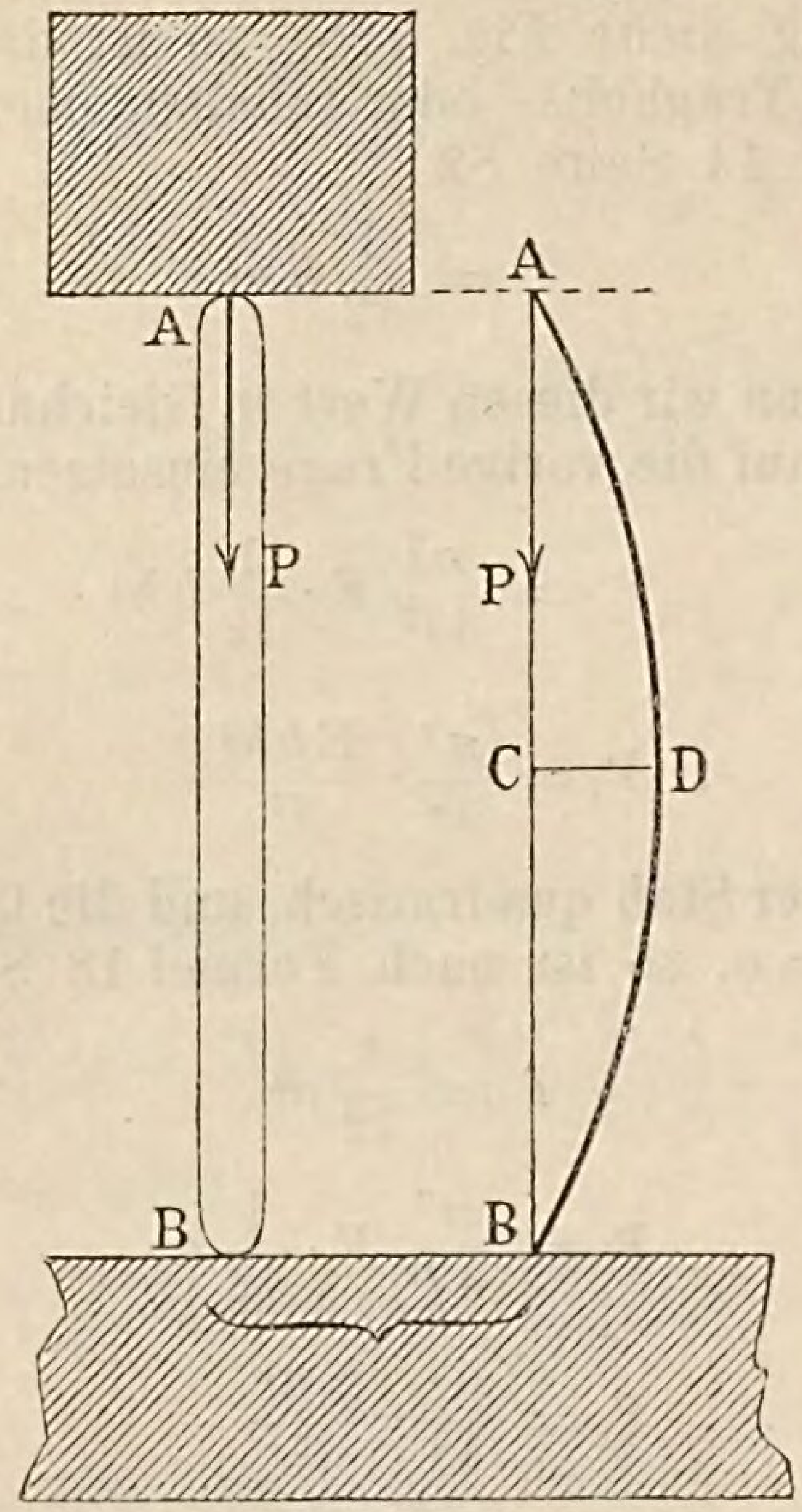
Erkl. 202. Aus den nebenstehenden Formeln ersieht man zugleich, dass die Tragkraft eines der Zerknickungsfestigkeit ausgesetzten Stabes von rechteckigem Querschnitt zunimmt mit der Breite und dem Kubus der Dicke, dagegen abnimmt mit dem Quadrat der Länge desselben.

Bei einem quadratischen oder cylindrischen Stab nimmt die Tragkraft zu mit der vierten Potenz (oder dem Biquadrat) der Seite oder des Durchmessers, dagegen ab mit dem Quadrat der Länge desselben.

Frage 202. Was ist über die Zerknickungsfestigkeit eines Pfostens oder einer Säule zu bemerken, welche nicht, wie im vorigen Fall, am unteren Ende fest eingeklemmt ist, sondern bloss so gestützt ist, dass beide Endpunkte der elastischen Linie bei dem Druck P in der ursprünglichen vertikalen Achse bleiben müssen? (Siehe Fig. 176.)

Antwort. Denkt man sich im vorigen Fall (siehe Fig. 176) die beiden Enden des Stabes abgerundet und die Einklemmung durch eine einfache Unterstützung ersetzt, oder denkt man sich die Enden drehbar gelagert (wie z. B. die Zugstangen für Pumpen, Dampfmaschinen etc.), so biegt sich der Stab in der Mitte aus. Die elastische Linie erhält eine symmetrische Krümmung, ihre Enden werden in der Richtungslinie der

Figur 176.



Kraft P liegen, dagegen eine beliebige Neigung gegen diese haben können. Es hat im vorliegenden Fall jede Hälfte des Stabes dieselbe Biegung wie im vorigen Fall, und die stärkste Krümmung, also auch der Bruch durch Zerknickung tritt in der Mitte ein.

Um nun für diesen zweiten Fall die Formel der Tragfähigkeit zu erhalten, denkt man sich die eine untere Hälfte des Stabes fest eingemauert und nur die andere obere Hälfte von der Länge $^1/_2\, l$ in Betracht gezogen. Man erhält alsdann unmittelbar, wenn man $^1/_2\, l$ statt l in die Gleichung 2). Seite 257 einführt, ganz allgemein:

$$P = \frac{\pi^2 E T}{4\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

oder:

$$1). \;.\;.\;.\;.\; P = 4 \cdot \left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E T}{l^2}\right]$$

oder mit Rücksicht auf den Sicherheitskoeffizienten n:

$$2). \;.\;.\;.\;.\; P = \text{ca. } 10 \frac{E T}{n l^2}$$

Hieraus sieht man zugleich, dass der Stab in diesem Fall bei jeder Querschnittsform unter sonst gleichen Umständen viermal so viel zu tragen vermag als im ersten Fall.

Erkl. 203. Aus nebenstehender Gleichung folgt für einen parallelepipedischen Stab:

$$1). \;.\;.\;.\;.\;.\; P = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E b h^3}{l^2}$$

für einen quadratischen Stab:

$$2). \;.\;.\;.\;.\;.\; P = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E a^4}{l^2}$$

für einen kreisförmigen Stab:

$$3). \;.\;.\;.\;.\;.\; P = \frac{\pi^3}{64} \cdot \frac{E d^4}{l^2}$$

und für den hohlen kreisförmigen Stab:

$$4). \;.\;.\;.\;.\;.\; P = \frac{\pi^3}{64} \cdot \frac{E (D^4 - d^4)}{l^2}$$

Frage 203. Was ist über die Tragfähigkeit eines stabförmigen Körpers zu bemerken, welcher an beiden Enden fest eingeklemmt beziehlich flach aufgelegt ist?

Antwort. Ist der Körper von der Länge l an beiden Enden eingespannt oder sind beide Enden flach abgeschnitten und stützen sie sich gegen Ebenen (z. B. Kolbenstangen, Säulen), siehe Fig. 177, so bleiben die Enden der elastischen Linie wieder in Richtung der Kraft P, berühren aber zugleich die Richtungslinie der Kraft an diesen Stellen. Die elastische Linie zeigt hiernach zwei Wendepunkte F und J, welche um $^1/_4\, l$ von den Einklemmungspunkten entfernt sind und es treten drei gefährliche Zerknickungsquerschnitte ein, nämlich in der

Erkl. 204. Aus nebenstehender Gleichung folgt für einen rechteckigen Stab:

$$1). \;.\;.\;.\;.\;.\; P = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{E b h^3}{l^2}$$

für einen quadratischen Stab:

$$2). \;.\;.\;.\;.\;.\; P = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{E a^4}{l^2}$$

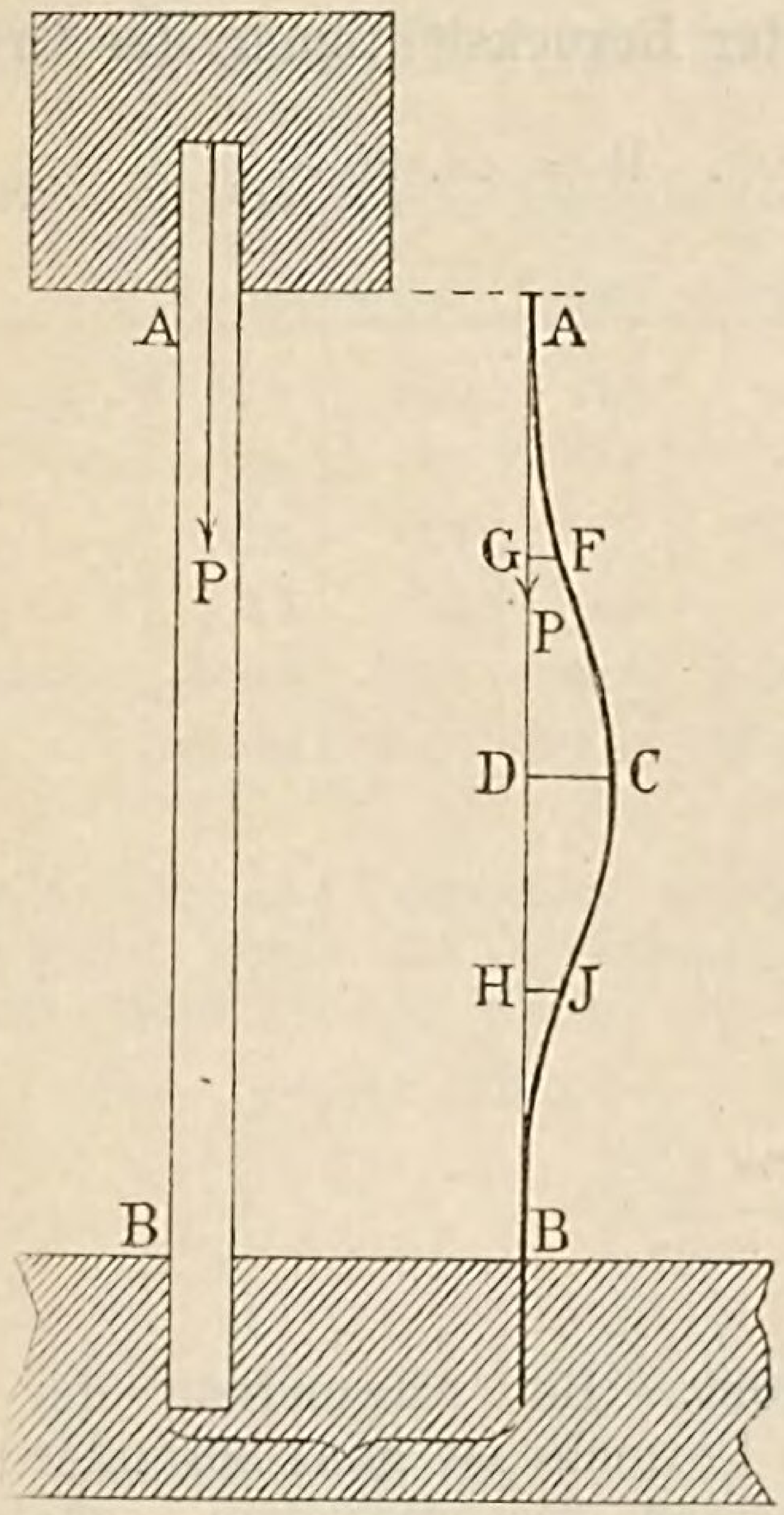
für einen kreisförmigen Stab:

3). $P = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{E\,d^4}{l^2}$

und für einen hohlen kreisförmigen Stab:

4). $P = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{E\,(D^4 - d^4)}{l^2}$

Figur 177.



Mitte C und an den Befestigungsstellen A und B. Der erste Fall wiederholt sich also hier viermal und man erhält demnach die entsprechende Zerknickungskraft P, wenn man in Gleichung 2). Seite 257 l durch $^1/_4\,l$ ersetzt. Es ist hier also:

$$P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E\,T}{\left(\frac{l}{4}\right)^2}$$

oder:

1). $P = 16\left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E\,T}{l^2}\right]$

oder mit Rücksicht auf den Sicherheitskoeffizient und da $\frac{\pi_2}{4}$ = ca. 2,5 ist:

2). $P = 40\,\frac{E\,T}{n\,l^2}$

Frage 204. Was gilt über die Zerknickungsfestigkeit eines Stabes, der mit einem Ende fest eingeklemmt oder eingemauert, am andern Ende aber so geführt oder festgehalten ist, dass das Ende aus der ursprünglichen Lage in der Stabachse sich nicht entfernen kann?

Antwort. Ist das untere Ende des Stabes fest eingeklemmt oder eingemauert und das obere in der ursprünglichen Stabachse geführt wie in Fig. 178, so entstehen notwendig zwei gefährliche Zerknickungsquerschnitte, der eine etwas über der Mitte und der andere an der unteren Befestigungsstelle.

Bei oberflächlicher Betrachtung erkennt man, dass der Stab aus drei ungefähr gleich langen Teilen besteht, die sich so verhalten, wie der an einem Ende eingeklemmte, am andern Ende freie Stab. Setzt man demnach in Gleich. 2). Seite 257 statt l nur $^1/_3$ ein, so ist:

$$P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E\,T}{\left(\frac{l}{3}\right)^3}$$

oder unter Berücksichtigung des Sicherheitskoeffizienten n und da $\frac{\pi^2}{4} \cdot 9$ = ca. 22 ist:

Erkl. 205. Aus nebenstehender Gleichung folgt für einen rechteckigen Stab:

1). $P = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{E\,b\,h^3}{l^2}$

für einen quadratischen Stab:

2). $P = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{E\,a^4}{l^2}$

für einen kreisförmigen Stab:

3). $P = \frac{\pi^3}{32} \cdot \frac{E\,d^4}{l^2}$

und für einen hohlen kreisförmigen Stab:

4). $P = \frac{\pi^3}{32} \cdot \frac{E\,(D^4 - d^4)}{l^2}$

$$P = 22 \cdot \frac{E\,T}{n\,l^2}$$

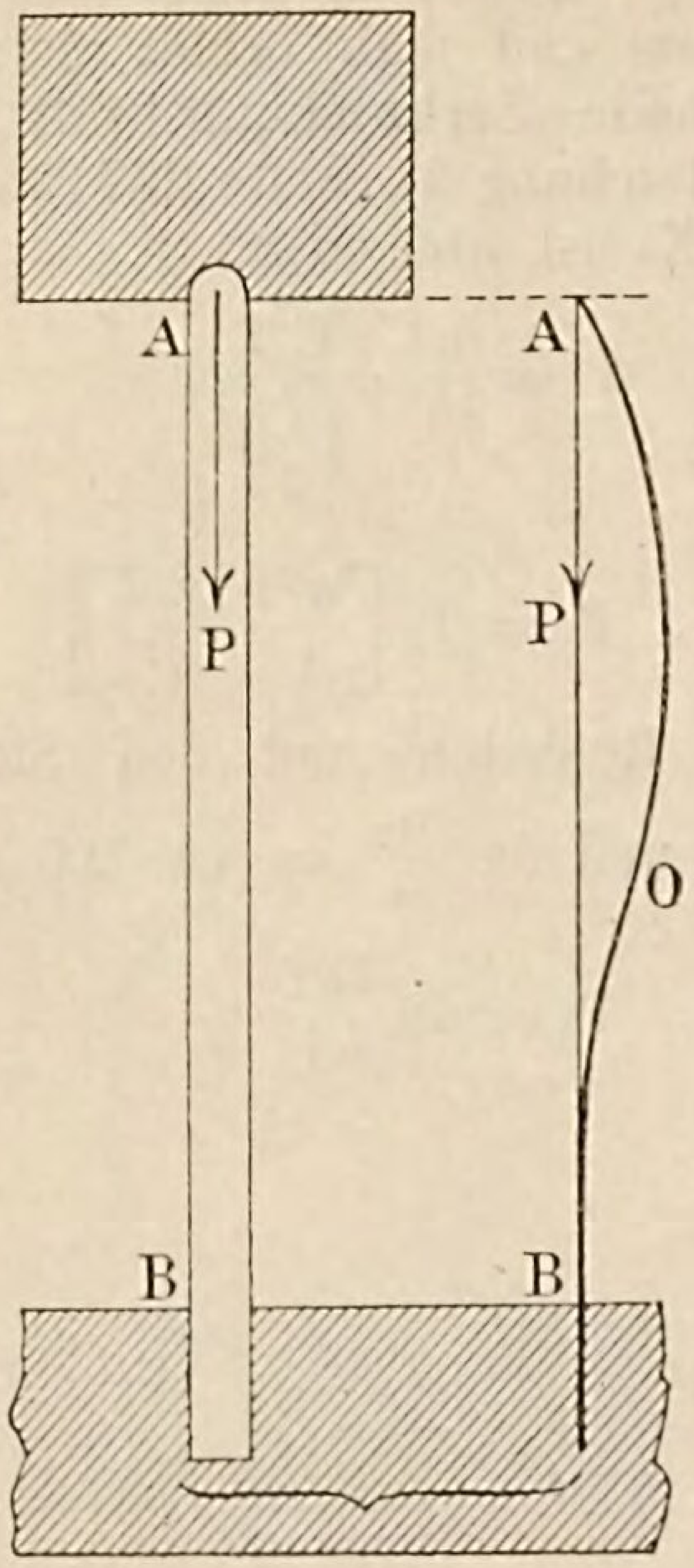
Eine genaue Untersuchung (welche hier, als zu weitgehend, weggelassen werden soll) ergibt für die Tragfähigkeit:

$$1). \;.\;.\;.\;.\; P = 8\left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E\,T}{l^2}\right]$$

oder unter Berücksichtigung der Grösse n:

$$2). \;.\;.\;.\;.\; P = \text{ca. } 20\,\frac{E\,T}{n\,l^2}$$

Figur 178.



Frage 205. Was ist bei Anwendung der vorerwähnten Formeln zur Berechnung der Querschnittsdimensionen eines auf Zerknickung beanspruchten Körpers besonders zu berücksichtigen?

Antwort. Bei Anwendung der vorerwähnten Formeln ist ganz besonders zu berücksichtigen, dass dieselben, sobald ihnen der Sicherheitskoeffizient n mangelt, für die Belastung P einen Wert geben, bei welchem die Zerknickung wirklich erfolgt. Die zulässige Tragkraft muss aber um ein bedeutendes unter jener Bruchkraft angenommen werden, d. h. man rechnet als zulässige Tragkraft nur einen Bruchteil $\frac{1}{n}$ jener Kraft P, damit die Pfosten und Stützen, Säulen und Stangen, die auf Zerknickungsfestigkeit beansprucht sind, die Belastung auf die Dauer mit Sicherheit zu tragen vermögen und zwar nimmt man den Zerknickungs-Sicherheitskoeffizient S_1 bei Holz zu $^1/_{10}$, und bei Eisen, sowohl Schmiedeeisen als Gusseisen, in der Ruhelage zu $^1/_5$ bis $^1/_6$ an. Für Pleulstangen (wegen der Einwirkung der lebendigen Kraft), sowie für Säulen mit unruhiger Belastung (wie in Fabriklokalen) ist die Sicherheit noch grösser anzunehmen.

Für die Anwendung hat man also obige Werte (wenn n in der betreffenden Formel nicht mit enthalten ist) noch mit dem Sicherheitskoeffizienten

Erkl. 206. *Grasshof* empfiehlt für praktische Rechnungen die zulässige Tragkraft nach der aus der Erfahrung abgeleiteten Formel:

$$K = n\,\frac{P_d \cdot P_k}{P_d + P_k}$$

zu bestimmen, und es fallen danach die Resultate für die am häufigsten vorkommenden Längenverhältnisse ziemlich günstig aus. Es bedeutet darin P_d die Kraft, welche den fraglichen Stab zerdrücken würde, P_k die sich aus den obigen Formeln ergebende Kraft, welche den Stab zerknicken würde, und n einen Sicherheitskoeffizienten, und zwar:

für Holz $n = 0{,}12$ bis $0{,}10$
„ Gusseisen . . $n = 0{,}17$
„ Schmiedeeisen $n = 0{,}2$.

Erkl. 207. Wie aus den oben entwickelten Formeln zu ersehen ist, ist die Zerknickungsfestigkeit eines Stabes umgekehrt proportional dem Quadrat der Länge und es muss demnach bei Zu- oder Abnahme der Länge die Zerknickungsfestigkeit rasch fallen oder steigen. Man ist darum genötigt, Säulen von grösserer

Höhe einen grösseren Querschnitt auch dann zu geben, wenn dieselben gleiche Lasten zu tragen haben. Die folgende Tabelle von *Morin* gibt für verschiedene gebräuchliche Werkstoffe die Anzahl Kilogramm, mit denen man sicher jeden Quadratcentimeter belasten darf.

Bezeichnung des Körpers.	Verhältnis der Länge zur kleinsten Querdimension				
	unter 12. Belastung in Kilogr.	unter 18. Belastung in Kilogr.	unter 24. Belastung in Kilogr.	unter 48. Belastung in Kilogr.	unter 60. Belastung in Kilogr.
Starke Eiche .	30,0	25,0	15,0	5,0	2,5
Schwache Eiche	19,0	8,4	5,6	—	—
Rottanne . .	37,5	31,0	18,7	7,5	—
Weisstanne .	9,7	8,2	4,9	—	—
Schmiedeeisen	1000,0	835,0	500,0	167,0	84,0
Gusseisen . .	2000,0	1670,0	1000,0	333,0	167,0

Nach *Hodgkinsons* Versuchen vermindert sich die Festigkeit gegen das Zerknicken mit zunehmender Höhe in der Weise, dass dieselbe

bei 1facher Höhe 1
„ 10 „ „ 0,6
„ 20 „ „ 0,357
„ 30 „ „ 0,223
„ 40 „ „ 0,146
„ 50 „ „ 0,1 beträgt.

Nach demselben leisten Steine bis zur 12fachen Höhe gleichen Widerstand gegen das Zerknicken und zwar darf jedes □cm sicher belastet werden bei:

Basalt	mit 200,0 kg
Harter Granit	„ 70,0 „
Gewöhnlicher Granit	„ 40,0 „
Harter Marmor	„ 100,0 „
Weisser geaderter Marmor . .	„ 30,0 „
Harter Sandstein	„ 90,0 „
Weicher Sandstein	„ 0,4 „
Sehr harter Backstein	„ 12,0 „
Gewöhnlicher Backstein . . .	„ 4,0 „
Sehr harter Kalkstein	„ 50,0 „
Gewöhnlicher Kalkstein . . .	„ 30,0 „
Alabaster	„ 6,0 „
Guter Mörtel von 18 Monaten .	„ 4,0 „
Gewöhnlicher Mörtel von 18 Monaten	„ 2,5 „

Bei 24facher Höhe aber ist deren Festigkeit nur noch $\frac{96}{138}$ oder ca. $^2/_3$, bei 30facher Höhe nur noch $\frac{75}{138}$ oder ca. $^5/_9$, bei 40facher Höhe nur noch $\frac{52}{138}$ oder ca. $^1/_3$.

$$S_t = \frac{1}{n}$$

zu multiplizieren.

Die Zahl n gibt an, den wievielten Teil von der sonst zulässigen Druckspannung man als Belastung für jede Flächeneinheit des Querschnitts als zulässig in Rechnung bringen darf, wenn die Stange eine genügende Widerstandsfähigkeit gegen das Zerknicken besitzen soll.

Bezeichnet man mit $\frac{l}{d}$ das Verhältnis zwischen Länge und Dicke einer Säule, so ist nach *Ritter* für:

Gusseisen . . $n = 1 + 0{,}00225 \left(\frac{l}{d}\right)^2$

Schmiedeeisen $n = 1 + 0{,}001125 \left(\frac{l}{d}\right)^2$

Holz $n = 1 + 0{,}0027 \left(\frac{l}{d}\right)^2$

Hieraus ergeben sich die nachfolgenden Werte, wenn:

$\frac{l}{d} =$	10	20	30	40	50
Gusseisen . . $n =$	1,225	1,9	3,025	4,6	6,625
Schmiedeeisen $n =$	1,1125	1,45	2,0125	2,8	3,8125
Holz $n =$	1,27	2,08	3,43	5,32	7,75

b). Vergleichung der Zerknickungsfestigkeit mit der einfachen rückwirkenden oder Druckfestigkeit.

Frage 206. Von welchem Einfluss ist die Länge eines Stabes auf die Zerknickungsfestigkeit sowohl als auch auf die Druckfestigkeit desselben?

Antwort. Wie schon in Erkl. 179 bemerkt wurde, ist die Knickungsfestigkeit eines Stabes umgekehrt proportional dem Quadrat der Länge desselben, während bei der Druckfestigkeit, abgesehen vom Eigengewicht des Körpers, die Länge ohne Einfluss ist. Bei einer gewissen Stablänge werden beide Festigkeiten gleich gross sein und es ist also diese Länge die Grenze, unter welcher der Stab auf Druck, über welcher er auf Zerknickung zu berechnen ist.

Frage 207. Wie nennt man den Quotient, den man erhält, wenn man die Länge des Stabes dividiert durch die kleinste Querschnittsdimension?

Antwort. Den Quotient aus Stablänge durch die kleinste Querschnittsdimension nennt man allgemein das Längenverhältnis $= \frac{l}{d}$ des Stabes.

Frage 208. Wie findet man das Längenverhältnis eines Stabes, bis zu welchem derselbe auf Zerdrückung berechnet werden darf?

Antwort. Dieses Längenverhältnis findet man, wenn man die Werte P_d für Zerdrückungsfestigkeit und P_k für Zerknickungsfestigkeit einander gleichsetzt. Nach Formel 3 Seite 63 ist:

$$P_d = F s$$

worin s die Bruchbelastung bedeutet. Nach Formel 2 Seite 257 ist die Zerknickungsfestigkeit für den ersten Fall der Inanspruchnahme (Fig. 175):

$$P_k = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E T}{l^2}$$

Aus der Gleichsetzung beider Werte folgt:

$$F s = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E T}{l^2}$$

oder:

$$l^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{E T}{F s}$$

oder:

$$1). \quad . \; . \; . \; . \; . \quad l = \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{T}{F}} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}$$

aus welcher Gleichung für jede Querschnittsform und für jedes Material die Länge l, für welche Druck- und Zerknickungsfestigkeit gleich gross sind, oder das Verhältnis der Länge des Stabes zur Höhe des Querschnitts in der Biegungsebene zu ermitteln ist.

Erkl. 208. Wendet man beispielsweise die nebenstehende Formel auf einen Stab von kreisförmigem Querschnitt und dem Durchmesser d an, so wird, da nach Formel 1 Seite 98 das Trägheitsmoment

$$T = \frac{1}{64} d^4 \pi$$

und der Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{4} d^2 \pi \text{ ist,}$$

$$\sqrt{\frac{T}{F}} = \sqrt{\frac{4 d^4 \pi}{64 d^2 \pi}}$$

oder:

$$\sqrt{\frac{T}{F}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4}$$

Setzen wir diesen Wert in nebenstehende Gleichung 1)., so ist:

$$l = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{4} \sqrt{\frac{E}{s}} \quad \text{oder} \quad l = \frac{\pi}{8} d \sqrt{\frac{E}{s}}$$

oder:

$$l = 0{,}4\, d \sqrt{\frac{E}{s}} \quad \text{oder} \quad \frac{l}{d} = 0{,}4 \sqrt{\frac{E}{s}}$$

Führen wir nun die Werte von E und s aus Tabelle Seite 38 der Reihe nach für:

Eichenholz E $= 120000\,s$ $= 480$
Schmiedeeisen E im Mittel $= 2000000\,s$ $= 2640$
Gusseisen E $= 1000000\,s$ im Mittel $= 6325$

so erhält man für Eichenholz:

$$\frac{l}{d} = 0{,}4\sqrt{\frac{120000}{480}} = 0{,}4\sqrt{250} = \text{ca. } 6$$

für Schmiedeeisen:

$$\frac{l}{d} = 0{,}4\sqrt{\frac{2000000}{2640}} = \text{ca. } 11$$

für Gusseisen:

$$\frac{l}{d} = 0{,}4\sqrt{\frac{1000000}{6325}} = \text{ca. } 5.$$

Frage 209. Was heisst das, wenn man sagt, das Längenverhältnis eines massiv cylindrischen Stabes ist für Eichenholz $\frac{l}{d} = 6$, für Schmiedeeisen $\frac{l}{d} = 11$ und für Gusseisen $\frac{l}{d} = 5$?

Antwort. Wenn man sagt, das Längenverhältnis ist für Eichenholz $\frac{l}{d} = 6$, für Schmiedeeisen $\frac{l}{d} = 11$ und für Gusseisen $\frac{l}{d} = 5$, so heisst das: Ein massiv cylindrischer Stab kann noch auf Druckfestigkeit berechnet werden, wenn die Länge desselben nicht grösser ist als

der 6fache Durchmesser bei Eichenholz,
„ 11 „ „ „ Schmiedeeisen,
„ 5 „ „ „ Gusseisen.

Die Verhältniszahlen für die drei andern Hauptfälle sind mit Rücksicht auf andere Querschnitte in der folgenden Tabelle enthalten samt den Ergebnissen des ersten Falles, in welchem der Sicherheitsgrad für Druckfestigkeit mit $\frac{1}{\sigma}$ bezeichnet ist, so dass, wenn s den Festigkeitskoeffizienten bezeichnet, der Sicherheitskoeffizient $S = \frac{1}{\sigma} s$ ist; der Sicherheitskoeffizient für Zerknickungsfestigkeit ist mit $S_1 = \frac{1}{n}$ bezeichnet.

Erkl. 209. In gleicher Weise, wie in Erklärung 208, lässt sich das Längenverhältnis für die übrigen drei Fälle der Zerknickungsfestigkeit und mit Rücksicht auf andere Querschnitte und Materiale entwickeln. Bei den drei andern Fällen der Knickungsfestigkeit ist die Tragfähigkeit, wie aus den früher entwickelten Formeln ersichtlich ist, 4, 16, 8mal so gross als beim ersten Fall, es kann daher das Verhältnis $\frac{l}{d}$ für einen Rundstab aus Eichenholz resp. Schmiede- oder Gusseisen $\sqrt{4}$ $\sqrt{16}$ $\sqrt{8}$ oder 2, 4, 2,8mal so gross sein, ehe der Stab auf Knickung zu berechnen ist.

Tabelle über die Verhältniszahlen $\frac{l}{d}$ und $\frac{l}{a}$ resp. $\frac{l}{h}$ der Länge l zu den Querschnittsdimensionen d und a resp. h, bei welcher die Zerknickungsfestigkeit gerade gleich ist der Druckfestigkeit.

Fall	Quer-schnitt	Tragkraft bei der		Verhältnis $\left(\frac{l}{d}\right)$ resp. $\left(\frac{l}{a}\right)$ oder $\left(\frac{l}{h}\right)$ für		
		Zerknickungsfestigkeit	Druckfestigkeit	Eichen-holz	Schmiede-eisen	Gusseisen
I (Figur 175)	Kreis	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^3}{256} \cdot \frac{E d^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\pi}{4} s d^2$	6	11	5
	Quadrat	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{48} \cdot \frac{E a^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s a^2$	7	$12^1/_2$	$5^3/_4$
	Rechteck	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{48} \cdot \frac{E b h^3}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s b h$			
II (Figur 176)	Kreis	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^3}{64} \cdot \frac{E d^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\pi}{4} s d^3$	12	22	10
	Quadrat	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E a^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s a^2$	14	25	$11^1/_2$
	Rechteck	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E b h^3}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s b h$			
III (Figur 177)	Kreis	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^3}{32} \cdot \frac{E d^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\pi}{4} s d^2$	18	31	14
	Quadrat	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{E a^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s a^2$	20	$35^1/_4$	16
	Rechteck	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{E b h^3}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s b h$			
IV (Figur 178)	Kreis	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{E d^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\pi}{4} s d^2$	25	43	20
	Quadrat	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{E a^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s a^2$	29	50	23
	Rechteck	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{E b h^3}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s b h^2$			

Frage 210. Was ist über die Anwendung der in vorstehender Tabelle enthaltenen Verhältniszahlen zu bemerken?

Antwort. Die in vorstehender Tabelle enthaltenen Verhältniszahlen entsprechen, wie schon bemerkt, dem Grenzverhältnis zwischen der Länge l und den Querschnittsdimensionen d, resp. a oder h, wobei die Zerknickungsfestigkeit gerade gleich der Druckfestigkeit ist. In einem solchen Fall kann der Stab daher nach der einen oder andern Festigkeitsart berechnet werden.

Erkl. 210. Die Voraussetzung, dass bei einer bestimmten Grenze der Länge l diese erst einen Einfluss auf die Tragfähigkeit ausübt, wird durch die Erfahrung nicht bestätigt. Streng aufgefasst, macht sich die Einwirkung der Druck- und der Biegungsbeanspruchung bei jeder Stablänge

gleichzeitig geltend. Bei grosser Länge ist aber der Einfluss der Druckbeanspruchung verschwindend klein und bei kleiner Länge unter der oben erwähnten Grenze ist der Einfluss der Knickung sehr klein, so dass bei der willkürlichen Annahme vom Sicherheitsfaktor n die Zuverlässigkeit der aufgestellten Gleichungen eine genügend grosse ist. In der Nähe des Grenzverhältnisses für gleiche Druck- und Knickungsfestigkeit kann man mit Rücksicht auf obiges n etwas kleiner und unterhalb des Grenzverhältnisses, in der Nähe desselben, kann man bei der Berechnung auf Druck $S = \frac{1}{\sigma} \cdot s$ etwas kleiner annehmen.

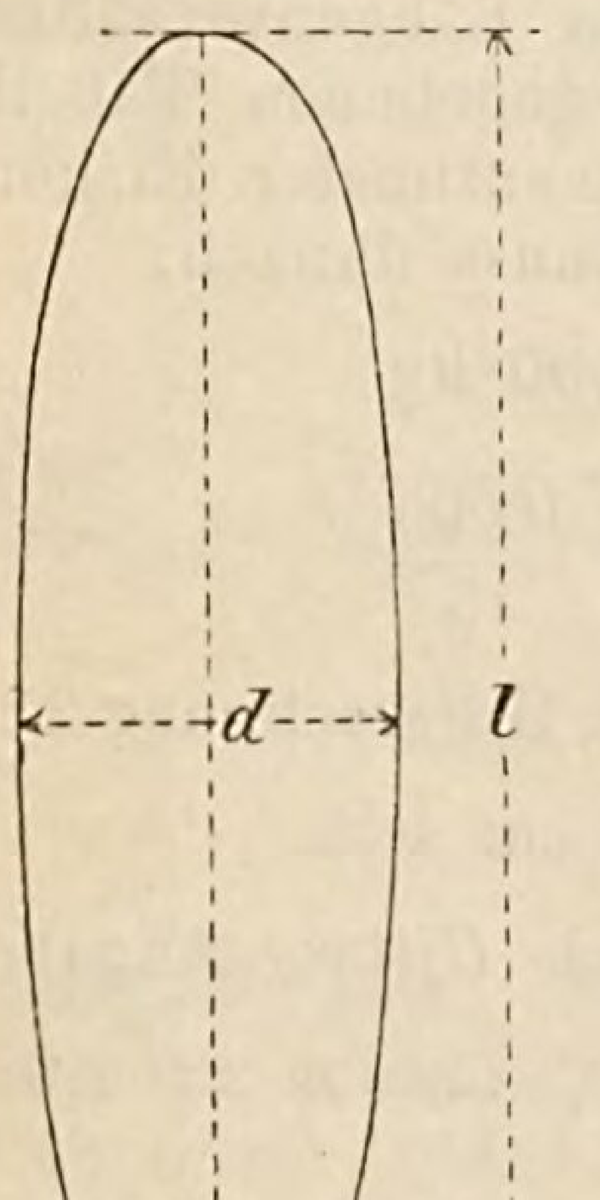
Wenn das Verhältnis $\frac{l}{d}$ resp. $\frac{l}{a}$ oder $\frac{l}{h}$ kleiner als die in der obigen Tabelle angegebenen entsprechenden Zahlenwerte ist, so muss der Körper nach der einfachen rückwirkenden oder Druckfestigkeit berechnet werden; im umgekehrten Fall hingegen, wenn das Verhältnis $\frac{l}{d}$ resp. $\frac{l}{a}$ oder $\frac{l}{h}$ grösser ist als die darunter befindlichen Zahlenwerte der Tabelle, so ist, da alsdann der Widerstand gegen das Zerknicken geringer ist als gegen das Zerdrücken, der Stab nach den Formeln der Zerknickungsfestigkeit zu berechnen.

Frage 211. Wie kann man in den Fällen verfahren, wo es zweifelhaft ist, ob die Berechnung auf Druck oder auf Zerknickung einen grösseren Querschnitt ergibt?

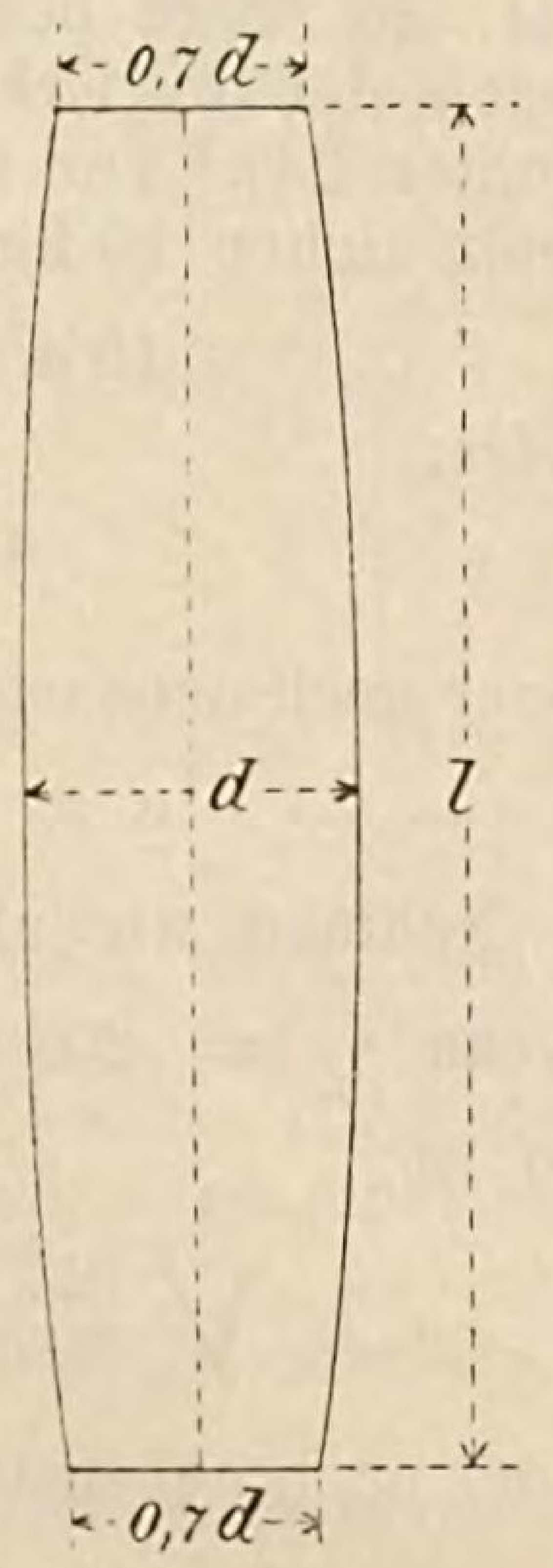
Antwort. Einfacher als durch Berechnung des Grenzverhältnisses wird man in den Fällen, die es zweifelhaft lassen, ob die Berechnung auf Druck oder Knickung grösseren Querschnitt ergibt, verfahren, durch Berechnung des Querschnitts auf beide Beanspruchungen und Beibehaltung des grössten Resultats.

Frage 212. Auf welche Weise erhält man für irgend einen Fall eine Körperform, die in allen Querschnitten die gleiche Zerknickungsfestigkeit besitzt?

Figur 179.



Figur 180.



Antwort. Man erhält für irgend einen Fall eine Körperform, die in allen Querschnitten die gleiche Zerknickungsfestigkeit besitzt, wenn man nach dem Vorausgehenden aus der Gleichung für die grösste zulässige Tragfestigkeit die Dimensionen des gefährlichen Querschnitts bestimmt und dieselben in den andern Querschnitten so abnehmen lässt, dass die Maximalspannung in jedem Querschnitt denselben Wert erhält. Auf diese Weise erhält man z. B. für den obigen zweiten Fall (siehe Fig. 176) eine Kurve, wie sie in Fig. 179 dargestellt ist und welche cykloidische Sinoide genannt wird. Man ersetzt sie durch eine schwach gekrümmte Linie, wie Fig. 180 zeigt, worin beide Enddurchmesser $= 0,7\,d$ angenommen sind, oder man macht den Endquerschnitt etwas grösser als dem einfachen Druck entsprechend und die Begrenzung geradlinig.

c). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 151. Eine 5 m hohe eichene Stütze von quadratischem Querschnitt hat eine Last von 200 Centner zu tragen; wie stark muss man diese Stütze nehmen, damit sie diese Last auf die Dauer mit Sicherheit tragen kann?

$\left(S_1 = \frac{1}{n} = \frac{1}{10};\ E = 120000\ \text{kg pro}\ \square\text{cm.}\right)$

Auflösung. Wir haben es hier mit dem zweiten Fall, siehe Fig. 176, zu thun und die Gleich. 2). in Erkl. 203 unserer Berechnung zu Grunde zu legen. Nach derselben ist, unter Berücksichtigung des Sicherheitsfaktors $\frac{1}{n}$:

$$P = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E\,a^4}{n\,l^2}$$

und hieraus erhält man für die Quadratseite:

$$a = \sqrt[4]{\frac{12\,l^2\,n\,P}{\pi^2 E}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$a = \sqrt[4]{\frac{120 \,.\, 10000 \,.\, 250000}{\pi^2 \,.\, 120000}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$a = 22{,}43\ \text{cm.}$$

Verfährt man dagegen nach der angegebenen Regel der abnehmenden Festigkeiten und nimmt das eben gefundene Resultat zum Anhaltspunkt, wonach das Längenverhältnis

$$\frac{l}{d} = \frac{500}{22{,}4}\ \text{oder ca.}\ \frac{500}{22\frac{1}{2}}\ \text{oder}\ \frac{l}{d} = 22$$

ist, so trägt bei diesem Längenverhältnis nach der in Erkl. 207 gegebenen Tabelle [unter 24).] der Quadratcentimeter Eichenholz sicher 15 kg, also muss danach:

$$15\,a^2 = 10000\ \text{kg}$$

oder:

$$a = \sqrt{\frac{10000}{15}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$a = \text{ca. } 26\ \text{cm sein.}$$

Nehmen wir aber nach *Ritters* Angabe, wenn $\frac{l}{d} = 20$ beträgt, für $n = 2{,}08$, so ist:

$$a = \sqrt[4]{\frac{12 \,.\, 10 \,.\, 2{,}08 \,.\, 10000 \,.\, 250000}{\pi^2 \,.\, 120000}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 3).:

$$a = \text{ca. } 27\ \text{cm.}$$

Hilfsrechnungen.

1). $a = \sqrt[4]{\frac{2500000}{\pi^2}}$

oder:

$$\log a = \frac{1}{4}\left(\log 2500000 - \log \pi^2\right)$$

$$\begin{aligned} \log 2500000 &= 6{,}3979400 \\ -\log \pi^2 &= -0{,}9942998 \\ & 5{,}4036402 \\ & \cdot\tfrac{1}{4} \\ \log a &= 1{,}3509100 \end{aligned}$$

mithin:
num-log a oder $a = 22{,}43$ cm.

2). . . $\log a = \frac{1}{2}\left(\log 10000 - \log 15\right)$

$$\begin{aligned} \log 10000 &= 4{,}0000000 \\ -\log 15 &= -1{,}1760913 \\ & 2{,}8239087 \\ & \cdot\tfrac{1}{2} \\ \log a &= 1{,}4139087 \end{aligned}$$

mithin:
num-log a oder $a = 25{,}93$ cm.

3). . . . $a = \sqrt[4]{\frac{20{,}8 \,.\, 250000}{\pi^2}}$

oder:

$$\log a = \frac{1}{4}\left(\log 20{,}8 + \log 250000 - \log \pi^2\right)$$

$$\begin{aligned} \log 20{,}8 &= 1{,}3180633 \\ +\log 250000 &= 5{,}3979400 \\ & 6{,}7160033 \\ -\log \pi^2 &= -0{,}9942998 \\ & 5{,}7217035 \\ & \cdot\tfrac{1}{4} \\ \log a &= 1{,}4304259 \end{aligned}$$

mithin:
num-log a oder $a = 26{,}94$ cm.

Aufgabe 152. Eine schmiedeeiserne Stange von 2 m Länge und rechteckigem Querschnitt, dessen Seitenverhältnis 1 : 4 ist, steht mit ihrem unteren Ende frei auf (siehe Fig. 176) und ist in der Richtung ihrer Achse mit 3000 kg belastet. Wie sind die Abmessungen des Querschnitts zu wählen, wenn E = 2000000 und $n = 10$?

Hilfsrechnungen.

1). $h = \sqrt[4]{\frac{1800}{\pi^2}}$

$$\log h = \frac{1}{4}\left(\log 1800 - \log \pi^2\right)$$

$$\begin{array}{rl} \log 1800 = & 3{,}2552725 \\ -\log \pi^2 = & -0{,}9942998 \\ \hline & 2{,}2609727 \\ & \cdot \frac{1}{4} \\ \hline \log h = & 0{,}5652432 \end{array}$$

mithin:
num-log h oder $h = 3{,}6749$

2). $h = \sqrt{\frac{3000}{336}}$

$$\log h = \frac{1}{2}\left(\log 3000 - \log 336\right)$$

$$\begin{array}{rl} \log 3000 = & 3{,}4771213 \\ -\log 336 = & -2{,}5263393 \\ \hline & 0{,}9507820 \\ & \cdot \frac{1}{2} \\ \hline \log h = & 0{,}4753910 \end{array}$$

mithin:
num-log h oder $h = 2{,}988$

Auflösung. Nach Formel 2 in Antw. auf Frage 202 ist, unter Einsetzung des Sicherheitsfaktors n:

$$P = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E\, b\, h^3}{n\, l^2}$$

oder da $b : h = 4 : 1$, also $b = 4h$ ist:

$$P = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E\, 4 h^4}{n\, l^2}$$

und hieraus ergibt sich für:

$$h = \sqrt[4]{\frac{3\, P\, l^2\, n}{\pi^2\, E}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingeführt:

$$h = \sqrt[4]{\frac{3 \,.\, 3000 \,.\, 40000 \,.\, 10}{\pi^2 \,.\, 2000000}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$h = 3{,}7 \text{ cm}$$

$$b = 4 \,.\, 3{,}7 \text{ cm oder } b = 14{,}8 \text{ cm.}$$

Nach *Morins* Tabelle, s. Erkl. 207, würde sich folgendes Resultat ergeben:

Es ist, nach obigem Resultat, das Längenverhältnis

$$\frac{l}{d} = \frac{200}{3{,}7} \text{ oder } \frac{l}{d} = 54$$

und man darf sicher jedes Quadratcentimeter Querschnittsfläche mit 84 kg belasten; somit erhält man, da der Inhalt der Querschnittsfläche $F = 4h \,.\, h = 4h^2$ beträgt,

$$4h^2 \,.\, 84 = 3000$$

und hieraus:

$$h = \sqrt[2]{\frac{3000}{4 \,.\, 84}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$h = 3 \text{ cm und } b = 12 \text{ cm.}$$

Aufgabe 153. Welche Last kann eine 4 m lange Säule aus Tannenholz bei 34 cm Durchmesser sicher tragen, wenn 10fache Sicherheit und E = 120000 angenommen wird,

a). ohne Rücksicht auf das Längenverhältnis;

b). mit Rücksicht auf das Längenverhältnis;

α). nach *Morin*,

Auflösung. a). Nach Gleichung 3). in Erkl. 203 ist:

$$P = \frac{\pi^3}{64} \cdot \frac{E\, d^4}{l^2}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte und für $S_1 = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$ eingesetzt:

β). nach *Ritter*,
γ). nach *Hodgkinson*;
c). nach der empirischen Formel von *Grasshof*, wenn der Festigkeitskoeffizient S = 500 kg pro □cm beträgt?

Hilfsrechnungen.

1). . . $\log P = \log 3 + 3 . \log \pi + 4 . \log 34 - \log 2560$

$$\begin{array}{rll} \log \pi = & 0{,}4971499 & \\ & .\,3 & \log 34 = 1{,}5314789 \\ \log \pi^3 = & 1{,}4914497 & .\,4 \\ + \log 3 = & 0{,}4771213 & 6{,}1259156 \\ + \log 34^4 = & 6{,}1259156 & \\ & 8{,}0944866 & \\ - \log 2560 = & -3{,}4082400 & \\ \log P = & 4{,}6862466 & \end{array}$$

mithin:
num-log P oder P = 48556

2).

$$\begin{array}{rr} 37{,}5\,.\,17 & .\ 17\,.\,3{,}14 \\ 2625 & 2198 \\ 375 & 314 \\ 637{,}5 & .\ 53{,}38 \\ \multicolumn{2}{r}{51000} \\ \multicolumn{2}{r}{18125} \\ \multicolumn{2}{r}{18125} \\ \multicolumn{2}{r}{31875} \\ \multicolumn{2}{r}{33919{,}750} \end{array}$$

3). $\dfrac{\log 3\pi^3 . 34^4}{256} = 5{,}6862466$ (s. Hilfsrechn. 1).

$$\begin{array}{rl} -\log 12{,}7 = & 1{,}1038037 \\ \log P = & 4{,}5824429 \end{array}$$

mithin:
num-log P oder P = 38233

4). $P = \dfrac{34 . 34 . 3{,}14}{4} \cdot 500 = 17 . 17 . 3{,}14 . 500$

$$\begin{array}{r} 289\ .\ 1570 \\ 2023 \\ 1445 \\ 289 \\ 453730 \end{array}$$

$$P = \frac{\pi^3 . 120000 . 34^4}{64 . 10 . 400 . 400}$$

oder:

$$P = \frac{3\pi^3 . 34^4}{2560}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$P = 48556 \text{ kg.}$$

b). Das Längenverhältnis

$$\frac{l}{d} = \frac{400}{34} \text{ oder } \frac{l}{d} = \text{ca. } 12$$

α). Nach *Morin* darf 1 □cm Querschnittsfläche mit 37,5 kg belastet werden, also ist:

$$P = 37{,}5 \cdot \frac{34 . 34 . 3{,}14}{4}$$

oder:

$$P = 37{,}5 . 17 . 17 . 3{,}14$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$P = \text{ca. } 34000 \text{ kg.}$$

β). Nach *Ritter* ist, wenn $\frac{l}{d}$ = ca. 10 für $n = 1{,}27$, also anstatt $S = \frac{1}{10}$ ist $S_1 = \frac{1}{n} = \frac{1}{12{,}7}$ zu setzen, und somit ist:

$$P = \frac{\pi^3 . 120000 . 34^4}{64 . 12{,}7 . 400 . 400}$$

oder:

$$P = \frac{3\pi^3 . 34^4}{256 . 12{,}7}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 3).:

$$P = 38233 \text{ kg.}$$

γ). Nach *Hodgkinson* ist bei 10facher Höhe:

$$P = 48556 . 0{,}6$$

oder:

$$P = 29133{,}6 \text{ kg.}$$

c). Endlich soll noch untersucht werden, wie sich das Resultat unter der in Erkl. 206 gegebenen Formel:

$$K = n \cdot \frac{P_d . P_k}{P_d + P_k}$$

gestaltet, wenn $n = 0{,}1$ angenommen wird. Die Bruchkraft für das Zerdrücken der Säule ist nach Formel 3 Seite 64:

$$P = F s$$

oder:

$$P_d = \frac{1}{4} d^2 \pi . s$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P_d = \frac{1}{4} 34^2 . 3{,}14 . 500$$

5). . . $\log K = \log 48556 + \log 453730 - \log (485560 + 453730)$

485560	$\log 48556 =$	4,6862429
453730	$+ \log 453730 =$	5,6567975
939290		10,3430404
	$- \log 939290 =$	$-5,9727997$
	$\log K =$	4,3702407

mithin:
num-log K oder K = 23450

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 4).:

$$P_d = 453730 \text{ kg}.$$

Die Bruchkraft für das Zerknicken der Säule ist 10 mal so gross als die unter a). ermittelte Tragkraft, also:

$$P_k = 485560 \text{ kg}$$

und demnach ist:

$$K = 0{,}1 \cdot \frac{485560 \cdot 453730}{485560 + 453730}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 5).:

$$K = 23450 \text{ kg}.$$

Aufgabe 154. Ein freistehender Pfeiler von starkem Eichenholz, dessen quadratischer Querschnitt 20 cm Kante hat, kann nach *Morin* welche Belastung sicher tragen,

a). wenn seine Höhe 2 m beträgt?
b). wenn seine Höhe 5 m beträgt?

Erkl. 211. Wenn die Biegung durch seitliche Stützen verhindert ist, so kann derselbe Pfeiler bei beliebiger Höhe mit 12000 kg belastet werden.

Auflösung. a). Es ist im vorliegenden Fall

$$\frac{l}{d} = \frac{200}{20} = 10$$

Die Belastung darf also nach *Morins* Tabelle pro □cm 30 kg betragen, und da die Querschnittsfläche 20 . 20 = 400 □cm gross ist, so ist die zulässige Belastung

$$P = 400 \cdot 30 = 12000 \text{ kg}.$$

b). Ist dagegen

$$\frac{l}{d} = \frac{500}{20} = 25$$

so darf nach derselben Tabelle die Belastung pro □cm nur 15 kg, also im Ganzen

$$P = 400 \cdot 15 = 6000 \text{ kg}$$

betragen.

Aufgabe 155. a). Eine Mauer von 25 cm Dicke, aus sehr guten Backsteinen ausgeführt, kann bei 3 m Höhe auf jeden Meter Länge welche Belastung mit Sicherheit tragen?

b). Welche Dicke muss die Mauer bei 7,5 m Höhe erhalten, wenn sie dieselbe Festigkeit besitzen soll, d. h. wenn sie dieselbe Belastung mit gleicher Sicherheit tragen soll?

Erkl. 212. Die Höhe einer Mauer soll im allgemeinen niemals die 12 fache Dicke derselben erreichen. Da bei den Mauern unserer Gebäude die unteren Teile das Gewicht der oberen zu tragen haben, die Belastung folglich nach oben mehr und mehr abnimmt, so pflegt man von der Mauerdicke in jedem folgenden Stockwerke etwas abzusetzen. Begreiflich darf dies nur in einer

Auflösung. a). Auf 25 cm Dicke beträgt die Querschnittsfläche pro 1 Meter Länge:

$$25 \cdot 100 = 2500 \text{ □cm}$$

und nach Erkl. 207 kann für den Fall, dass die Höhe das $\frac{300}{25} = 12$ fache der Dicke nicht übersteigt, pro □cm Querschnittsfläche eine Belastung von 12 kg, also auf den Meter Länge

$$P = 25 \cdot 100 \cdot 12 = 30000 \text{ kg}$$

gerechnet werden.

b). Ist aber die Höhe $\frac{750}{25} = 30$ mal so gross als die Dicke, so beträgt die Festig-

solchen Weise geschehen, dass die Mauerdicke in jedem Stockwerke dem Verhältnisse des gesicherten Tragungsvermögen entspricht. Gewöhnlich gibt man den Aussenmauern der Gebäude auch in den obersten Stockwerken noch die Dicke von wenigstens 25 cm.

keit nur noch $\frac{75}{138}$ von 12 kg pro □cm und es ist demnach:

$$\frac{x \cdot 100 \cdot 12 \cdot 75}{138} = 30000$$

und hieraus erhält man für die nötige Dicke:

$$x = \frac{30000 \cdot 138}{100 \cdot 12 \cdot 75}$$

oder:

$$x = 46 \text{ cm.}$$

Aufgabe 156. Setzt man als zulässige Druckspannung für Schmiedeeisen S = 600 kg pro 1 □cm, so würde eine parallelepipedische schmiedeeiserne Stange, deren Querschnitt 1 cm Höhe und 4 cm Breite hat, nach *Ritters* Angabe welche Belastung mit hinreichender Sicherheit tragen können, wenn die Länge nicht das 20fache der kleinsten Querschnittsdimension übersteigt?

Auflösung. Nach Antw. auf Frage 205 ist, wenn $\frac{l}{d} = 20$, der □cm Querschnittsfläche nicht mehr mit 600 kg, sondern nur noch mit:

$$S_1 = \frac{S}{n} = \frac{600}{1{,}45} = 414 \text{ kg}$$

zu belasten. Die Querschnittsfläche der Stange ist 4 □cm, also die zulässige Belastung:

$$P = 4 \cdot 414 \text{ oder } P = 1656 \text{ kg.}$$

Aufgabe 157. In der 5,2 m langen Strebe eines Krahns wirkt ein Druck von 6650 kg. Das Material der Strebe soll Gusseisen und der Querschnitt kreisringförmig und zwar der innere Durchmesser = 0,6 des äusseren Durchmessers sein.

E sei 1000000 pro □cm und wegen der beim Krahnbetrieb auftretenden Stösse sei $n = 15$. Wie gross sind die beiden Durchmesser zu nehmen?

Hilfsrechnung.

$$0{,}6^4 = 0{,}36 \cdot 0{,}36$$

$$\begin{array}{r} 216 \\ 108 \\ \hline 0{,}1296 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}0000 \\ -0{,}1296 \\ \hline 0{,}8704 \end{array}$$

$$D^4 = \frac{64 \cdot 6650 \cdot 15 \cdot 520^2}{\pi^3 \cdot 870400} \text{ oder da } \begin{array}{r} 64 \cdot 15 \\ \hline 960 \end{array}$$

$$\text{und } \begin{array}{r} 520 \cdot 520 \\ \hline 104 \\ 260 \\ \hline 270400 \end{array}$$

$$D^4 = \frac{960 \cdot 6650 \cdot 2704}{\pi^3 \cdot 8704}$$

Auflösung. Nach Formel 4 in Erkl. 203 ist:

$$P = \frac{\pi^3}{64} \cdot \frac{E(D^4 - d^4)}{n \cdot l^2}$$

oder, da:

$$d = 0{,}6\,D$$

$$P = \frac{\pi^3}{64} \cdot \frac{E \cdot D^4 (1 - 0{,}6^4)}{n\, l^2}$$

und hieraus:

$$D^4 = \frac{64\, P\, n\, l^2}{\pi^3 E \cdot (1 - 0{,}6^4)}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$D^4 = \frac{64 \cdot 6650 \cdot 15 \cdot 520^2}{\pi^3 \cdot 1000000\,(1 - 0{,}6^4)}$$

oder:

$$D = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 6650 \cdot 15 \cdot 520^2}{\pi^3 \cdot 1000000\,(1 - 0{,}6^4)}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung ist der äussere Durchmesser:

$\log D^4 = \log 960 + \log 6650 + \log 2704 - (\log \pi^3 + \log 8704)$

$$\begin{array}{rl}
\log \pi = & 0{,}4971499 \\
 & .3 \\
\hline
\log \pi^3 = & 1{,}4914497 \\
+\log 8704 = & 3{,}9397189 \\
\hline
 & 5{,}4311686
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log 960 = & 2{,}9822712 \\
+\log 6650 = & 3{,}8228216 \\
+\log 2704 = & 3{,}4320067 \\
\hline
 & 10{,}2370995 \\
 & -5{,}4311686 \\
\hline
\log D^4 = & 4{,}8059309 \\
 & .\frac{1}{4} \\
\hline
\log D = & 1{,}2014827
\end{array}$$

mithin:
num-log D oder D = 15,9

D = ca. 16 cm

und der innere Durchmesser:

$d = 0{,}6 \,.\, 16$

oder:

$d = 9{,}6$ cm.

Aufgabe 158. a). Wie gross ist im allgemeinen der Durchmesser einer Kolbenstange zu nehmen, auf deren Kolben ein Druck von P kg lastet und deren Länge l ist, wenn n den Sicherheitsfaktor bedeutet?

b). Wie gross ist der Durchmesser, wenn man für kleine und mittlere Kolbengeschwindigkeiten $n = 25$ bis 30 setzen kann?

c). Wie gross ist der Durchmesser, wenn der Druck auf den Kolben 8000 kg und die Länge der Kolbenstange 1,8 m beträgt?

(E = 2000000 kg pro □cm.)

Auflösung. a). Wegen der Befestigung der Stange im Kolben und Führung derselben in der Stopfbüchse des Cylinderdeckels kann das eine Ende der Stange als fest eingeklemmt angesehen werden und es ist entsprechend dem vierten Fall der Knickungsfestigkeit nach Gleichung 3). in Erkl. 205:

$$P = \frac{\pi^3}{32} \cdot \frac{E\, d^4}{n\, l^2}$$

und hieraus ergibt sich für den Durchmesser:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32\, P\, n\, l^2}{\pi^3 E}}$$

oder:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi^3 \,.\, 2000000}} \cdot \sqrt[4]{P\, n\, l^2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$d = 0{,}0268 \sqrt[4]{P\, n\, l^2}$$

b). Setzen wir in diese Formel für $n = 25$, so ist:

$$d = 0{,}0268 \sqrt[4]{25} \,.\, \sqrt[4]{P\, l^2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$d = 0{,}06 \sqrt[4]{P\, l^2}$$

c). Setzen wir aber für $P = 8000$ und $l^2 = 180^2 = 32400$ ein, so ist;

$$d = 0{,}06 \sqrt[4]{8000 \,.\, 32400}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 3).

$d = 7{,}6$ cm.

Hilfsrechnungen.

1). $\log \sqrt[4]{\frac{32}{\pi^3 \,.\, 2000000}} = \frac{1}{4}\left(\log 32 - (3 \,.\, \log \pi + \log 2000000)\right)$

$$\begin{array}{rl}
\log \pi = & 0{,}4971499 \\
 & .3 \\
\hline
\log \pi^3 = & 1{,}4914497 \\
+\log 2000000 = & 6{,}3010300 \\
\hline
 & 7{,}7924797 \\
 & {}^{+8}\qquad\quad{}^{-8} \\
\log 32 = & 1{,}5051500 \\
 & -7{,}7924797 \\
\hline
 & 1{,}7126703-8 \\
 & .\frac{1}{4} \\
\hline
\log \sqrt[4]{\ } = & 0{,}4281676-2
\end{array}$$

mithin:
num-log = 0,0268

2). $0{,}0268 \sqrt[4]{25} = \log 0{,}0268 + \frac{1}{4} \log 25$

$$\begin{array}{rl}
\log 25 = & 1{,}3979400 \\
 & .\frac{1}{4} \\
\hline
 & 0{,}3494850 \\
+\log 0{,}0268 = & 0{,}4281676-2 \\
\hline
 & 0{,}7776526-2
\end{array}$$

mithin:
num-log = 0,0599

3). . . . $\log d = \log 0{,}006 + \frac{1}{4}\left(\log 8000 + \log 32400\right)$

$$\begin{array}{rcl} \log 8000 &=& 3{,}9030900 \\ +\log 32400 &=& 4{,}5105450 \\ \hline && 8{,}4136350 \\ && \cdot \frac{1}{4} \\ \hline && 2{,}1034088 \\ +\log 0{,}06 &=& 0{,}7776526-2 \\ \hline \log d &=& 0{,}8810614 \end{array}$$

mithin:
num-log d oder $d = 7{,}604$

Aufgabe 159. a). Welche Wandstärke erhalten die 26 cm im Durchmesser haltenden 5 m hohen gusseisernen Säulen, welche zum Tragen der Decken eines Fabrikgebäudes bestimmt sind? Der Abstand je zweier Säulen in der Längsrichtung des Gebäudes sei 4 m, nach der Tiefe dagegen 7,5 m und die Belastung betrage, das Gewicht der Säulen mit eingerechnet, 3000 kg pro □cm.

(E sei 1000000 und $n = 20$.)

b). Welchen Durchmesser müssen massive Säulen aus demselben Material erhalten, wenn sie dieselbe Tragkraft besitzen sollen?

c). Welche Materialersparnis ergibt sich hieraus sowohl in Prozenten als in kg, wenn das spezif. Gewicht = 7,2 ist?

Hilfsrechnungen.

1). $x = \frac{1}{2}\left[26 - \sqrt[4]{26^4 - \frac{16 \cdot 90000 \cdot 5}{\pi^3}}\right]$

$$\begin{array}{r} 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \cdot 676 \\ \hline 4056 \\ 4732 \\ 4056 \\ \hline 456976 \end{array}$$

$$x = \frac{1}{2}\left[26 - \sqrt[4]{456976 - \frac{7200000}{31}}\right]$$

$$\begin{array}{l} 7200000 : 31 = 232258 \\ 62 \\ \hline 100 \\ \hline 70 \\ \hline 80 \\ \hline 180 \\ \hline 250 \\ 248 \\ \hline \end{array}$$

Auflösung. a). Die Wandstärke einer hohlen Säule erhält man, indem man den kleineren von dem grösseren Durchmesser subtrahiert und den Rest halbiert; nennen wir die unbekannte Wandstärke x, so ist:

$$x = \frac{D - d}{2}$$

und da uns d unbekannt ist, so können wir dafür $D - 2x$ in die hier zu benutzende Gleichung 4). in Erkl. 205 einführen und so erhalten wir statt

$$P = \frac{\pi^3 E (D^4 - d^4)}{16 l^2 n}$$

da $D^4 - d^4 = D^4 - (D - 2x)^4$ ist,

$$P = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{E[D^4 - (D - 2x)^4]}{n l^2}$$

und hieraus ergibt sich für die Unbekannte:

$$x = \frac{1}{2}\left[D - \sqrt[4]{D^4 - \frac{16 P n l^2}{\pi^3 E}}\right]$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$x = \frac{1}{2}\left[26 - \sqrt[4]{26^4 - \frac{16 \cdot 90000 \cdot 20 \cdot 250000}{\pi^3 \cdot 1000000}}\right]$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$x = 2 \text{ cm Wandstärke.}$$

b). Sollten anstatt hohler, massive Säulen angewendet werden, so müsste nach Formel 3 in Erkl. 205:

$$P = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{E d^4}{n l^2}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 P n l^2}{\pi^3 E}}$$

$$x = \frac{1}{2}\left[26 - \sqrt[4]{456976 - 232258}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[26 - \sqrt[4]{224718}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[26 - 21{,}77\right]$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 4{,}2 = 2{,}1$$

$$\begin{aligned} \log 224718 &= 5{,}3516224 \\ &\quad + 154 \\ &\overline{5{,}3516378} \\ &\quad \cdot \tfrac{1}{4} \\ &\overline{1{,}3379095} \\ \text{num-log} &= 21{,}77 \end{aligned}$$

2). $d = \sqrt[4]{\dfrac{16 . 90000 . 5}{31}} = \sqrt[4]{\dfrac{7200000}{31}}$

oder:

$d = \sqrt[4]{232258}$ (siehe Hilfsrechn. 1)

$$\begin{aligned} \log 232258 &= 5{,}3659557 \\ &\quad + 150 \\ &\overline{5{,}3659707} \\ &\quad \cdot \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

mithin: $\log d = 1{,}3414927$

num-log $d = 21{,}95$

3). $26 . 26 = 676$; $22 . 22 = 484$; $676 - 484 = 192$

$F_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 192 = \pi . 48$

$$\begin{aligned} &48 . 3{,}14 \\ &\overline{\;\;2512} \\ &\;1256 \\ &\overline{150{,}72} \end{aligned}$$

4). . . $\dfrac{22 . 22 . 3{,}14}{4} = 11 . 11 . 3{,}14$

$$\begin{aligned} &121 . 3{,}14 \\ &\overline{\quad\; 314} \\ &\;\;628 \\ &314 \\ &\overline{379{,}94} \end{aligned}$$

5). . . $229 . 500 . 7{,}2$

$$\begin{aligned} &= 114500 . 7{,}2 \\ &\overline{\quad 2290} \\ &\;8015 \\ &\overline{824400} \text{ g oder } 824{,}4 \text{ kg.} \end{aligned}$$

genommen werden. Hieraus ergibt sich:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 . 90000 . 20 . 250000}{31 . 1000000}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$d = 22 \text{ cm.}$$

c). Die Querschnittsfläche der hohlen Säule ist:

$$F_1 = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$$

oder:

$$F_1 = \frac{\pi}{4} \cdot (26^2 - 22^2)$$

oder:

$F_1 = 151$ □cm (s. Hilfsrechn. 3.)

Die Querschnittsfläche der massiven Säule ist:

$$F_2 = \frac{d^2 . \pi}{4}$$

oder:

$$F_2 = \frac{22 . 22 . 3{,}14}{4}$$

oder:

$F_2 = 380$ □cm (s. Hilfsrechn. 4).

Somit ist die Querschnittsfläche der massiven Säule um $380 - 151 = 229$ □cm grösser als die Querschnittsfläche der hohlen Säule, oder ca. $^3/_5$ oder 60% des grösseren Wertes. Die Materialersparnis nach Gewicht beträgt aber

$229 . 500 . 7{,}2 = 824$ kg (s. Hilfsrechn. 5).

d). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 160. Ein 4,2 m hoher Pfeiler oder Pfosten aus gutem Eichenholz soll auf die Dauer 30000 kg sicher tragen; wie gross muss eine Seite des quadratischen Querschnitts genommen werden? $\left(E = 120000 \text{ kg pro } \square\text{cm};\ S_1 = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}\right)$

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 151.

Aufgabe 161. Wie gross sind die Querschnittsdimensionen einer 5 m langen Flacheisenschiene, welche nach Art der Fig. 176 beansprucht ist und eine Last von 20 Ztr. oder 1000 kg mit fünffacher Sicherheit tragen soll, wenn das Verhältnis der beiden Seiten des rechteckigen Querschnitts 1 : 5 angenommen wird? (E = 2000000.)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 152.

Aufgabe 162. Wie gross ist die Tragfähigkeit einer 5 m langen Säule aus Tannenholz bei 26 cm Durchmesser, wenn 10 fache Sicherheit und E = 110000 angenommen wird

a). ohne Rücksicht auf das Längenverhältnis,

b). mit " " " "

α). nach *Morin*,

β). nach *Ritter*,

c). nach der empirischen Formel von *Grasshof*, wenn der Festigkeitskoeffizient $s = 480$ kg pro □cm beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 153.

Aufgabe 163. Ein freistehender Pfeiler von starkem Eichenholz, dessen quadratischer Querschnitt 35 cm Kante hat, kann nach *Morin* welche Belastung sicher tragen wenn seine Höhe a). 2,5, b). 8 m beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 154.

Aufgabe 164. a). Eine Mauer von 36 cm Dicke aus gewöhnlichem Kalkstein ausgeführt kann bei $6^1/_2$ m Höhe auf jeden Meter Länge welche Belastung mit Sicherheit tragen?

b). Welche Dicke muss die Mauer bei 10 m Höhe erhalten, wenn sie dieselbe Festigkeit besitzen soll?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 155.

Aufgabe 165. In der 4 m langen Strebe eines Krahnens wirkt ein Druck von 8000 kg. Das Material soll Kanonenmetall und der Querschnitt kreisringförmig sein und zwar betrage der innere Durchmesser $^4/_5$ des äusseren Durchmessers. Wie gross ist jeder Durchmesser? (E = 700000 und $n = 15$.)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 157.

Aufgabe 166. Es ist der Durchmesser einer 1,6 m langen schmiedeeisernen Kolbenstange von einer Lokomotive zu bestimmen. Der Durchmesser des Dampfkolbens sei 36 cm und der Ueberdruck pro □cm = 5 kg. (E = 2000000, $n = 25$.)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 158.

Aufgabe 167. a). Welche Wandstärke muss eine 4 m hohe Säule aus Gusseisen erhalten, wenn dieselbe 15000 kg tragen soll und einen äusseren Durchmesser von 14 cm hat, wenn E = 1000000 und $n = 15$?

b). Welchen Durchmesser muss eine massive Säule aus demselben Material erhalten, wenn sie dieselbe Last mit gleicher Sicherheit tragen soll?

c). Welche Materialersparnis ergibt sich hieraus sowohl in Prozenten als im Gewicht, wenn das spez. Gew. = 7,4 ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 159.

Zusammenstellung der in diesem Buch vorkommenden Formeln.

I. Formeln für absolute Elasticität und Festigkeit.

a). Für Elasticität.

1). Verlängerung $\lambda = \varepsilon \cdot \frac{PL}{F}$

2). oder $\lambda = \frac{PL}{FF}$

. . siehe Antw. auf Frage 22

L bedeutet die Stablänge.
P ist die Belastung des Stabes.
λ die hierdurch erzeugte Verlängerung.
ε ist der Dehnungsquotient.
$E = \frac{1}{\varepsilon}$ d. Elasticitätsmodulus u.
F der Querschnitt des Stabes.

b). Für absolute Festigkeit ohne Rücksicht auf das Eigengewicht der Körper.

3). Festigkeit, absolute: $P = Fs$

4). „ „ $F = \frac{P}{s}$

5). „ „ $s = \frac{P}{F}$

6). Querschnitt, ein Kreis: $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi s}}$

7). „ ein Quadrat: $a = \sqrt{\frac{P}{s}}$

8). „ ein Rechteck: $b = \frac{P}{sh}$ oder $h = \frac{P}{sb}$

siehe Antwort auf Frage 26

s ist der Festigkeitskoeffizient.
F die Querschnittsfläche.
P ist die Grösse der von aussen auf den Körper einwirkenden Kraft (Belastung).
d ist der Kreisdurchmesser.
a ist die Quadratseite.
b u. h sind die Seiten d. Rechtecks.

9). Tragfähigkeit: $P = FS$

10). Querschnittsfläche: $F = \frac{P}{S}$

11). Sicherheitskoeffizient: $S = \frac{P}{F}$

. . . siehe Erkl. 38

P bedeutet die Tragfähigkeit od. Belastung.
F bedeutet d. Querschnittsfläche.
S „ d. Sicherheitskoeffizient.

c). Für absolute Festigkeit mit Rücksicht auf das Eigengewicht der Körper.

12). $(P + G) = Fs$ siehe Antw. auf Frage 33

13). Tragfähigkeit: $P = F(s - l\gamma)$

14). Querschnitt: $F = \frac{P}{s - l\gamma}$

15). Festigkeitskoeffizient: $s = \frac{P}{F} + l\gamma$

siehe Antw. auf Frage 34

16). $P = Fs - G_o l$ siehe Erkl. 41

17). $F_{(x)} = \left(\frac{P}{s}\right) \cdot e^{\left(\frac{\gamma}{s}\right)x}$

oder:

18). $\log F_{(x)} = \log\left(\frac{P}{s}\right) + 0{,}43429\left(\frac{\gamma}{s}\right)x$

siehe Antw. auf Frage 35

P bedeutet die Belastung des prismatischen Stabes.
G bedeutet das Eigengewicht des Stabes.
F bedeutet die Querschnittsfläche des Stabes.
s ist der Festigkeitskoeffizient.
l „ die Stablänge.
γ „ das spez. Gewicht d. Stabes.
G_o ist das absolute Gewicht pro laufende Längeneinheit des Stabes.
F_x ist der Querschnitt in irgend einem Abstand x vom unteren freien Stabende an gerechnet.
$e = 2{,}7182818$ ist die Basis der natürlichen Logarithmen.

19). $F_n = \dfrac{P\,s^{n-1}}{(s - l_1\gamma)(s - l_2\gamma)\ldots(s - l_n\gamma)}$

20). $F_n = \dfrac{P}{s}\left(\dfrac{s}{s - l\gamma}\right)^n$ wenn $l_1 = l_2 = l_n$ etc.

siehe Erkl. 43

$F_{(n)}$ bedeutet die Querschnittsfläche für den n^{ten} Stab. $l_1\ l_2 \ldots l_n$ sind die Längen der einzelnen Stabstücke.

d). **Für die Arbeits- oder Wirkungsgrösse.**

21). $W = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s^2}{E}\right) \cdot V$

resp.

22). $W = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S^2}{E}\right) \cdot V$

. siehe Antw. auf Frage 36

s ist der Festigkeitskoeffizient.
S " Sicherheitskoeffizient.
E " Elasticitätsmodulus.
V " das Volumen des Stabes.

e). **Für die Verlängerung mit Berücksichtigung des Eigengewichts des Körpers.**

23). $\lambda = \dfrac{l}{F\,E}\left(P + \dfrac{1}{2}G\right)$ siehe Auflös. d. Aufg. 16 c.

λ bedeutet die Verlängerung, l die Stablänge, F die Querschnittsfläche, E den Elasticitätsmodul, P die Belastung u. G das Eigengew. des Körpers.

II. Für rückwirkende Elasticität und Festigkeit gelten dieselben Formeln, welche unter I). für absolute Elasticität und Festigkeit zusammengesetzt sind.

III. Formeln für die Elasticität und Festigkeit gegen Abscheren.

24). $P = F\,s$

25). $F = \dfrac{P}{s}$

26). $d = \sqrt{\dfrac{4P}{\pi s}}$

27). $b = \dfrac{P}{s h}$ oder $h = \dfrac{P}{s b}$

. . . siehe Antw. auf Frage 46

P ist die wirkende Kraft, F die Querschnittsfläche, s die Spannung pro Flächeneinheit des Querschnitts, d ist der Durchmesser des kreisförmigen Querschnitts, b und h sind die Seiten des rechteckigen Querschnitts.

IV. Formeln für die relative Biegungselasticität und -Festigkeit.

28). $s = \dfrac{S\,y}{Y}$ siehe Antw. auf Frage 52

29). $s f = S \cdot \dfrac{y}{Y} f$ siehe Antw. auf Frage 53

30). $\Sigma\left(\dfrac{S}{Y} \cdot y f\right) = 0$

31). $\Sigma\,(y f) = 0$

. siehe Erkl. 64

32). $\Sigma\left(S\,\dfrac{y^2}{Y}\,f\right) = P\,x$

33). $\dfrac{S}{Y}\,\Sigma\,(f y^2) = P\,x$

34). $\dfrac{S}{Y}\,T = P\,x = Q\,S$

. siehe Antw. auf Frage 54

35). $S = \dfrac{P\,x\,.\,Y}{T}$ siehe Erkl. 68

36). $\dfrac{S}{Y}\,T = P\,l$ siehe Antw. auf Frage 55

s bedeutet die Spannung pro □mm des Querschnitts im Abstand y von d. neutralen Achse.
S bedeutet die grösste Spannung pro □mm des Querschnitts für die im Abstand Y von der neutralen Achse befindliche äusserste Faserschicht.
f bezeichnet den Inhalt der Querschnittsfläche.
Σ ist das Summationszeichen.
P ist die am Hebelarm x wirkende Last.
$T = \Sigma\,(f y^2)$ bedeutet das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche.
l bezeichnet die Balkenlänge.

37). $Q = \frac{T}{Y}$

38). $P\,l = Q\,S$ siehe Erkl. 69

39). $P = \frac{Q\,S}{l}$

$Q = \frac{T}{Y}$ ist das Widerstandsmoment oder der Querschnittsmodulus. P bedeutet die grösste zulässige Belastung, sobald in Formel 38 resp. 39 für S der Sicherheitskoeffizient des betreffenden Materials eingesetzt wird.

40). $x = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + \dots f_n y_n}{f_1 + f_2 + \dots f_n}$. . siehe Antw. auf Frage 57

x bedeutet den Abstand der neutralen Achse von einer beliebig angenommenen Geraden. f_1, $f_2 \dots f_n$ sind d. einzelnen Teile d. Querschnittsfläche. $y_1, y_2 \dots y_n$ die Abstände ihrer Schwerpunkte von der beliebig angenommenen Geraden.

41). $T_1 = \frac{b\,h^3}{3}$ siehe Antw. auf Frage 58

T_1 bedeutet das Trägheitsmoment eines Rechtecks von der Breite b und der Höhe h in Bezug auf die Seite b des Rechtecks.

V. Formeln für Trägheitsmomente, Querschnittsmoduli und Tragfähigkeiten der am meisten vorkommenden Querschnittsformen:

siehe Fig. 51.

42). $T = \frac{1}{12}\,b\,h^3$

43). $Q = \frac{1}{6}\,b\,h^2$ siehe Antw. auf Frage 59

44). $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b\,h^2\,s}{l}$

siehe Fig. 52.

45). $T = \frac{1}{12}\,a^4$

46). $Q = \frac{1}{6}\,a^3$ siehe Antw. auf Frage 61

47). $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3\,s}{l}$

siehe Fig. 53.

48). $T = \frac{1}{12}\,a^4$

49). $Q = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{2}}$ oder $Q = 0{,}118\,a^3$. . siehe Antw. auf Frage 62

50). $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3\,s}{\sqrt{2}\,l}$ oder $P = 0{,}118\,\frac{a^3\,s}{l}$

siehe Fig. 54.

51). $T = \frac{1}{12}\left(a^4 - a_1{}^4\right)$

52). $Q = \frac{1}{6} \cdot \frac{(a^4 - a_1{}^4)}{a}$

53). $P = \frac{s}{6\,l} \cdot \frac{(a^4 - a_1{}^4)}{a}$

. siehe Antw. auf Frage 63

siehe Fig. 55.

54). $T = \frac{1}{12}\left(a^4 - a_1{}^4\right)$

55). $Q = \frac{1}{6} \cdot \frac{(a^4 - a_1{}^4)}{a\sqrt{2}}$

56). $P = \frac{s}{6\,l} \cdot \frac{(a^4 - a_1{}^4)}{a\sqrt{2}}$

siehe Fig. 56.

57). $T = \frac{1}{12}(b h^3 - b_1 h_1^3)$

58). $Q = \frac{1}{6} \cdot \frac{(b h^3 - b_1 h_1^3)}{h}$

59). $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{(b h^3 - b_1 h_1^3)\, s}{h\, l}$

siehe Fig. 57.

60). $T = \frac{1}{12} b\,(h^3 - h_1^3)$

61). $Q = \frac{1}{6} b \cdot \frac{(h^3 - h_1^3)}{h}$

62). $P = \frac{1}{6} b \cdot \frac{(h^3 - h_1^3)\, s}{h\, l}$

(57–62) siehe Erkl. 75

siehe Fig. 58 u. 59.

63). $T = \frac{1}{12}(B H^3 - b h^3)$

64). $Q = \frac{1}{6}\left[B H^2 - \frac{b h^3}{H}\right]$

65). $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{s}{l}\left[B H^2 - \frac{b h^3}{H}\right]$

(63–65) siehe Antw. auf Frage 64

siehe Fig. 60.

66). $T = \frac{1}{12}\left[B\,(H^3 - h^3) + b\,(h^3 - h_1^3)\right]$

67). $Q = \frac{1}{6 H}\left[B\,(H^3 - h^3) + b\,(h^3 - h_1^3)\right]$

68). $P = \frac{s}{6 H l}\left[B\,(H^3 - h^3) + b\,(h^3 - h_1^3)\right]$

siehe Fig. 61 u. 62.

69). $T = \frac{1}{12}\left(b H^3 + (B - b)\, h^3\right)$

70). $Q = \frac{1}{6 H}\left(b H^3 + (B - b)\, h^3\right)$

71). $P = \frac{s}{6 H l}\left(b H^3 + (B - b)\, h^3\right)$

siehe Fig. 63.

72). $T = \frac{1}{12}\left[h^4 + h_1\,(H^3 - h^3) + h_1^3\,(H - h)\right]$

73). $Q = \frac{1}{6 H}\left[h^4 + h_1\,(H^3 - h^3) + h_1^3\,(H - h)\right]$

74). $P = \frac{s}{6 H l}\left[h^4 + h_1\,(H^3 - h^3) + h_1^3\,(H - h)\right]$

siehe Fig. 64.

75). $T = \frac{1}{12}\left[B h_1^3 + b_1\,(h^3 - h_1^3) + b\,(H^3 - h^3)\right]$

76). $Q = \frac{1}{6 H}\left[B h_1^3 + b_1\,(h^3 - h_1^3) + b\,(H^3 - h^3)\right]$

77). $P = \frac{s}{6 H l}\left[B h_1^3 + b_1\,(h^3 - h_1^3) + b\,(H^3 - h^3)\right]$

(66–77) siehe Antw. auf Frage 64

siehe Fig. 65 u. 66.

Wenn der Abstand der neutralen Achse von der Kante $a\,b$:

78). $x_1 = \frac{\frac{1}{2} B h^2 + b H \left(\frac{1}{2} H + h\right)}{B h + b H}$

beträgt, dann ist:

79). $T = \frac{1}{3}\left[B x_1^3 + b x_2^3 - (B - b)(x_1 - h)^3\right]$

(78–79) siehe Antw. auf Frage 65

siehe Fig. 65 u. 66.

80). $Q_1 = \frac{T}{x_1}$ und $Q_2 = \frac{T}{x_2}$

81). $P_1 = \frac{T s}{x_1 l}$ und $P_2 = \frac{T s}{x_2 l}$

siehe Fig. 67.

Ist die neutrale Achse nach Formel 40 berechnet, sind also die Abstände x_1, x_2, x_3 und x_4 bekannt, dann ist:

82). $T = \frac{1}{3}\left[B x_1{}^3 - b_2 x_3{}^3 + b x_2{}^3 - b_1 x_4{}^3\right]$

83). $Q_1 = \frac{T}{x_1}$ und $Q_2 = \frac{T}{x_2}$

84). $P_1 = \frac{T s}{x_1 l}$ und $P_2 = \frac{T s}{x_2 l}$

siehe Antw. auf Frage 65

siehe Fig. 68.

85). $T = \frac{1}{36} b h^3$

86). $Q_1 = \frac{1}{12} b h^2$ und $Q_2 = \frac{1}{24} b h^2$

87). $P_1 = \frac{s b h^2}{12 l}$ und $P_2 = \frac{s b h^2}{24 l}$

. . . . siehe Antw. auf Frage 66

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundlinie $a a$:

88). $T = \frac{1}{12} b h^3$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Spitze b:

89). $T = \frac{1}{4} b h^3$

siehe Erkl. 78

siehe Fig. 69.

90) $T = {}^5/_{16}\, b^4 \sqrt{3}$

91). $Q = {}^5/_8\, b^3$

92). $P = {}^5/_8 \frac{s b^3}{l}$

siehe Fig. 70.

93). $T = {}^5/_{16}\, b^4 \sqrt{3}$

94). $Q = {}^5/_{16}\, b^3 \sqrt{3}$

95). $P = {}^5/_{16} \frac{s b^3 \sqrt{3}}{l}$

. siehe Antw. auf Frage 67

siehe Fig. 71.

96). $T = \frac{F}{4}\left(h^2 + \frac{b^2}{12}\right)$

97). $T = \frac{F (r^2 + 2 h^2)}{12}$

. siehe Antw. auf Frage 68

Für einen Balken mit regelmässig polygonalem Querschnitt

98). $Q_1 = \frac{F (r^2 + 2 h^2)}{12 r}$

99). $Q_2 = \frac{F (r^2 + 2 h^2)}{12 h}$

siehe Antw. auf Frage 69

Für den regelmässig achtseitigen Querschnitt ist

100). $Q_1 = 0{,}638\, r^3$

101). $Q_2 = 0{,}691\, r^3$

. . siehe Erkl. 85

Q_1 bedeutet das Widerstandsmoment für den Fall, dass die neutrale Achse durch eine Ecke geht.
Q_2 bedeutet das Widerstandsmoment für den Fall, dass die neutrale Achse durch die Mitte einer Seite geht.
r ist der Halbmesser des umbeschriebenen, h ist der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises.
F bezeichnet den Flächeninhalt des Querschnitts.

102). $T_p = \Sigma r^2 f$

103). $T_p = 2 T$

. . siehe Antw. auf Frage 70

T_p bedeutet das polare Trägheitsmoment des Flächenelements f, dessen Abstand vom Schwerpunkt $= r$.

siehe Fig. 75.

$$104). \quad T = \frac{1}{64} d^4 \pi$$

$$105). \quad Q = \frac{1}{32} d^3 \pi$$

$$106). \quad T_p = \frac{1}{2} r^4 \pi$$

$$107). \quad Q_p = \frac{1}{2} r^3 \pi$$

$$108). \quad P = \frac{s\, d^3 \pi}{32\, l}$$

. siehe Antw. auf Frage 71

siehe Fig. 76.

Für den Halbkreis mit wagerechtem Durchmesser:

$$109). \quad T = 0{,}00685\, d^4$$

$$110). \quad Q_1 = 0{,}0239\, d^3$$

$$111). \quad Q_2 = 0{,}0323\, d^3$$

Für den Halbkreis mit senkrechtem Durchmesser:

$$112). \quad T = 0{,}0245\, d^4$$

$$113). \quad Q = 0{,}049\, d^3$$

siehe Antw. auf Frage 72

siehe Fig. 77.

$$114). \quad T = \frac{1}{64} \pi (D^4 - d^4)$$

$$115). \quad Q = \frac{{}^1/_{32}\, \pi (D^4 - d^4)}{D}$$

$$116). \quad P = \frac{s \pi}{32 l} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}$$

. siehe Antw. auf Frage 73

siehe Fig. 78.

$$117). \quad T_1 = \frac{1}{64} A\, a^3 \pi$$

oder:

$$118). \quad T_2 = \frac{1}{64} A^3 a \pi$$

$$119). \quad Q_1 = \frac{1}{32} A\, a^2 \pi$$

oder:

$$120). \quad Q_2 = \frac{1}{32} a\, A^2 \pi$$

$$121). \quad P_1 = \frac{s\, A\, a^2 \pi}{32\, l}$$

oder:

$$122). \quad P_2 = \frac{s\, a\, A^2 \pi}{32\, l}$$

NB. T_1, Q_1 und P_1 gilt für den Fall, dass die kleine Achse a senkrecht steht. T_2, Q_2 und P_2 gilt für den Fall, dass die grosse Achse A senkrecht steht.

siehe Antw. auf Frage 75

siehe Fig. 80.

$$123). \quad T = \frac{1}{64} \pi (a A^3 - a_1 A_1^3)$$

$$124). \quad Q = \frac{1}{32} \pi \cdot \frac{(a A^3 - a_1 A_1^3)}{A}$$

$$125). \quad P = \frac{s \pi}{32\, l} \cdot \frac{(a A^3 - a_1 A_1^3)}{A}$$

. siehe Antw. auf Frage 76

siehe Fig. 81.

126). $T = \frac{1}{12}\left[\frac{3\pi d^4}{16} + (h-d)\,b^3 + b\,(h^3 - d^3)\right]$

127). $Q = \frac{1}{6h}\left[\frac{3\pi d^4}{16} + (h-d)\,b^3 + b\,(h^3 - d^3)\right]$

128). $P = \frac{s}{6hl}\left[\frac{3\pi d^4}{16} + (h-d)\,b^3 + b\,(h^3 - d^3)\right]$

siehe Antw. auf Frage 77

siehe Fig. 82.

129). $T = \frac{1}{12}\left\{\frac{3 d^4 \pi}{16} + (h-d)\,b^3 + 2c\,(b_1{}^3 - b^3) + b\,(h^3 - d^3) + (b_1 - b)\,[6ch^2 - 12c^2h + 8c^3]\right.$

130). $Q = \frac{1}{6h}\left\{0{,}589\,d^4 + (h-d)\,b^3 + 2c\,(b_1{}^3 - b^3) + b\,(h^3 - d^3) + (b_1 - b)\,[6ch^2 - 12c^2h + 8c^3]\right.$

131). $P = \frac{Q\,s}{l}$

siehe Antw. auf Frage 78

VI. Formeln zur Bestimmung der Krümmung und Senkung der elastischen Linie.

132). $R = \frac{E\,T}{P\,x}$ siehe Antw. auf Frage 80

133). $y = \frac{1}{6}\cdot\frac{P\,x}{E\,T}\left(3l^2 - x^2\right)$ siehe Antw. auf Frage 82

134). $s = \frac{1}{3}\cdot\frac{P\,l^3}{E\,T}$

135). $s = \frac{4\,P\,l^3}{E\,b\,h^3}$ siehe Antw. auf Frage 84

136). $E = \frac{1}{3}\cdot\frac{P\,l^3}{s\,T}$

137). $P = \frac{3\,E\,s\,T}{l^3}$ siehe Antw. auf Frage 85

138). $\beta = \omega + \frac{P\,l^2}{2\,E\,T}$

139). $s = l\,\omega + \frac{1}{3}\cdot\frac{P\,l^3}{E\,T}$ siehe Antw. auf Frage 86

R bedeutet den Krümmungshalbmesser, E ist der Elasticitätsmodulus, T ist das Trägheitsmoment, P bedeutet die Last, x bedeutet einen beliebigen Hebelarm der Last. y bedeutet die Ordinate irgend eines Punktes der elastischen Linie und x dessen Abscisse. l bedeutet die Balkenlänge, b und h die Breite und Höhe. s bed. den Pfeil der Biegung. β bezeichnet den Neigungswinkel der elastischen Linie am freien Ende des Balkens. ω bezeichnet den sehr kleinen Winkel, um welchen der Balken an der Befestigungsstelle von der horizontalen Lage nach unten hin abweicht.

VII. Formeln zur Berechnung der Dimensionen, Tragkräfte und der grössten Durchbiegungen für die am meisten vorkommenden Lagerungen.

α). Der Stab ist mit einem Ende befestigt und am andern Ende belastet:

140). $M_{max} = P\,l$

141). $P\,l = Q\,S$ siehe Antw. auf Frage 89

M_{max} bedeutet das Maximalmoment an der Befestigungsstelle, P ist die Last, l die Balkenlänge, Q ist der Querschnittsmodulus oder das Widerstandsmoment und S der Sicherheitskoeffizient.

β). Der Stab ist mit einem Ende befestigt und die Last gleichmässig verteilt:

142). $P\,l = 2\,Q\,S$

143). $P = \frac{1}{3}\cdot\frac{b\,h^2\,S}{l}$ (Rechteck) . . siehe Antw. auf Frage 90

144). $l\left(\frac{1}{2}\,G + P\right) = Q\,S$

145). $P = \frac{\frac{1}{2}\,b\,h^2\,S}{l} - \frac{1}{2}\,G$ siehe Erkl. 104

146). $\frac{1}{2}\,G\,l + \Sigma\,P\,a = Q\,S$ siehe Erkl. 105

P bedeutet die Last, l die Balkenlänge, Q ist das Widerstandsmoment, S ist der Sicherheitskoeffizient, b und h sind Breite und Höhe des rechteckigen Querschnitts, G bedeutet das Eigengewicht des Balkens, $\Sigma P\,a$ bedeutet die Summe mehrerer Einzellasten $P_1\,P_2 \ldots P_n$ in den Entfernungen $a_1\,a_2 \ldots a_n$ von der Befestigungsstelle.

Krümmung und Senkung der elastischen Linie:

147). $y = \frac{Px}{6ET}(3l^2 - x^2) + \frac{px}{24ET}(4l^3 - x^3)$

148). $s = \frac{Pl^3}{3ET} + \frac{pl^4}{8ET}$ } siehe Antwort auf Frage 91

149). $\beta = \omega + \frac{pl^3}{6ET}$

150). $s = l\omega + \frac{pl^4}{8ET}$ } siehe Erkl. 107

151). $\beta = \omega + \frac{pl^3}{6ET} + \frac{Pl^2}{2ET}$

152). $s = l\omega + \frac{pl^4}{8ET} + \frac{Pl^3}{3ET}$ } . . siehe Erkl. 108

153). $y = \frac{px}{24ET}(4l^3 - x^3)$

154). $s = \frac{pl^4}{8ET}$

155). $y = \frac{1}{24}\frac{Pl^2x}{ET}\left(4 - \frac{x^3}{l^3}\right)$

156). $s = \frac{1}{8}\frac{Pl^3}{ET}$ } . siehe Erkl. 109

y bezeichnet die Ordinate irgend eines beliebigen Punktes der elastischen Linie und x dessen Abscisse. P bedeutet die am freien Ende wirkende Last, E ist der Elasticitätsmodulus, T ist das Trägheitsmoment, p ist der auf die Längeneinheit des Stabes wirkende Teil der gleichmässig verbreiteten Last, so dass event. $p\,l = P$ gesetzt werden kann, l bezeichnet die Stablänge, s bedeutet d. grösste Senkung oder den Pfeil der Biegung. β bezeichnet den Neigungswinkel am freien Stabende, ω ist der Winkel, um den der Balken schräg gegen den Horizont eingespannt ist.

γ). Der Stab ist in zwei Punkten gestützt und in einem dritten Punkt zwischen jenen belastet:

157). $P\frac{l_1 l_2}{l} = QS$ siehe Antw. auf Frage 92

158). $P = \frac{1bh^2S}{6}\cdot\frac{l}{l_1 l_2}$ siehe Erkl. 110

159). $Pl = 4QS$ siehe Antw. auf Frage 93

160). $P = \frac{2}{3}\frac{bh^2S}{l}$ siehe Erkl. 110

161). $P + \frac{1}{2}G = QS\frac{l}{l_1 l_2}$

162). $P + \frac{1}{2}G = \frac{4QS}{l}$ } siehe Antw. auf Frage 94

163). $l^2 = \frac{4}{3}\frac{bh^2S}{\gamma}$ siehe Erkl. 113

P bezeichnet die in einem Punkt wirkende Last, l_1 und l_2 die resp. Abstände des Angriffspunktes der Last von den beiden Stützpunkten; l ist die Stablänge, Q ist der Querschnittsmodulus, S der Sicherheitskoeffizient, b und h die Breite und Höhe des rechteckigen Querschnitts. G ist das Eigengewicht des Stabes, γ ist das Gewicht des Stabes pro 1 m Länge.

δ). Der Stab ist in zwei Punkten gestützt und die Last gleichmässig verteilt:

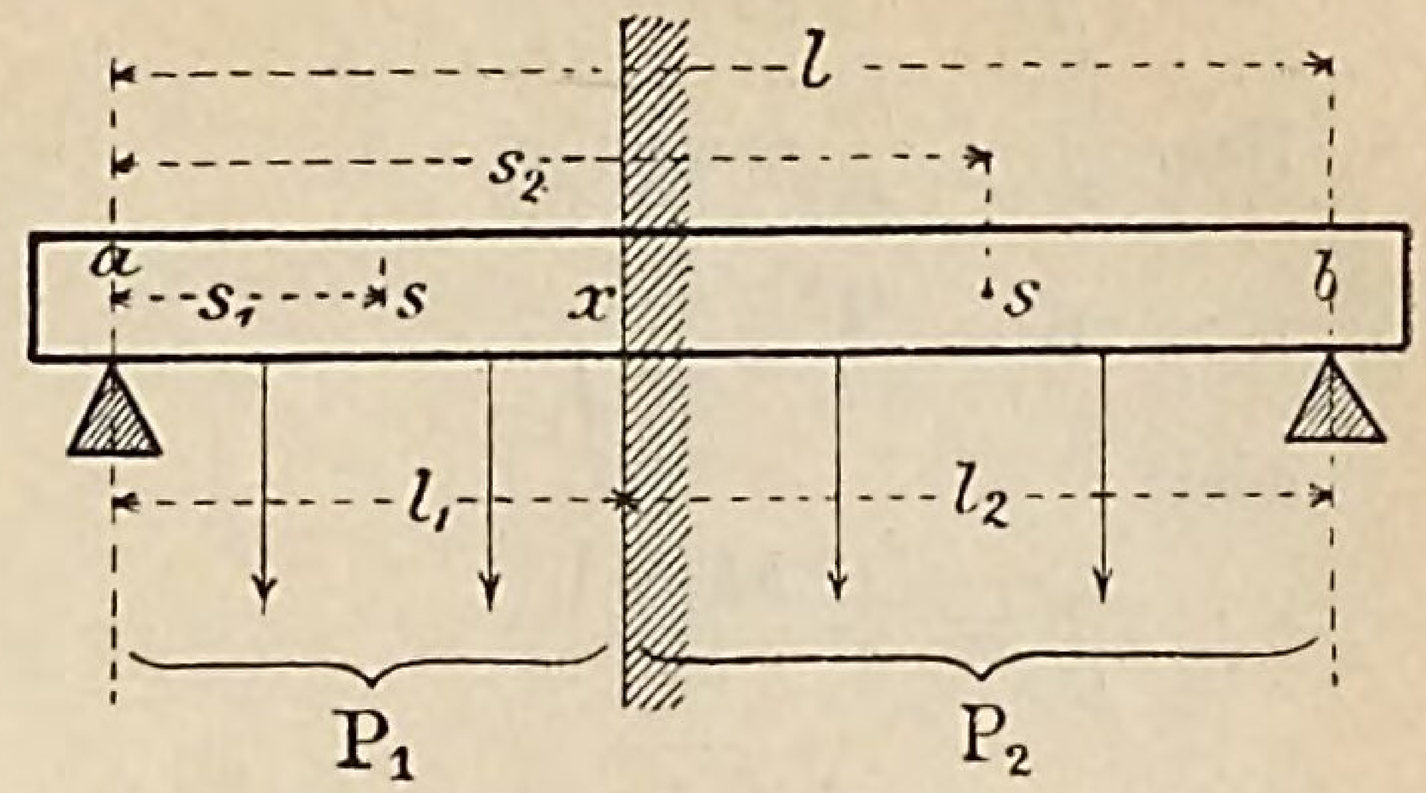
164). $Pl = 8QS$ siehe Antw. auf Frage 96

165). $\frac{1}{2}(P + G) = \frac{4bh^2S}{6l}$ siehe Erkl. 115.

166). $D = \frac{2l_2P_1s_2 + 2l_1P_2(l - s_2) + l_1l_2G}{2l_1l_2}$ } siehe Antw. auf Frage 97

P ist die Last, l ist die Stablänge, Q bedeutet den Querschnittsmodulus, S den Sicherheitskoeffizienten, G ist das Eigengewicht des Stabes, b und h sind Breite und Höhe des rechteckigen Querschnitts. Gleich. 166).—168). beziehen sich auf nachstehende Figur 181 und D bezeichnet den Druck auf einen beliebigen Punkt x (für Gleichung 168). den Druck auf den Mittelpunkt des Stabes).

Figur 181.



167). $D = \dfrac{P_1 s_1}{l} + \dfrac{G}{2}$

168). $D = \dfrac{2P_1 s_1 + 2P_2(l - s_2)}{l} + \dfrac{G}{2}$

} siehe Erkl. 116

ε). Der Stab ist an beiden Enden fest eingemauert:

P an einem Punkt wirkend:

169). $P = QS \cdot \dfrac{2l}{l_1 l_2}$

170). $P = \dfrac{1}{3} \dfrac{bh^2 l S}{l_1 l_2}$

} siehe Antw. auf Frage 98

P in der Mitte wirkend:

171). $Pl = 8QS$ siehe Antw. auf Frage 99

Balken geneigt:

172). $P = \dfrac{QS}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{2l}{l_1 l_2}$

173). $P = \dfrac{1}{3} \dfrac{bh^2 l S}{l_1 l_2 . \cos\alpha}$

} siehe Antw. auf Frage 100

P gleichmässig verteilt:

174). $Pl = 12QS$. . . siehe Antw. auf Frage 101

Balken zweimal gestützt:

P in der Mitte wirkend, p über d. Stablänge verteilt:

175). $y = \dfrac{(P + pl)x}{12ET}\left(\dfrac{3}{4} l^2 - x^2\right) - \dfrac{px}{24ET}\left(\dfrac{1}{2} l^3 - x^3\right)$

176). $s = \dfrac{l^3}{384ET}(8P + 5pl)$

} siehe Antw. auf Frage 102

Nur in der Mitte durch P belastet:

177). $y = \dfrac{Px}{48ET}(3l^2 - 4x^2)$

178). $s = \dfrac{Pl^3}{48ET}$

Nur gleichmässig belastet:

179). $y = \dfrac{px}{24ET}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$

180). $s = \dfrac{5pl^4}{384ET}$

} siehe Erkl. 120

Balken eingemauert:

181). $y = \dfrac{Plx^2}{24ET}\left(1 - 2\dfrac{x}{l} + \dfrac{x^2}{l^2}\right)$

182). $s = \dfrac{1}{384} \dfrac{Pl^3}{ET}$

} siehe Erkl. 121

P bez. die Belastung.
Q „ den Querschnittsmodulus.
S „ „ Sicherheitskoeffizient.
l „ die Stablänge.
l_1 und l_2 sind die resp. Abstände des Angriffspunkts der Last von den beiden Stützen.
b und h sind Breite und Höhe des rechteckigen Querschnitts.
α bezeichn. den Neigungswinkel.
y „ die Ordinate und x die Abscisse irgend eines Punktes der elastischen Linie.
p bezeichnet die auf einen Meter Stablänge verteilte Last.
E ist der Elasticitätsmodulus.
T „ das Trägheitsmoment.
s „ der Pfeil der Biegung.

VIII. Formeln für Bestimmung der Körperformen von gleicher relativer Festigkeit.

183). $S_{max} = \dfrac{16}{27} \cdot \dfrac{Ph}{\pi r^3}$ siehe Antw. auf Frage 107

184). $P = \dfrac{27}{16} \cdot \dfrac{\pi r^3}{l}\left(\dfrac{R}{r} - 1\right) \cdot S$. . siehe Antw. auf Frage 108

S_{max} ist die grösste, bei einem abgestumpften Kegel auftretende Spannung, P ist die Last, h die Höhe des Ergänzungskegels $\pi = 3{,}14$, r der Radius am freien Ende, R der Radius am gefährlichen Querschnitt, l bedeutet d. Länge und S in Gl. 184). den Sicherheitskoeffizienten.

185). $\frac{x}{yz^2} = \frac{l}{bh^2}$ siehe Antw. auf Frage 112

186). $y = \frac{b}{l}x$, wenn $z = h$ siehe Antw. auf Frage 115

187). $P = \frac{QS}{l}$

oder: siehe Antw. auf Frage 115

$P = \frac{1}{6} \frac{bh^2S}{l}$

188). $z = h\sqrt{\frac{x}{l}}$ wenn $y = b$. . siehe Antw. auf Frage 118

Wenn $y : z = b : h$, dann ist

189). $z = h\sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ siehe Antw. auf Frage 119

190). $\varrho = r\sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ siehe Antw. auf Frage 120

b, l und h bedeuten die Breite, Länge und Höhe eines Balkens von rechteckigem Querschnitt an der Befestigungsstelle, im Abstand x vom äusseren Ende ist dagegen y die Breite, z die Höhe, P ist die Tragfähigkeit für jeden Querschnitt, Q bedeutet d. Querschnittsmodulus. ϱ ist der Radius eines Balkens von kreisförmigem Querschnitt in der Entfernung x vom freien Ende, R bedeutet den Radius desselben Balkens an der Befestigungsstelle.

Bei gleichmässig verteilter Last über einen an einem Ende befestigten Balken ist:

191). $\frac{x^2}{yz^2} = \frac{l^2}{bh^2}$

192) $P = \frac{bh^2S}{3l}$ siehe Antw. auf Frage 121

Wenn $y = b$, ist

193). $z = \frac{h}{l}x$ siehe Erkl. 130

Wenn $z = h$, ist

194). $y = \frac{bx^2}{l^2}$

Im Abstand x vom freien Ende ist y die Breite, z die Höhe eines Balkens von rechteckigem Querschnitt, der bei der Länge l an der Befestigungsstelle die Breite b und die Höhe h hat. P bedeutet die Belastung, S ist der Sicherheitskoeffizient.

Ein an beiden Enden unterstützter Träger, über den sich die Einzellast P bewegt.

Wenn $y = b$, dann ist

195). $\frac{z^2}{h^2} = 1 - \frac{x_1^2}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2}$

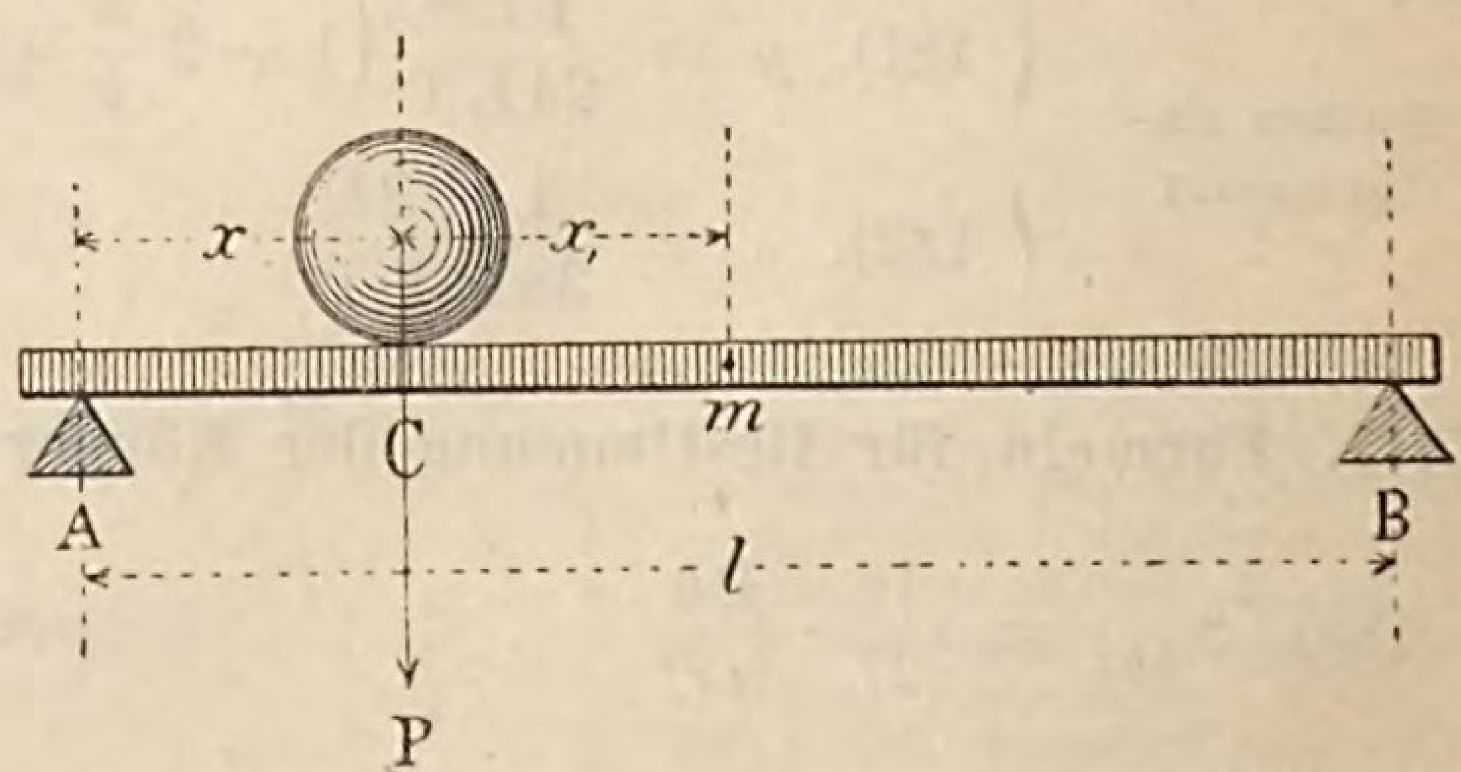
oder:

196). $z = \frac{2h}{l}\sqrt{\frac{l^2}{4} - x_1^2}$

197). $P = \frac{4}{3} \cdot \frac{bh^2S}{l}$

siehe Antw. auf Frage 123

Figur 182.



198). $P = \frac{1}{4} \cdot \frac{Ebh^3s}{l^3}$ siehe Erkl. 141

s = Pfeil der Biegung,
E = Elasticitätsmodulus.

Bestimmung der mechanischen Arbeits- oder Wirkungsgrösse.

199). $W = \frac{1}{6} \cdot \frac{P^2 l^2}{ET}$

200). $W = \frac{1}{6} \cdot \frac{S^2 T l}{Y^2 E}$ siehe Antw. auf Frage 150

201). $W = \frac{1}{6} \cdot \frac{S^2 Q l}{Y E}$

202). $W = \frac{1}{18} \cdot \frac{S^2}{E} \cdot V$ siehe Antw. auf Frage 151

203). $W = \frac{1}{6} V \cdot \frac{S^2}{E}$ siehe Erkl. 146

(gilt für eine dreieckige Feder).

W bedeutet die Arbeits- oder Wirkungsgrösse, welche zur Biegung eines Stabes von der Länge l nötig ist. P ist die Belastung, E ist d. Elasticitätsmodulus, T ist das Trägheitsmoment, S ist die Maximalspannung der äussersten Faser im Abstand Y von der neutralen Achse, V bedeutet das Volumen des gebogenen Körpers.

Bestimmung der Zapfendicke und Zapfenlänge.

204). $d = \sqrt{\frac{32e}{\pi S}} \cdot \sqrt{P}$

205). $d = 0{,}18\sqrt{P}$ | für Gusseisen

206). $32d^2 = P$ | für Gusseisen

207). $d = 0{,}15\sqrt{P}$ | für Schmiedeeisen

208). $P = 45d^2$ | für Schmiedeeisen

siehe Erkl. 150

d bedeutet den Durchmesser des Zapfens.
$e = \frac{d}{l}$ ist das Verhältnis von Durchmesser zu Zapfenlänge
S ist der Sicherheitskoeffizient.
P „ „ Zapfendruck.

IX. Formeln zur Berechnung der Torsionselasticität und -Festigkeit.

a). Gesetze der Torsionselasticität.

209). $\begin{cases} P = \omega \cdot T \cdot \frac{r^4}{l} \\ \omega = \frac{1}{T} \cdot \frac{Pl}{r^4} \end{cases}$ siehe Antw. auf Frage 164

ω bezeichnet den Torsionswinkel, P ist die Torsionskraft, l bedeutet die Stablänge, r ist der Halbmesser des Stabes und $\frac{1}{T}$ der Torsionskoeffizient.

b). Bestimmung des Torsionsmoments, der Torsionskraft und des grössten Torsionswinkels eines beliebigen Querschnitts.

210). $\omega = \frac{PRl}{E_1 T_o}$ oder $= \frac{Ml}{E_1 T_o}$. . siehe Antw. auf Frage 172

211). $T_o = T_1 + T_2$ siehe Erkl. 175

212). $\omega^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{Ml}{E_1 T_o}$ siehe Antw. auf Frage 173

213). $\alpha = \frac{Y\omega}{l}$

214). $\alpha^0 = \frac{Y\pi}{180\,l}\,\omega^0$ siehe Antw. auf Frage 175

215). $S : s = Y : \varrho$

216). M oder $PR = \frac{S}{Y} T_o$ siehe Antw. auf Frage 176

217). $P = \frac{SQ_1}{R}$

ω bezeichnet den Torsionswinkel in Bogenmass, ω^0 bezeichnet den Torsionswinkel in Gradmass. P ist die am Hebelarm R wirkende Torsionskraft, also $PR = M$ das Torsionsmoment. l ist die Stablänge, T_o ist das polare Trägheitsmoment, T_1 und T_2 sind die beiden achsialen Trägheitsmomente, E_1 ist der Torsionselasticitätsmodul, α ist der Verschiebungswinkel in Bogenmass, α^0 derselbe Winkel in Gradmass, Y bezeichnet den Abstand der äussersten Faserschicht des Cylinders von der Achse desselben, S ist die Spannung in dies. Faserschicht, während s die Spannung einer Faser in der Entfernung ϱ vom Mittelpunkt bedeutet. $Q_1 = \frac{T_o}{Y}$ ist der polare Querschnittsmodulus. Dieselben Bezeichnungen gelten auch für die nachstehende Tabelle.

Tabelle für einige der wichtigsten Querschnittsformen.

Querschnitt	Y	T_o	Q_t	M
Rechteck: Höhe $= h$ Breite $= b$	$\frac{1}{2}\sqrt{b^2+h^2}$	$\frac{1}{12}bh(b^2+h^2)$	$\frac{1}{6}bh\sqrt{b^2+h^2}$	$\frac{1}{6}bhS\sqrt{b^2+h^2}$
Quadrat: eine Seite a horizontal	$\frac{1}{2}a\sqrt{2}$	$\frac{1}{6}a^4$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3 S}{\sqrt{2}}$
Quadrat: eine Diagonale horizontal	$\frac{1}{2}a\sqrt{2}$	$\frac{1}{6}a^4$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3 S}{\sqrt{2}}$
Kreis	$\frac{1}{2}d$	$\frac{1}{32}\pi d^4$	$\frac{1}{16}\pi d^3$	$\frac{1}{16}\pi S d^3$
Kreisring	$\frac{1}{2}D$	$\frac{1}{32}\pi(D^4-d^4)$	$\frac{1}{16}\pi\cdot\frac{(D^4-d^4)}{D}$	$\frac{1}{16}\pi S\cdot\frac{(D^4-d^4)}{D}$

Verdrehungswinkel für Kreisquerschnitt:

218). $$\omega = \frac{2Sl}{E_t d}, \qquad \omega^0 = \frac{360 Sl}{E_t d\pi}$$

oder:

219). $$\omega = 2\pi\frac{PRl}{E_t F^2} \text{ oder } \omega = \frac{32PRl}{E_t \pi d^4}$$
$$\omega^0 = 360\frac{PRl}{E_t F^2} \text{ oder } \omega^0 = 16\frac{360}{\pi^2}\cdot\frac{PRl}{E_t d^4}$$

Verdrehungswinkel für quadratischen Querschnitt:

220). $$\omega = \frac{6PRl}{E_t a^4}, \qquad \omega^0 = \frac{6PRl}{E_t a^4}\cdot\frac{180^0}{\pi}$$

Verdrehungswinkel für einen rechteckigen Querschnitt:

221). $$\omega = \frac{12PRl}{E_t bh(b^2+h^2)}, \qquad \omega^0 = \frac{12PRl}{E_t bh(b^2+h^2)}\cdot\frac{180^0}{\pi}$$

Verdrehungswinkel für einen hohlen Cylinder:

222). $$\omega = \frac{32PRl}{E_t \pi(D^4-d^4)}, \qquad \omega^0 = \frac{32PRl}{E_t \pi(D^4-d^4)}\cdot\frac{180^0}{\pi}$$

siehe Erkl. 180

ω bezeichnet den Verdrehungswinkel in Bogenmass, ω^0 bezeichnet denselben Winkel in Gradmass. S ist der Sicherheitsmodulus resp. die Spannung in der äussersten Faserschicht. l ist die Stablänge, E_t ist der Elasticitätsmodulus in Bezug auf Torsion. P ist die am Hebelarm R wirkende Kraft, F bezeichnet d. Flächeninhalt des Querschnitts; a bezeichnet in Gl 197). die Quadratseite, b und h sind in Gl. 198). die Seiten des rechteckigen Querschnitts und D bezeichnet in Gl. 199). den äusseren, d den inneren Durchmesser des kreisringförmigen Querschnitts.

223). $E_t = PR$ oder M siehe Antw. auf Frage 177

c). Berechnung von Transmissions- und Radwellen.

224). $d = \sqrt[3]{\frac{16PR}{\pi S}}$ siehe Antw. auf Frage 182

225). Für Schmiedeeisen ist $d = 0{,}28\sqrt[3]{PR}$ } siehe Antw. auf Frage 183

226). „ Gusseisen „ $d = 0{,}38\sqrt[3]{PR}$ }

227). Transmissionswellen aus Gussstahl, Verdrehungswinkel $1/4^0$ pro 1 m . . $d = 4{,}133\sqrt[4]{PR}$ siehe Antw. auf Frage 184

E_t ist der Elasticitätsmodulus in Bezug auf Torsion, P bezeichnet die am Hebelarm R wirkende Kraft, PR ist das Torsionsmoment M; d bezeichn. den Kreisdurchmesser; S ist der Sicherheitskoeffizient.

228). Widerstandsmoment einer rotierenden Welle . . . $W\varrho = \frac{N}{n} \cdot \frac{60.75}{2\pi}$

229). $d = 154\sqrt[3]{\frac{N}{nS}}$ in Millimeter.

230). Schmiedeeisen bei 20facher Sicherheit $d = 120\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$

231). Gusseisen bei 33facher Sicherheit $d = 160\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$

siehe Antw. auf Frage 185

$W\varrho$ bezeichnet das Widerstandsmoment der Reibung etc., W am Umfang eines Kreises vom Halbmesser ϱ wirkend. N ist die von der treibenden Kraft pro Sekunde geleistete Arbeit in Pferdekräfte ausgedrückt; n ist die Umdrehungszahl der Welle pro Minute. S ist der Sicherheitskoeffizient und d der Wellendurchmesser.

232). Für hohle cylindrische Wellen gilt $D = \frac{\delta}{\sqrt[3]{1 - n^4}}$ siehe Antw. auf Frage 186

233). $D = 1{,}05\,\delta$ siehe Erkl. 187

D ist der äussere und d der innere Durchmesser der hohlen cylindrischen Welle, während δ den Durchm. eines massiven Cylinders von gleicher Festigkeit bezeichnet. d ist in Teile des Durchmessers D ausgedrückt, so dass $d = nD$, also $n = \frac{d}{D}$ bedeutet.

d). Der an einem Ende befestigte Stab ist in seiner ganzen Länge gleichmässig mit dem Drehungsmoment M = PR beansprucht.

234). $M = PR\frac{x}{l} = \frac{S}{Y}T_o = SQ_1$

235). $P = \frac{ST_o}{YR} \cdot \frac{l}{x}$ oder $P = \frac{SQ_1}{R} \cdot \frac{l}{x}$

siehe Antw. auf Frage 187

236). $\omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{PRl}{E_t T_o}$ oder $\omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{Sl}{YE_t}$

237). $\omega^0 = \frac{360}{4\pi} \cdot \frac{PRl}{E_t T_o}$ oder $\omega^0 = \frac{90}{\pi} \cdot \frac{Sl}{YE_t}$

siehe Antw. auf Frage 189

238). $M = PR\frac{x}{l}$

239). $P = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{Sd^3}{R} \cdot \frac{l}{x}$

. . . . siehe Erkl. 188

P bezeichnet die am Hebelarm R wirkende Torsionskraft, M ist das Torsionsmoment, x bezeichnet den Abstand eines beliebigen Querschnitts vom freien Stabende, l ist die Stablänge, S ist der Sicherheits- resp. Festigkeitskoeffizient, Y ist die Entfernung d. äussersten Faser von der Drehachse, T_o ist das polare Trägheitsmoment, $Q_1 = \frac{T_o}{Y}$ ist d. Querschnittsmodulus.

240). $\omega = \frac{S\,l}{E_1\,d}$; $\omega^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{S\,l}{E_1\,d}$

241). $\omega = \pi\,\frac{P\,R\,l}{E_1\,F^2}$; $\omega^0 = 180\,\frac{P\,R\,l}{E_1\,F^2}$ siehe Erkl. 189

ω bezeichnet den Torsionswinkel in Bogenmass, ω^0 bezeichnet denselben Winkel in Gradmass; E_1 ist der Elasticitätsmodulus, d bezeichnet den Durchmesser eines kreisförmigen Querschnitts und F den Flächeninhalt desselben.

e). Bestimmung der Körperformen von gleicher Torsionsfestigkeit.

242). $\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$

243). $y^3 = \left(\frac{16\,P\,R}{\pi\,S\,l}\right) x$ siehe Antw. auf Frage 193

244). $\omega = \frac{3\,S\,l}{E_1\,d}$ siehe Antw. auf Frage 194

y bezeichnet den Durchmesser des Stabes in der Entfernung x vom freien Stabende. d bezeichnet den Durchmesser an der Befestigungsstelle, l ist die Stablänge, P ist die am Hebelarm R wirkende Kraft, S der Sicherheitskoeffizient, E_1 der Elasticitätsmodulus und ω der Torsionswinkel in Bogenmass.

f). Bestimmung der Arbeits- oder Wirkungsgrösse, welche zur Verdrehung eines Stabes um den Bogen ω nötig ist.

245). $W = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{S^2}{E_1}\right) \cdot \frac{T_o\,l}{Y^2}$ siehe Antw. auf Frage 195

246). $W = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{S^2}{E_1}\right) V$ siehe Erkl. 191

247). $\frac{P\,v^2}{2\,g} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{S^2}{E_1}\right) V$ siehe Erkl. 193

W bezeichnet die mechanische Arbeit, S ist der Sicherheits- resp. Festigkeitskoeffizient, E_1 ist der Elasticitätsmodulus, T_o bezeichnet das polare Trägheitsmoment, l ist die Stablänge, Y die Entfernung der äussersten Faser von der Drehachse und V das Volumen des Stabes. P bezeichnet das Gew. eines ringförmigen Schwungrades, v ist die Umfangsgeschwindigkeit desselben und $g = 9{,}81$ m ist die Beschleunigung des freien Falles.

X. Formeln zur Berechnung der Zerknickungsfestigkeit.

I. Fall, siehe Fig. 183.

248). $\frac{y}{s} = \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{E\,T}}\right)$

Allgemein:

249). $P = \frac{\pi^2\,E\,T}{4\,l^2}$. . . siehe Antw. auf Frage 200

250). $P = 2{,}5\,\frac{E\,T}{n\,l^2}$

Bei rechteckigem Stab:

251). $P = \frac{\pi^2}{48} \cdot \frac{E\,b\,h^3}{l^2}$. . . siehe Antw. auf Frage 201

Bei quadratischem Stab:

252). $P = \frac{\pi^2}{48} \cdot \frac{E\,a^4}{l^2}$

y bedeutet die Ausbiegung eines beliebigen Querschnitts in der senkrechten Entfernung x vom freien Stabende. s ist die grösste Ausbiegung an d. Befestigungsstelle. P bezeichnet die auf Zerknickung wirkende Kraft. T bedeutet das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts und E ist der Elasticitätsmodulus. l bezeichnet die Stablänge. n ist ein Sicherheitsfaktor, so dass der Sicherheitskoeffizient für Zerknickungsfestigkeit $S_1 = \frac{1}{n}$ ist. Bei rechteckigem Stabquerschnitt ist b die Breite und h die Höhe der Querschnittsfläche. Bei quadratischem Querschnitt ist a die Seite des Quadrats.

Bei cylindrischem Stab:

253). $$P = \frac{\pi^3}{256} \cdot \frac{E\,d^4}{l^2}$$

Bei hohlem cylindrischem Stab:

254). $$P = \frac{\pi^3}{256} \cdot \frac{E\,(D^4 - d^4)}{l^2}$$

. . siehe Antw. auf Frage 201

Bei einem cylindrischen Stab bedeutet d den Durchmesser und bei einem hohlen cylindrischen Stab ist D der äussere und d der innere Durchmesser.

II. Fall, siehe Fig. 184.

Allgemein:

255). $$P = 4\left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E\,T}{l^2}\right]$$

256). $$P = \text{ca. } 10\,\frac{E\,T}{n\,l^2}$$

siehe Antw. auf Frage 202

Für einen rechteckigen Stab:

257). $$P = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E\,b\,h^3}{l^2}$$

Für einen quadratischen Stab:

258). $$P = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E\,a^4}{l^2}$$

Für einen kreisförmigen Stab:

259). $$P = \frac{\pi^3}{64} \cdot \frac{E\,d^4}{l^2}$$

Für einen hohlen cylindrischen Stab:

260). $$P = \frac{\pi^3}{64} \cdot \frac{E\,(D^4 - d^4)}{l^2}$$

siehe Erkl. 203

III. Fall, siehe Fig. 185.

Allgemein:

261). $$P = 16\left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E\,T}{l^2}\right]$$

262). $$P = 40\,\frac{E\,T}{n\,l^2}$$

siehe Antw. auf Frage 203

Für einen rechteckigen Stab:

263). $$P = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{E\,b\,h^3}{l^2}$$

Für einen quadratischen Stab:

264). $$P = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{E\,a^4}{l^2}$$

Für einen kreisförmigen Stab:

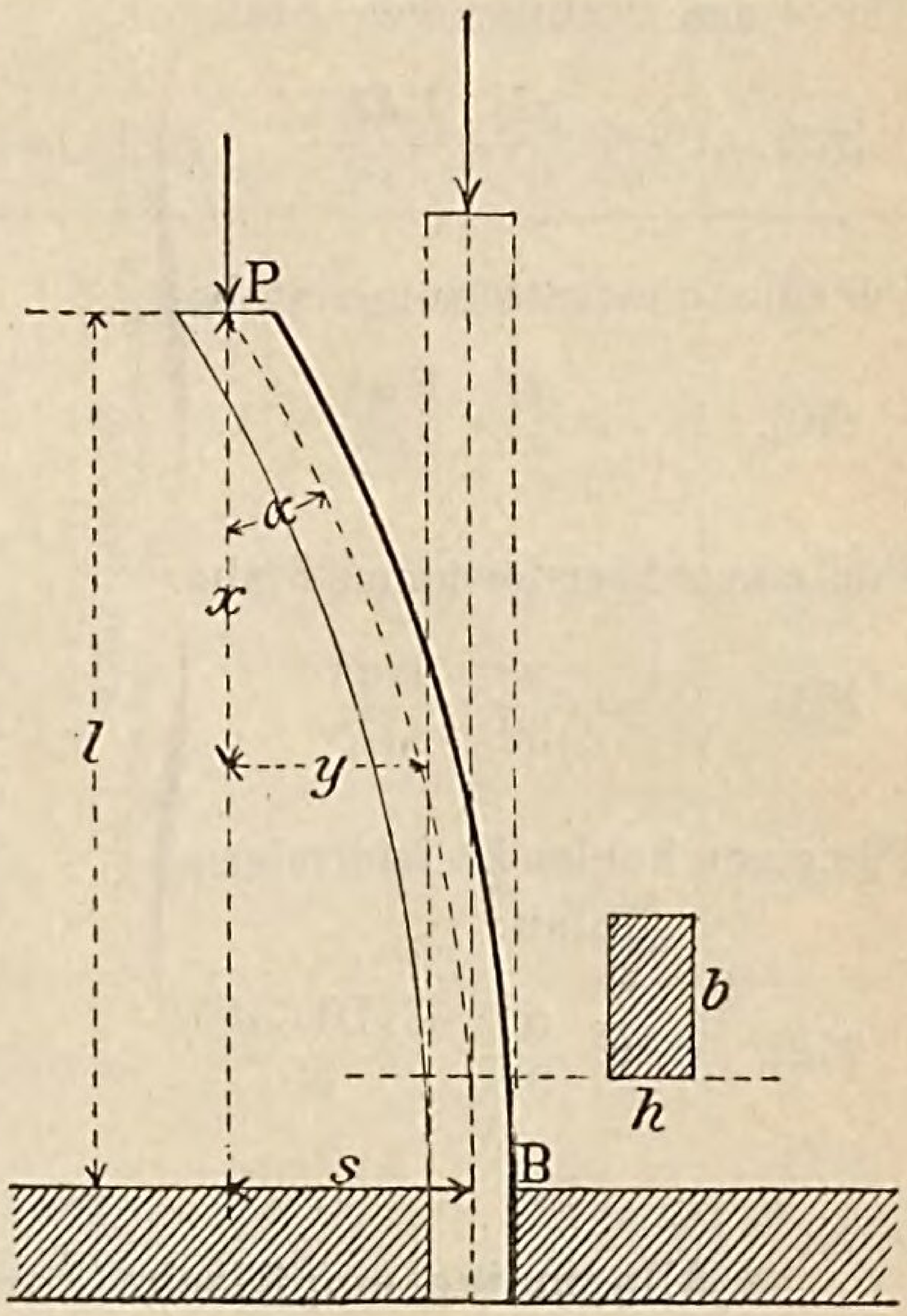
265). $$P = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{E\,d^4}{l^2}$$

Für einen hohlen kreisförmigen Stab:

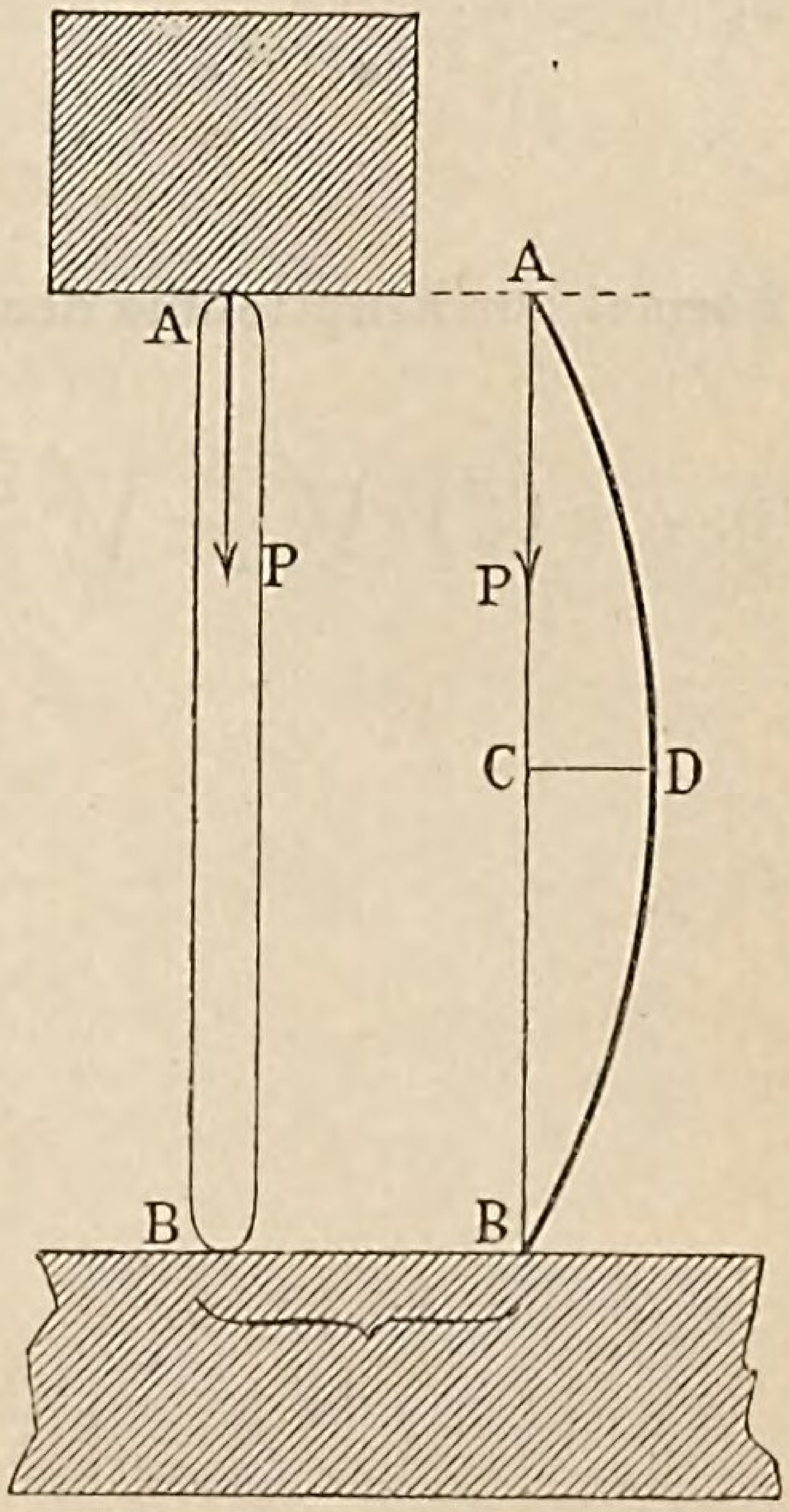
266). $$P = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{E\,(D^4 - d^4)}{l^2}$$

siehe Erkl. 204

Figur 183.



Figur 184.



IV. Fall, siehe Fig. 186.

Allgemein:

267). $P = 8\left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{ET}{l^2}\right]$

oder:

268). $P = \text{ca. } 20 \frac{ET}{n l^2}$

siehe Antw. auf Frage 204

Für einen rechteckigen Stab:

269). $P = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{Ebh^3}{l^2}$

Für einen quadratförmigen Stab:

270). $P = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{Ea^4}{l^2}$

Für einen kreisförmigen Stab:

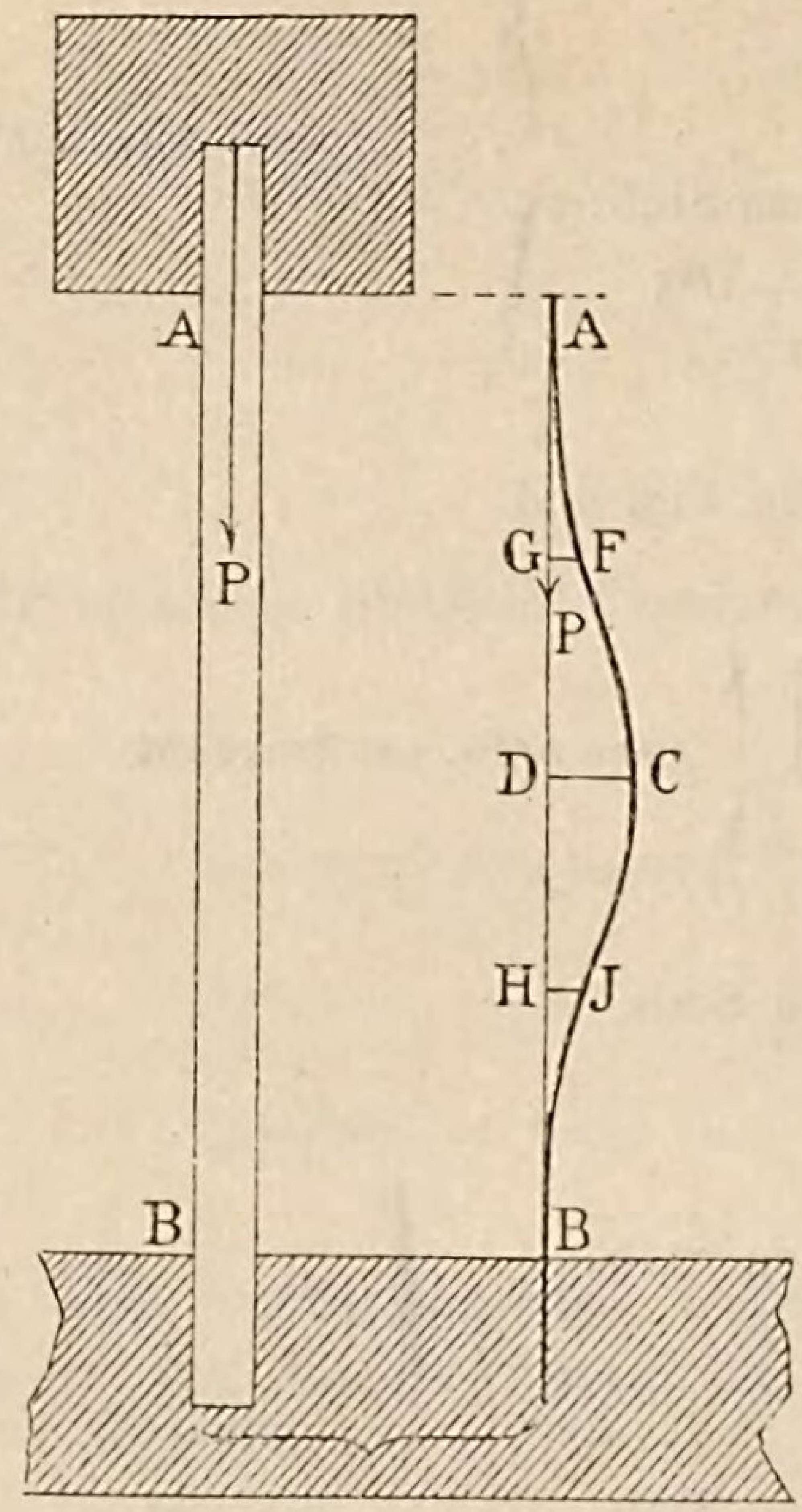
271). $P = \frac{\pi^3}{32} \cdot \frac{Ed^4}{l^2}$

Für einen hohlen kreisförmigen Stab:

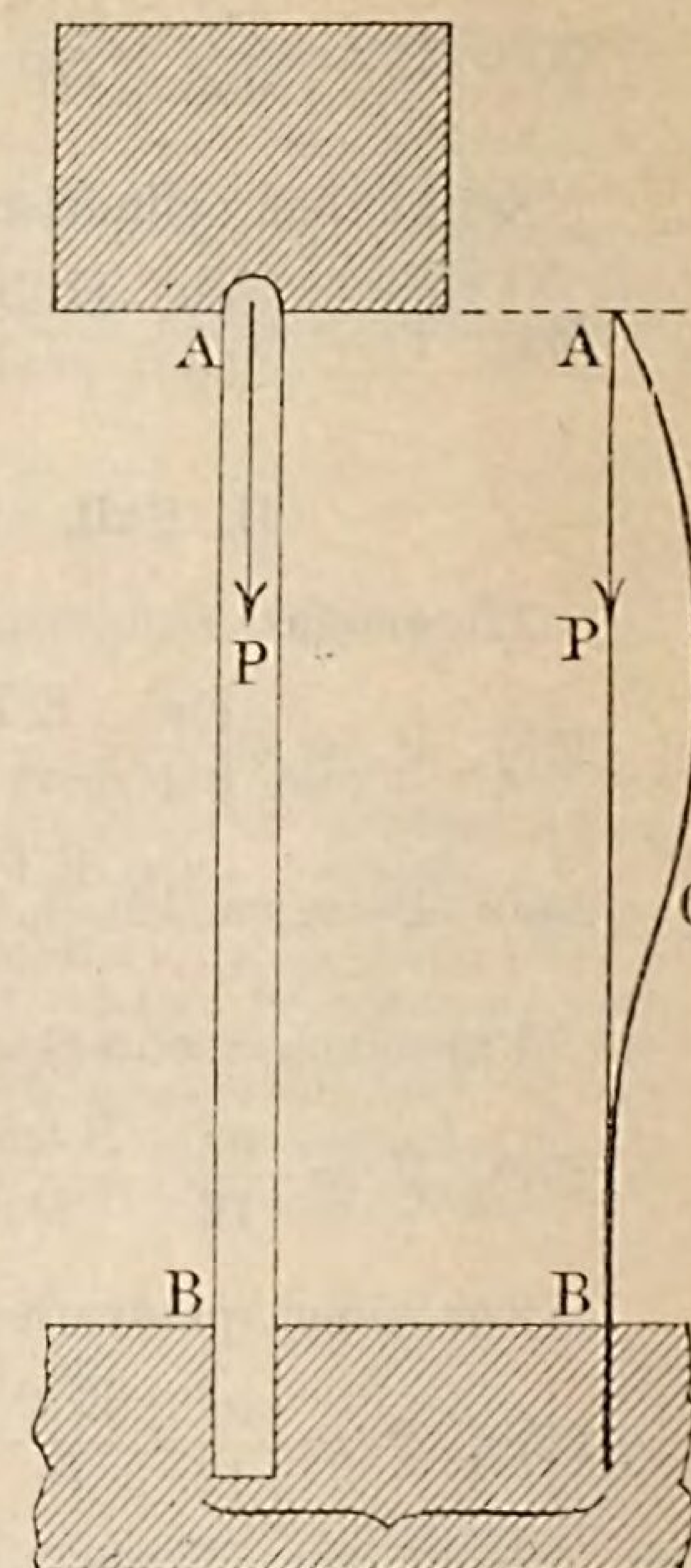
272). $P = \frac{\pi^3}{32} \cdot \frac{E(D^4 - d^4)}{l^2}$

siehe Erkl. 205

Figur 185.



Figur 186.



Allgemeine empirische Formel von Grasshof:

273). $K = n \cdot \frac{P_d \cdot P_k}{P_d + P_k}$ siehe Erkl. 206

K bedeutet die zulässige Tragkraft; P_d ist die Kraft, welche den Stab zerdrücken würde; P_k ist die Kraft, welche den Stab zerknicken würde und n ist ein Sicherheitskoeffizient so dass $S_1 = \frac{1}{n}$.

Formel zur Ermittelung des Längenverhältnisses $\frac{l}{d}$:

274). $l = \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{T}{F}} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}$. . siehe Antw. auf Frage 208

l bedeutet die Stablänge, für welche Druck- u. Zerknickungsfestigkeit gleich gross sind, T ist das Trägheitsmoment, F ist die Querschnittsfläche, E ist der Elasticitätsmodulus und s der Festigkeitskoeffizient.

Tabelle über die Verhältniszahlen $\frac{l}{d}$ und $\frac{l}{a}$ resp. $\frac{l}{h}$ der Länge l zu den Querschnittsdimensionen d und a resp. h, bei welcher die Zerknickungsfestigkeit gerade gleich ist der Druckfestigkeit.

Fall	Querschnitt	Tragkraft bei der		Verhältnis $\left(\frac{l}{d}\right)$ resp. $\left(\frac{l}{a}\right)$ oder $\left(\frac{l}{h}\right)$ für		
		Zerknickungsfestigkeit	Druckfestigkeit	Eichenholz	Schmiedeeisen	Gusseisen
I (Figur 183)	Kreis	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^3}{256} \cdot \frac{E d^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\pi}{4} s d^2$	6	11	5
	Quadrat	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{48} \cdot \frac{E a^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s a^2$	7	$12^1/_2$	$5^3/_4$
	Rechteck	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{48} \cdot \frac{E b h^3}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s b h$			
II (Figur 184)	Kreis	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^3}{64} \cdot \frac{E d^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\pi}{4} s d^3$	12	22	10
	Quadrat	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E a^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s a^2$	14	25	$11^1/_2$
	Rechteck	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E b h^3}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s b h$			
III Figur 185)	Kreis	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^3}{32} \cdot \frac{E d^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\pi}{4} s d^2$	18	31	14
	Quadrat	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{E a^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s a^2$	20	$35^1/_4$	16
	Rechteck	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{E b h^3}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s b h$			
IV (Figur 186)	Kreis	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{E d^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\pi}{4} s d^2$	25	43	20
	Quadrat	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{E a^4}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s a^2$	29	50	23
	Rechteck	$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{E b h^3}{l^2}$	$P = \frac{1}{\sigma} \cdot s b h^2$			

Resultate zu den ungelösten Aufgaben.

a). Aufgaben über die Zugelasticität und -Festigkeit.

Zu **Aufgabe 22.** a). E = 17517 kg pro □mm Querschnitt; b). ε = 0,00005709.

Aufgabe 23. Der Draht verlängert sich um λ = 6,23 mm.

Aufgabe 24. Wenn nach Tabelle auf Seite 38 E = 2500000 pro □cm = 25000 pro □mm gerechnet wird, dann ist a). F = 2244 □mm; b). d = 53,47 mm oder 5,347 cm; c). a = 47,37 mm = 4,737 cm; d). b = 36,66 mm und h = 61,1 mm.

Aufgabe 25. Setzt man für Eisen E = 15—25000 also im Mittel E = 20000 kg pro □mm, für Messing E = 6450 und für Blei E = 5400 (siehe Tabelle Seite 10), so ist a). P = $83\frac{1}{3}$ kg; b). P = ca. 27 kg; c). P = $22\frac{1}{2}$ kg.

Aufgabe 26. Rechnet man E = 20000 pro □mm dann ist L = 6000 mm oder 6 m.

Aufgabe 27. K = 8,09 kg, S = 1,62 kg und E = 931 kg pro □mm.

Aufgabe 28. K = 11083 Pfund, S = 2219 und E = 127547 Pfund pro Quadratzoll.

Aufgabe 29. K = 800 kg pro □cm oder 8 kg pro □mm.

Aufgabe 30. Rechnet man für Bleidraht K = 200 kg pro □cm (siehe Seite 27) so ist P = 981,25 kg und die Tragfähigkeit = 196,25 kg.

Aufgabe 31. Rechnet man für den Sicherheitskoeffizient S = 120 pro □cm, für den Tragmodul T = 270 pro □cm (siehe Tabelle Seite 32) und für den Festigkeitskoeffizient K = 800 pro □cm (siehe Tabelle S. 38) so ist a). d = 18 cm; b). d = 12 cm; c). d = 7 cm.

Aufgabe 32. a). Querschnittsfläche F = 13 □cm; b). Verlängerung λ = 1,29 cm.

Aufgabe 33. P = 1099 kg.

Aufgabe 34. d = 6,325 cm.

Aufgabe 35. a). d = 10 cm; b). d = 16,6 cm.

Aufgabe 36. Das spez. Gewicht von Messing zu γ = 8,2 und S = 210 pro □cm gerechnet, gibt a). den Durchmesser d = 10,55 cm; b). das Gewicht der Stange G = 358 kg und wenn E = 645000 gerechnet wird (s. Tabelle S. 38) so ist c). die Verlängerung λ = 0,16 cm = 1,6 mm.

Aufgabe 37. Sicherheitskoeffizient S = 120 pro □cm und spez. Gewicht = 0,808 gerechnet, gibt für P = 51598 kg.

Aufgabe 38. S = 210,44 kg pro □cm.

Zu **Aufgabe 39.** Der Draht aus Blei reisst bei 112,28 cm Länge durch sein eigenes Gewicht.

Aufgabe 40. Der äussere Durchmesser des Drahtseiles beträgt, wie eine direkte Ausmessung an der Fig. 38 beweist 22,5 mm und somit ist das spez. Gewicht des Drahtseils ca. 0,9 vom spez. Gewicht. Das spez. Gewicht des Eisens sei $\gamma = 7,6$, dann ist, wenn S = 1200 kg pro □cm gerechnet wird, P = 3963 kg.

Aufgabe 41. $d_1 = 1,586$ mm, $d_2 = 1,588$ mm, $d_3 = 1,590$ mm, $d_4 = 1,591$ mm.

b). Aufgaben über die Druckelasticität und -Festigkeit.

Aufgabe 49. a). Die Verkürzung $\lambda = 0,3145$ cm oder $\frac{1}{1272}$ der ursprünglichen Länge L; b). Mit Berücksichtigung des Eigengewichts ist $\lambda = 0,315$ cm oder $\frac{1}{1270}$ L.

Aufgabe 50. E = 10000 kg pro □mm oder E = 1000000 kg pro □cm.

Aufgabe 51. Für harten stark gebrannten Ziegelstein ist der Festigkeitskoeffizient s = 172 kg pro □cm (s. Seite 62) und somit $P_1 = 51600$ kg; $P_2 = 27950$ kg; $P_3 = 13416$ kg.

Aufgabe 52. Bei 10facher Sicherheit ist S = 247,8 kg pro □cm (s. S. 62) und somit die Kantenlänge a = 100 cm.

Aufgabe 53. Bei 15facher Sicherheit ist S = 12 kg pro □cm (s. S. 62) und somit der Durchmesser d = 30 cm.

Aufgabe 54. Die Mauerdicke beträgt x = 57,5 cm.

c). Aufgaben über die Abscherungsfestigkeit.

Aufgabe 60. P = 30400 kg.

Aufgabe 61. d = 4,37 cm.

Aufgabe 62. e = 34,4 cm.

Aufgabe 63. P = 21980 kg.

d). Aufgaben über die Biegungselasticität und -Festigkeit.

Aufgabe 97. $P_1 : P_2 = 1 : 0,6$.

Aufgabe 98. $P_1 : P_2 = 1 : 0,62$.

Aufgabe 99. $P_1 : P_2 = 1 : 1,4$.

Aufgabe 100. a). Der Balken trägt bei 10facher Sicherheit 1350 kg und wird b). durch 13500 kg Last abgebrochen.

Aufgabe 101. a). P = 2700 kg; b). P = 5400 kg; c). P = 10800 kg; d). P = 10800 kg.

Aufgabe 102. S = 2350 kg pro □cm.

Aufgabe 103. a). h = 52,2 cm; b). s = 0,177 cm oder 1,77 mm.

Aufgabe 104. E = 20966 kg pro □mm.

Aufgabe 105. Für den Abstand der neutralen Achse erhält man 64,4 mm oder rund 6 cm und somit ist a). das Trägheitsmoment T = 774 und $Q = \frac{T}{Y} = \frac{774}{6} = 129$ und ferner b). P = 2322 kg; c). 193½ kg; d). α). 2158 kg, β). 111½ kg.

Zu **Aufgabe 106.** Breite b = 23,39 cm, Höhe h = 32,74 cm.

Aufgabe 107. Durchmesser d = $10\frac{1}{2}$ cm (genau 10,489).

Aufgabe 108. a). P = 6028,8 kg; b). P = 3618,7 kg; c). 2562,1 kg; d). 3940 kg.

Aufgabe 109. Breite b = 3,44 cm, Höhe h = 17,20 cm.

Aufgabe 110. Breite b = 7 cm und Höhe h = 17,5 cm.

Aufgabe 111. a). 1567 kg; b). 3134 kg; c). 3134 kg; d). 4701 kg; e). α). 1095 kg, β). 2190 kg, γ). 2190 kg, δ). 3285 kg.

Aufgabe 112. $\frac{1}{2}(H - h) = \frac{1}{2}(43 - 27) = 8$ cm gibt zunächst die Höhe des oberen und unteren Flansch. Berechnet man nun nach Formel 12 (Seite 80) die Lage des Schwerpunkts, so erhält man für $x_1 = 18{,}65$, $x_2 = 24{,}35$, $x_3 = 10{,}63$ und $x_4 = 16{,}35$. Das Eigengewicht beträgt 3323,25 kg und nach Gleich. 36). und 37). (s. Seite 90) ist $Q_1 = 8582$, $Q_2 = 6573$ und somit $P_1 = 22858$ kg oder $P_2 = 17118$ kg, je nachdem der Träger auf dem breiteren oder schmaleren Flansch aufliegt. b). $P_1 = 28375$ kg oder $P_2 = 23005$ kg.

Aufgabe 113. S = 157,2 kg pro □cm.

Aufgabe 114. l = 7,471 m.

Aufgabe 115. $l_1 = l\sqrt[3]{\frac{s_1}{16\,s}}$ oder $l_1 = 186\frac{2}{3}$ mm.

Aufgabe 116. a). P = 2937 kg; b). der Druck, den die Gewichte auf den Mittelpunkt des Balkens ausüben, ist D = 2944, also schon etwas grösser als das Gewicht, welches in der Mitte angebracht werden darf.

Aufgabe 117. a). Ohne Rücksicht auf das Eigengewicht der Welle erhält man für den Durchmesser d = 49 cm. Das hieraus berechnete Eigengewicht G = 792 kg, mit dessen Berücksichtigung man für d = 50,24 cm erhält. b). d = 45,65 cm.

Aufgabe 118. P = 1285 kg.

Aufgabe 119. Länge l = 6,12 cm, Breite b = 24,48 cm, Höhe oder Dicke d = 4,08 cm.

Aufgabe 120. Die Senkung s = 5,408 cm.

Aufgabe 121. a). Die Länge l = 392,4 cm; b). l = 877,396 cm.

Aufgabe 122. Die Beanspruchung pro □cm beträgt a). S = 728,37 cm; b). 748 cm.

Aufgabe 123. $P = \frac{4S\pi}{32\,l}\cdot\left(\frac{aA^3 - a_1A_1^3}{A}\right)$. a). P = 23167 kg; b). P = 15165 kg. Der Pfeil der Biegung ist im ersten Fall s = 2,67 mm, im zweiten Fall s = 4 mm.

Aufgabe 124. a). $4b(2bx + 10b^2) = 2b^2x + 70b^3$ woraus $x = 5b$. b). $T = \frac{1}{3}\left[5b(4b)^3 + b(8b)^3\right] - (5b - b)\,.\,(4b - 2b)^3$ woraus $T = 266\frac{2}{3}b^4$. c). $Q_1 = \frac{T}{4b} = 66\frac{2}{3}b^3$ und $Q_2 = \frac{T}{8b} = 33\frac{1}{3}b^3$.

Aufgabe 125. $b = \sqrt[3]{15}$ oder b = 2,466 cm.

Aufgabe 126. Breite b = 8,4 cm, Höhe h = 14,7 cm.

Zu **Aufgabe 127.** Nach Antw. auf Frage 113 ist die Materialspannung an der Befestigungsstelle dieselbe als im gefährlichen Querschnitt und zwar ist $S = \frac{6Pl}{bh^2}$ oder da in diesem Fall $b = h$, so ist $S = \frac{6Pl}{h^3}$ oder $P = \frac{Sh^3}{6l}$. Daraus folgt a). P = 8424 kg. b). $P = \frac{a^3 S}{6l}$ oder P = 4875 kg. c). $P_1 : P_2 = 8424 : 4875 = 216 : 125 = 6^3 : 5^3$.

Aufgabe 128. Das Eigengewicht wird näherungsweise als in der Mitte wirkend angenommen. Nach Gleichung 16). auf Seite 82 ist $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{bh^2 S}{l}$ oder $h = \sqrt{\frac{6Pl}{Sb}}$ oder an der Befestigungsstelle ist die Höhe $h = 53,5$ cm. Ferner ist nach der auf Seite 141 gegebenen Formel, wenn wir die Höhen in 20, 40, 60 etc. Centimeter von der Befestigungsstelle mit h_1, h_2 etc. bezeichnen, $h_1 = h\sqrt{0,8} = 47,8$ cm; $h_2 = h\sqrt{0,6} = 41,5$ cm; $h_3 = h\sqrt{0,4} = 33,7$ cm und $h_4 = h\sqrt{0,2} = 24$ cm.

e). Aufgaben über die Torsionselasticität und -Festigkeit.

Aufgabe 140. Nach Formel $d = 0,28\sqrt[3]{PR}$ ist $d = 13,81$ oder ca. 14 cm.

Aufgabe 141. Nach Formel $d = 160\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ ist $d = 190,2$ mm oder 19 cm.

Aufgabe 142. Nach Formel $d = 0,38\sqrt[3]{PR}$ ist $P = \frac{d^3}{0,38^3 R}$ oder P = 3797 kg.

Aufgabe 143. a). Nach Formel $d = \sqrt[3]{\frac{16PR}{\pi S}}$ ist $d = 5,884$ cm. b). Nach Formel $\omega^0 = \frac{16PRl}{E_t} \cdot \frac{360}{\pi^2 d^4}$ ist $\omega = 0,81145^0$ oder $\omega = 48' \, 41,22''$.

Aufgabe 144. Nach Formel $\omega^0 = \frac{16PRl \,.\, 360}{E_t \pi^2 d^4}$ ist $E_t = \frac{16 \,.\, 360 \,.\, PRl}{\omega^0 \,.\, \pi^2 \,.\, d^4}$ oder $E_t = 778500$.

Aufgabe 145. a). Seite $a = 9,2$ cm. b). Torsionswinkel $\omega = 0,54937^0$ oder $\omega = 32' \, 57,7''$. c). Diesem Winkel entspricht ein Ausweichen der äussersten Faserschicht um 0,6237 mm. d). $a = 14$ cm.

Aufgabe 146. a). Seite $b = 26,436$ cm oder ca. 26,5 cm b). $d = 46,70$ cm oder $r = 23,35$ cm. c). α). Winkel $\omega = 0,81274^0$ oder $\omega = 48' \, 45,864''$; β). Winkel $\omega = 0,92013^0$ oder $\omega = 55' \, 12,468''$.

Aufgabe 147. a). A = 424115 mkg. b). A = 443893 mkg.

Aufgabe 148. a). P = 9,33 kg. b). $49^0 \, 49' \, 12''$. c). $\delta = 19^2/_3$ mm. d). 47 % Materialersparnis.

Aufgabe 149. $d_1 = 23,208$ cm; $d_2 = 29,240$ cm; $d_3 = 33,472$ cm; $d_4 = 36,840$ cm; $d_5 = 39,685$ cm; $d_6 = 42,172$ cm; $d_7 = 44,395$ cm; $d_8 = 46,416$ cm; $d_9 = 48,274$ cm.

Aufgabe 150. V = 42,926 cbm.

*

f). Aufgaben über die Zerknickungsfestigkeit.

Zu **Aufgabe 160.** Nach der in Antw. auf Frage 194 gegebenen Gleichung ist die Seite des quadratischen Querschnitts $a = 27$ cm. Rechnet man aber $\frac{l}{d} = 15{,}5$, also 25 kg pro Quadratcentimeter, dann ist $a = 34{,}6$ cm. Nimmt man aber nach *Ritters* Angaben für $n = 2{,}08$, dann ist $a = 32{,}49$ cm.

Aufgabe 161. $h = 3{,}511$ cm; $b = 17{,}555$ cm.

Aufgabe 162. a). P = 9741,3 kg. b α). P = 9928,4, β). P = 4683,3 kg. c). P = 7046,5 kg.

Aufgabe 163. a). P = 36750 kg. b). P = 18375 kg.

Aufgabe 164. a). 75130 kg. b). 46 cm Dicke.

Aufgabe 165. $D = \sqrt[4]{\frac{64\,P\,n\,l^2}{\pi^3\,E\,(1 - 0{,}8^4)}}$ oder D = 17,6 cm und $d = 14{,}08$ cm.

Aufgabe 166. $d = 6{,}398$ cm.

Aufgabe 167. a). Wandstärke = 1,07 cm oder 10,7 mm. b). $d = 11{,}675$ cm. c). Materialersparnis $77\frac{1}{2}\,\%$ oder an Gewicht 245,680 kg.

Litteraturverzeichnis.

Baumeister, M., Experimentelle Untersuchungen über Torsionselasticität. Wiedemanns Annalen. 18. Bd.

Buff, H., Lehrbuch der physikalischen Mechanik.

Burg, A., Compendium der populären Mechanik und Maschinenlehre.

Delabar, G., Die wichtigsten Maschinenelemente.

Emsmann, H., Physikalische Aufgaben.

Fliedner, C., Aufgaben aus der Physik.

Gehlers Physikalisches Wörterbuch.

Grossmann, M., Der freie Ankergang für Uhren.

Heussi, J., Der physikalische Apparat.

Himstedt, F., Ueber das Zusammenwirken von Zug und Torsion bei Metalldrähten. Wiedemanns Annalen.

Huber, Ph., Mechanik für Gewerbe- und Handwerkerschulen.

Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Naturwissenschaften.

König, A., Ueber eine neue Methode zur Bestimmung des Elasticitätsmodulus. Wiedemanns Annalen. 28. Bd.

Mousson, A., Die Physik auf Grundlage der Erfahrung.

Müller-Pouillet-Pfaundler, Lehrbuch der Physik.

Pierre, V., Apparat zur Demonstration der Gesetze der Zugelasticität. Wiedemanns Annalen. 22. Bd.

Ritter, A., Lehrbuch der technischen Mechanik.

Rühlmann, M., Die technische Mechanik und Maschinenlehre.

Sachse, J., Das technische Rechnen.

Schellen, H., Die Schule der Elementarmechanik und Maschinenlehre.

Uhlich, P., Die Festigkeitslehre.

Weisbach, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinentechnik.

Weitzel, Maschinenbau.

Wernicke, Lehrbuch der Mechanik fester Körper.

Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik.

Literaturverzeichnis.

Bauschinger, J., Experimentelle Untersuchungen über Festigkeitsverhältnisse. [illegible] Annalen. 15. Bd.

B[illegible], H., Lehrbuch der analytischen Mechanik.

Bo[illegible], A., Compendium der [illegible] Mechanik und Maschinenlehre.

Deinhardt, K., Die allgemeine Maschinenlehre.

Engelmann, H., Theoretische Statik.

Fliedner, C., Aufgaben aus der Physik.

Gehlers Physikalisches Wörterbuch.

Grossmann, H., Der [illegible] der Lehre.

Hamel, J., Die physikalische Mechanik.

Hagenbach, E., Ueber das Zusammenwirken von Zug und Biegung bei Stahl[illegible]. Wiedemanns Annalen.

Hädicke, H., Mechanik für Gewerbe- und Handwerkerschulen.

Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Naturwissenschaften.

König, W., Ueber eine neue Methode zur Bestimmung der Elasticitätsgrenze. Wiedemanns Annalen. 28. Bd.

Mohr[illegible], A., Die Fragen aus [illegible] der Mechanik.

Müller-Pouillet-Pfaundler, Lehrbuch der Physik.

Pierre, J., Apparat zur Demonstration der Gesetze der Zugfestigkeit. Wiedemanns Annalen. 22. Bd.

Ritter, A., Lehrbuch der technischen Mechanik.

Rühlmann, M., Die technische Mechanik und Maschinenlehre.

Ruska, J., Das technische Rechnen.

Schellen, H., Die Schule der Elementarmechanik und Maschinenlehre.

Ulrich, E., Die Festigkeitslehre.

Weisbach, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik.

Weisbach, Maschinenlehre.

Wernicke, Lehrbuch der Mechanik fester Körper.

Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik.

FERD. SCHNEIDER
Buchbinderei
BAMBERG

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Klimpert, Richard

Lehrbuch der Elasticität und Festigkeit mit 212 Erklärungen ... und einem ausführlichen Formelnverzeichnis ; nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben ; zum Gebrauch an niederen und höheren Schulen, sowie zum Selbststudium und Nachschlagen für Bau- und

Stuttgart 1889

Bamberg, Staatsbibliothek -- Phys.o.77-h
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11846156-5